Indice

A. Misure e integrazione

Costruzione di misure

A.a Costruzione di misure

L'Esempio 4.1 suggerisce che una misura di probabilità sia caratterizzata dai suoi valori su un ristretto numero di eventi, almeno nel caso finito. In effetti vale un risultato di unicità, anche nel caso generale. Per questo è opportuno fare le seguenti considerazioni.

Sia Ω un insieme e $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ una famiglia di sottoinsiemi di Ω. È ben definita la famiglia di sottoinsiemi

$$\mathcal{S} := \bigcap \Big\{ \mathcal{E} \,\Big|\, \mathcal{E} \text{ è una } \sigma\text{-algebra, } \mathcal{E} \supset \mathcal{D} \Big\}$$

ed è facile verificare che $\mathcal{S}$ è essa stessa una σ-algebra. È quindi la *più piccola σ-algebra contenente $\mathcal{D}$*.

Si dice poi che una classe $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ è *chiusa per intersezioni finite* se $\forall A, B \in \mathcal{D}$ si ha che $A \cap B \in \mathcal{D}$.

Un ruolo rilevante ha la più piccola σ-algebra $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ di sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$ contenente gli aperti, i suoi elementi sono detti *insiemi di Borel* o *bolrelliani*di $\mathbb{R}^n$.

A.1 Esercizio. Mostrare che $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ é anche la più piccola σ-algebra contenente
- (i) i sottoinsiemi chiusi,
- (ii) gli intervalli aperti,
- (iii) gli intervalli chiusi,
- (iv) gli intervalli aperti a destra e chiusi a sinistra,
- (v) gli intervalli aperti a sinistra e chiusi a destra,
- (vi) le semirette $]-\infty, t]$.

Soluzione. [*Sugg.* Mostrare che ogni aperto è unione di una infinità al più numerabile di intervalli.]

A.2 Teorema (Unicità). *Sia Ω un insieme, $(\mathcal{E}_1, \mathbb{P}_1)$ e $(\mathcal{E}_2, \mathbb{P}_2)$ due misure su Ω e $\mathcal{D} \subset \mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_2$ una famiglia di sottoinsiemi chiusa per intersezioni finite. Se $\mathbb{P}_1(A) = \mathbb{P}_2(A)$ $\forall A \in \mathcal{D}$, allora $\mathbb{P}_1$ e $\mathbb{P}_2$ coincidono sulla più piccola σ-algebra contenente $\mathcal{D}$.*

Il processo di costruzione di misure è invece più delicato.

A.3 Definizione. *Una classe $\mathcal{I} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ di sottoinsiemi di Ω si dice un* semianello *se $\emptyset \in \mathcal{I}$ e se per ogni $E, F \in \mathcal{I}$ si ha $E \cap F \in \mathcal{I}$, e $E \setminus F = \cup_{j=1}^N I_j$ con $I_j \in \mathcal{I}$ a due a due disgiunti.*

Si noti che se $E, F \in \mathcal{I}$, anche $E \cup F = \cup_j I_j$ con $I_j \in \mathcal{I}$ a due a due disgiunti. Si noti anche che *un'algebra di sottoinsiemi è un semianello di sottoinsiemi.*

A.4 Teorema (Carathéodory). *Sia $\alpha : \mathcal{I} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ una funzione σ-additiva, definita su un semianello $\mathcal{I} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ e tale che $\alpha(\emptyset) = 0$. Sia $\mathcal{E}$ la più piccola σ-algebra contenente $\mathcal{I}$. Allora esiste un'unica funzione $\mathbb{P} : \mathcal{E} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ tale che $(\mathcal{E}, \mathbb{P})$ è una misura e $\mathbb{P}(I) = \alpha(I)$ $\forall I \in \mathcal{I}$.*

Struttura della dimostrazione. Vale la pena osservare che la costruzione della misura che estende α è esplicita. Anzitutto, partendo da una arbitraria famiglia di sottoinsiemi $\mathcal{I}$ contenente $\emptyset$ e da una arbitraria funzione $\alpha : \mathcal{I} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ con $\alpha(\emptyset) = 0$ si definisce $\alpha^* : \mathcal{P}(\Omega) \to \overline{\mathbb{R}}_+$ ponendo per ogni $E \subset \Omega$ da

$$\alpha^*(E) := \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \alpha(I_i) \,\middle|\, \cup_i I_i \supset E,\ I_i \in \mathcal{I} \right\} \tag{A.1}$$

(si intende anche che $\alpha^*(E) = +\infty$ se non esiste alcuna successione $\{I_i\} \subset \mathcal{I}$ tale che $\cup_i I_i \supset E$). È facile verificare che α^* è σ-subadditiva. Cerchiamo ora di definire una σ-algebra su cui α^* è σ-additiva. La prima tentazione è quella di selezionare la classe $\mathcal{M}$ di tutti gli insiemi E per cui α^* è appunto additiva, i.e., gli insiemi E per cui

$$\alpha^*(B \cup E) = \alpha^*(E) + \alpha^*(B)$$

per ogni sottoinsieme B disgiunto da E, o equivalentemente

$$\alpha^*(A \cap E) + \alpha^*(A \cap E^c) \le \alpha^*(A) \qquad \forall A,\ A \supset E.$$

Tuttavia si vuole anche che $\mathcal{M}$ sia una σ-algebra. Seguendo Carathéodory, una localizzazione della condizione precedente è sufficiente a definire una σ-algebra. Precisamente, sia $\mathcal{M}^*$ la classe dei sottoinsiemi E di Ω tali che

$$\alpha^*(A \cap E) + \alpha^*(A \cap E^c) \le \alpha^*(A) \qquad \forall A \in \mathcal{P}(\Omega).$$

Si dimostra che $(\mathcal{M}^*, \alpha^*)$ è una misura su Ω.

In generale però $\mathcal{I}$ non è contenuto in $\mathcal{M}^*$ e $\alpha^*(I) \ne \alpha(I)$ se $I \in \mathcal{M}^* \cap \mathcal{I}$. Se però $\mathcal{I}$ è un semianello e α è σ-additiva su $\mathcal{I}$, si dimostra che

(i) $\mathcal{I} \subset \mathcal{M}^*$,
(ii) $\alpha^*(I) = \alpha(I)$ per ogni $I \in \mathcal{I}$.
(iii) detta $\mathcal{E}$ la più piccola σ-algebra che contiene $\mathcal{I}$, $A \in \mathcal{M}^*$ se e solo se $A = E \setminus N$ con $E \in \mathcal{E}$ e N di misura nulla, i.e., $N \subset F$, $F \in \mathcal{E}$, $\alpha^*(F) = 0$.

(i) e (ii) ci dicono che $(\mathcal{E}.\alpha^*)$ estende α a $\mathcal{E}$. Infine, essendo un semianello stabile per intersezioni finite, dal teorema di unicità Teorema A.2 segue l'unicità dell'estensione. □

A.b La misura di Lebesgue in $\mathbb{R}^n$

Un *intervallo* I di $\mathbb{R}^n$, $n \ge 1$, è il prodotto di n intervalli $I = \prod_{i=1}^n]a_i, b_i]$ chiusi a destra e aperti a sinistra e il suo *volume* elementare è dato da $|I| := \prod_{i=1}^n (b_i - a_i)$. Indichiamo con $\mathcal{I}$ la classe degli intervalli chiusi a destra e aperti a sinistra di $\mathbb{R}^n$.

A.5 Proposizione. *$\mathcal{I}$ è un semianello e la più piccola σ-algebra contenente $\mathcal{I}$ è $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.*

Dimostrazione. $\mathcal{I}$ è banalmente un semianello. La seconda parte della tesi segue osservando che ogni aperto di $\mathbb{R}^n$ è una unione al più numerabile di rettangoli in $\mathcal{I}$. □

Inoltre

A.6 Proposizione. *La misura elementare* $|\ |:\mathcal{I}\to\mathbb{R}_+$ *è una funzione d'insieme* σ*-additiva su* $\mathcal{I}$*.*

Dimostrazione. Si verifica con un argomento induttivo che la misura elementare è finitamente additiva. Proviamo che la misura elementare è σ-subadditiva. Siano I, I_k intervalli e $I=\cup_k I_k$. Fissato $\epsilon>0$ per ogni intero k sia J_k un intervallo con lo stesso centro di I_k contenente strettamente I_k con $|J_k|\le |I_k|+\epsilon\, 2^{-k}$. La famiglia di aperti $\{\mathrm{int}(J_k)\}_k$ è un ricoprimento in aperti del compatto $\overline{I}$ e quindi esistono $k_1,k_2,\dots k_N$ tali che $I\subset\cup_{i=1}^N \mathrm{int}(J_{k_i})$. Perciò

$$|I|\le\sum_{i=1}^N |J_{k_i}|\le\sum_{k=1}^\infty |J_k|\le\sum_{k=1}^\infty(|I_k|+\epsilon 2^{-k})\le\sum_{k=1}^\infty |I_k|+2\epsilon.$$

Questo prova che $|\ |$ è σ-subadditiva su $\mathcal{I}$.

Sia ora $I=\cup_k I_k$ con $\{I_k\}$ a due a due disgiunti. Essendo il volume σ-subadditivo, $|I|\le\sum_{k=1}^\infty |I_k|$. D'altra parte per ogni intero j, $\cup_{k=0}^j I_k\subset I$. Dalla (finita) additività del volume

$$\sum_{k=0}^j |I_k| = \Big|\bigcup_{k=0}^j I_k\Big|\le |I| \qquad \forall j$$

e per $j\to\infty$ si ha la diseguaglianza voluta, $\sum_{k=0}^\infty |I_k|\le |I|$. □

Sulla base delle Proposizioni A.5 and A.6, si applica la costruzione di Carathéodory, Teorema A.4, e si conclude l'esistenza di una unica misura $(\mathcal{B}(\mathbb{R}^n),\mathcal{L}^n)$, detta *misura di Lebesgue* n-dimensionale, che estende a $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ la misura elementare degli intervalli. Dalla (A.1)

$$\mathcal{L}^n(E)=\inf\left\{\sum_{k=1}^\infty |I_k|\ \Big|\ I_k \text{ intervalli}, E\subset\bigcup_{k=1}^\infty I_k\right\}. \tag{A.2}$$

per ogni $E\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.

A.c Leggi di misure in $\mathbb{R}^n$

Se $(\mathcal{B}(\mathbb{R}^n),\mathbb{P})$ è una misura su $\mathbb{R}^n$, si chiama *legge* associata a $\mathbb{P}$ la funzione $F:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ data da

$$F(t)=F(t_1,\dots,t_n):=\mathbb{P}(]-\infty,t_1]\times\dots\times]-\infty,t_n]).$$

A.7 Proposizione. *Due misure* $(\mathcal{B}(\mathbb{R}^n),\mathbb{P})$ *e* $(\mathcal{B}(\mathbb{R}^n),\mathbb{Q})$ *su* $\mathbb{R}^n$ *sono uguali se e solo se hanno la stessa legge.*

Dimostrazione. La legge di $\mathbb{P}$ determina i valori di $\mathbb{P}$ sulla classe $\mathcal{I}$ degli intervalli chiusi a destra e aperti a sinistra. Ad esempio, nel caso unodimensionale, per ogni $a<b$

$$\mathbb{P}(]a,b])=\mathbb{P}(]-\infty,b])-\mathbb{P}(-\infty,a])=F(b)-F(a)$$

e in due dimensioni

$$\mathbb{P}(]a_1,b_1]\times]a_2,b_2])=F(]b_1,b_2])-F(]a_1,b_2])-F(]a_2,b_1])+F(]a_1,a_2]).$$

Essendo $\mathcal{I}$ stabile per intersezioni finite, la tesi segue dal Teorema A.2. □

A.d La misura di Stieltjes–Lebesgue

A.8 Proposizione. *Sia $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nondecrescente e continua da destra. Allora $\zeta : \mathcal{I} \to \mathbb{R}$ definita da $\zeta(]a,b]) := F(b) - F(a)$ è σ-additiva sulla classe $\mathcal{I}$ degli intervalli chiusi a destra e aperti a sinistra.*

Dimostrazione. Evidentemente $< z$ è finitamente additiva e monotona. Resta da provare la σ-additività. Sia $\{I_i\} \subset \mathcal{I}$, $I_i =]x_i, y_i]$, un ricoprimento disgiunto di $I =]a,b]$. Dalla finita additività segue subito che

$$\sum_{i=1}^{\infty} \zeta(I_i) \leq \zeta(I).$$

Proviamo la diseguaglianza opposta. Per ogni $\epsilon > 0$, sia $\{\delta_i\}$ tale che $F(y_i + \delta_i) \leq F(y_i) + \epsilon\, 2^{-i}$, cosa possibile, essendo F continua da destra. Gli intervalli aperti $]x_i, y_i + \delta_i[$ sono un ricoprimento aperto di $[a+\epsilon, b]$ e dunque un numero finito di essi ricopre ancora $[a+\epsilon, b]$. Pertanto dalla finita subadditività

$$F(b) - F(a+\epsilon) \leq \sum_{k=1}^{N} \Big(F(y_{i_k} + \delta_{i_k}) - F(x_{i_k}\Big) = \sum_{k=1}^{N} (\zeta(I_{i_k}) + \epsilon\, 2^{-i_k}) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \zeta(I_i) + \epsilon.$$

Mandando ϵ a zero e utilizzando ancora la continuità di F da destra, si conclude che

$$\zeta(I) = F(b) - F(a) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \Phi(I_i).$$

□

A.9 Esempio. In assenza dell'ipotesi di continuità da destra sulla funzione monotona nondecrescente F, la funzione d'insieme $\zeta : \mathcal{I} \to \mathbb{R}$, $\zeta([a,b[) := F(b) - F(a)$ non è in generale σ-subadditiva su $\mathcal{I}$, pur essendo ovviamente finitamente additiva. Ad esempio, fissiamo $0 \leq a \leq 1$ e consideriamo la funzione

$$F(t) = F_a(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } -1 \leq t < 0, \\ a & \text{se } t = 0, \\ 1 & \text{se } 0 < t \leq 1. \end{cases}$$

Se $\mathcal{I} = \{]\frac{1}{j+1}, \frac{1}{j}]\}_j \cup]-1,0]$, evidentemente $\cup_{I\in\mathcal{I}} I =]-1,1]$ e quindi

$$\zeta(\cup_{I\in\mathcal{I}} I) = z(]-1,1]) = F(1) - F(-1) = 1.$$

D'altra parte $\sum_{I\in\mathcal{I}} \zeta(I) = F(0) - F(-1) = a$, perciò

$$\zeta\Big(\bigcup_{I\in\mathcal{I}} I\Big) = 1 > a = \sum_{I\in\mathcal{I}} \zeta(I)$$

non appena $a < 1$.

A.10 Teorema (Lebesgue). *Si ha:*

(i) *se $(\mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathbb{P})$ è una misura su $\mathbb{R}$, allora la legge di $\mathbb{P}$, $F(t) := \mathbb{P}(]-\infty, t])$, è nondecrescente e continua da destra.*
(ii) *se $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è una funzione nondecrescente e continua da destra, allora esiste una unica misura $(\mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathbb{P})$ tale che*

$$\mathbb{P}(]a,b]) = F(b) - F(a) \qquad \forall a < b.$$

Dimostrazione. (i) F è nondecrescente per la monotonia delle misure. Proviamo che F è continua da destra: fissato $t \in \mathbb{R}$, sia $\{t_n\}$ una successione decrescente convergente a t. Si ha

$$\{x \,|\, f(x \leq t\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \,|\, f(x) \leq t_n\}$$

e per la proprietà di continuità delle misure, $\mathbb{P}(f \leq t_n) \to \mathbb{P}(f \leq t)$.

Viceversa, sia $F(t)$ non decrescente e continua da destra, Tenendo conto delle Proposizioni A.5 and A.8, la costruzione di Carathéodory produce la misura $(\mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathbb{P})$ cercata. $\square$

A.11 Definizione. *La misura $(\mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathbb{P})$ di cui al Teorema A.10 si chiama la* misura di Stieltjes–Lebesgue *associata alla funzione F. Nel seguito la indicheremo con $(\mathcal{B}(\mathbb{R}), S_F)$.*

A.e Misura di probabilità del processo di Bernoulli

Con riferimento e con le notazioni del Paragrafo 4.d, sia $\mathcal{I}$ la classe dei cilindri in $\{0,1\}^\infty$ e sia $\zeta : \mathcal{I} \to [0,1]$ la probabilità degli eventi di $\mathcal{I}$.

A.12 Teorema (Kolmogorov). *ζ è σ-additiva su $\mathcal{I}$. Pertanto, detta $\mathcal{E}$ la più piccola σ-algebra contenente $\mathcal{I}$, segue che esiste una unica misura $(\mathcal{E}, \mathbb{P})$ tale che $\mathbb{P}(I) = \zeta(I)\ \forall I \in \mathcal{I}$.*

Cenno di dimostrazione. È facile verificare che $\mathcal{I}$ è un semianello. Si prova quindi che $\zeta : I \to \mathbb{R}$ è σ-additiva su $\mathcal{I}$. La costruzione di Carathéodory fornisce quindi la misura voluta. $\square$

Integrale associato ad una misura

Il problema di caratterizzare la classe delle funzioni integrabili secondo Riemann e di capire per quali funzioni vale il teorema fondamentale del calcolo, come pure l'esigenza di integrare nuove funzioni portano ad una nuova e più generale definizione di integrale dovuta a Henri Lebesgue (1875–1941). Sebbene le idee fondanti della teoria dell'integrazione di Lebesgue possano farsi risalire all'inizio del novecento a Henri Lebesgue (1875–1941) e a Giuseppe Vitali (1875–1932), applicazioni e successive generalizzazioni ed estensioni si sono susseguite per tutto il secolo scorso, al punto che oggi la teoria della misura e dell'integrazione ha un ruolo fondante nell'Analisi Matematica.

L'approccio seguito è quello di far discendere l'integrazione dalla nozione di *misura*. Abbiamo qui di seguito raccolto i principali risultati della teoria rimandando per i dettagli ad uno dei numerosi libri sull'integrazione.

A.f L'integrale rispetto ad una misura

L'area del sottografico di una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ non negativa può calcolarsi, cfr. la Figura 1.1, in due modi diversi, passando al limite sulle suddivisioni dell'asse x per l'integrale di Riemann o anche passando al limite sulle suddivisioni dell'asse y. Questa seconda alternativa definisce l'integrale come

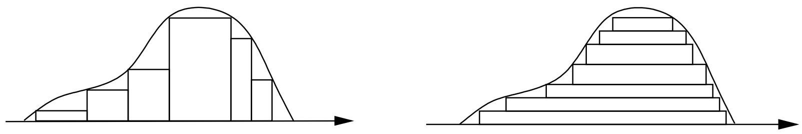

Figura 1.1. Il calcolo dell'integrale. A sinistra il metodo di Riemann, a destra quello di Lebesgue.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2^N} \sum_{k=1}^{\infty} |E_{f,k\,2^{-N}}|, \tag{A.3}$$

dove si è indicato con

$$E_{f,t} := \Big\{ x \in \mathbb{R} \,\Big|\, f(x) > t \Big\}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

il sopralivello t di f e con $|E_{f,t}|$ la sua "misura". Tenendo conto che $t \to |E_{f,t}|$ è non decrescente, (qindi Riemann integrabile), la (A.3) suggerisce di definire l'integrale mediante la *formula di Cavalieri*

$$\text{Lebesgue} \int_a^b f(x)\,dx := \text{Riemann} \int_0^{\infty} |E_{f,t}|\,dt \tag{A.4}$$

Da questo punto di vista la teoria dell'integrazione per funzioni su $\mathbb{R}$ dipende dalla disponibilità di una "misura" su $\mathbb{R}$, in grado di misurare insiemi eventualmente molto irregolari (si pensi ad esempio ai sopralivelli di funzioni oscillanti). È questo il ruolo della misura di Lebesgue in $\mathbb{R}$.

A.g Funzioni misurabili

La costruzione precedente può servire per definire l'integrale associato ad una arbitraria misura. Siano Ω è un insieme e $(\mathcal{E}, \mathbb{P})$ una misura su Ω. Se $f : E \to [-\infty, +\infty]$ è una funzione nonnegativa tale che per ogni $t \in \mathbb{R}$ l'insieme

$$E_{f,t} := \Big\{ x \in \Omega \,\Big|\, f(x) > t \Big\} \in \mathcal{E},$$

in modo che $\mathbb{P}(f > t)$ abbia senso per ogni $t \in \mathbb{R}$, si può definire l'integrale di f rispetto alla misura $(\mathcal{E}, \mathbb{P})$ con la *formula di Cavalieri*

$$\int f(x)\,d\,\mathbb{P}(x) := \text{Riemann} \int_0^{\infty} \mathbb{P}(f > t)\,dt. \tag{A.5}$$

Tuttavia, per motivi di opportunità si preferisce dà una definizione più diretta salvo poi dimostrare successivamente la (A.5).

A.13 Definizione. *Sia* Ω *un insieme e* $(\mathcal{E}, \mathbb{P})$ *una misura su* Ω *Si dice che* $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$ *è* $\mathcal{E}$-misurabile *se per ogni* $t \in \mathbb{R}$

$$\{x \in \Omega \,|\, f(x) > t\} \in \mathcal{E}.$$

Nel calcolo delle probabilità $(\mathcal{E}, \mathbb{P})$ è una misura con $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ e le funzioni $\mathcal{E}$-misurabili si chiamano *variabili aleatorie*. Ma fissiamoci sulla terminologia della teoria della misura.

Ci sono molti modi equivalenti di descrivere la $\mathcal{E}$-misurabilità. Usando la proprietà di continuità della misura si dimostra essere fatti equivalenti

(i) $\{x \in \Omega \,|\, f(x) > t\} \in \mathcal{E}$ per ogni t,
(ii) $\{x \in \Omega \,|\, f(x) \geq t\} \in \mathcal{E}$ per ogni t,
(iii) $\{x \in \Omega \,|\, f(x) \leq t\} \in \mathcal{E}$ per ogni t,
(iv) $\{x \in \Omega \,|\, f(x) < t\} \in \mathcal{E}$ per ogni t

e si può sostituire il "per ogni t" con "per ogni t in un sottoinsieme denso di $\mathbb{R}$".

Poi, essendo ogni aperto di $\mathbb{R}$ unione al più numerabile di intervalli, si diimostra anche che

(i) $\{x \in \Omega \,|\, f(x) > t\} \in \mathcal{E}$ per ogni t,
(ii) per ogni $A \subset \mathbb{R}$ aperto si ha $f^{-1}(A) \in \mathcal{E}$,
(iii) per ogni $F \subset \mathbb{R}$ chiuso si ha $f^{-1}(F) \in \mathcal{E}$,
(iv) per ogni $B \subset \mathbb{R}$ di Borel si ha $f^{-1}(B) \in \mathcal{E}$.

sono affermazioni tra loro equivalenti. Queste ultime danno una formulazione della $\mathcal{E}$-misurabilità che non usa l'ordine e suggerisce la seguente definizione.

A.14 Definizione. *Sia Ω un insieme e $(\mathcal{E}, \mathbb{P})$ una misura di probabilità su Ω o più in generale una misura. Si dice che $f : \Omega \to \mathbb{R}^N$, $N \geq 1$, è* $\mathcal{E}$-misurabile *se è verificata una delle seguenti condizioni tra loro equivalenti*

(i) *per ogni $A \subset \mathbb{R}$ aperto si ha $f^{-1}(A) \in \mathcal{E}$,*
(ii) *per ogni $F \subset \mathbb{R}$ chiuso si ha $f^{-1}(F) \in \mathcal{E}$,*
(iii) *per ogni $B \subset \mathbb{R}$ di Borel si ha $f^{-1}(B) \in \mathcal{E}$.*

A.15 Esercizio. Siano $(\mathcal{E}, \mathbb{P})$ una misura su Ω e f una funzione $\mathbb{P}$-misurabile su un insieme $E \in \mathcal{E}$ con $\mathbb{P}(E) < +\infty$. Allora $\mathbb{P}(E \cap \{f = t\}) = 0$ eccetto che per un insieme al più numerabile di t.

In generale esistono funzioni che non sono $\mathcal{E}$-misurabili. Tuttavia, grazie alla proprietà di σ-addivitità di $\mathcal{E}$, è possibile provare che *le operazioni algebriche usuali su funzioni $\mathcal{E}$-misurabili e i limiti puntuali di successioni di funzioni $\mathcal{E}$-misurabili producono funzioni $\mathcal{E}$-misurabili.* Ad esempio, se f e g sono $\mathcal{E}$-misurabili, e $\alpha \in \mathbb{R}$, allora

$$f + g, \quad fg, \quad \frac{1}{f}, \quad \alpha f, \quad |f|, \quad \max(f, g), \quad \min(f, g)$$

sono $\mathcal{E}$-misurabili. Se poi $\{f_n\}$ è una successione di funzioni $\mathcal{E}$-misurabili, allora anche le funzioni

$$\sup_n f_n(x), \qquad \inf_n f_n(x), \qquad \liminf_{n\to\infty} f_n(x), \qquad \limsup_{n\to\infty} f_n(x)$$

sono $\mathcal{E}$-misurabili e, se $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ esiste in un sottoinsieme $E \subset \Omega$, allora $E \in \mathcal{E}$ e per ogni $t \in \mathbb{R}$ si ha $\{x \in E \,|\, f(x) > t\} \in \mathcal{E}$.

Ricordando che una funzione ϕ fra due spazi metrici è continua se e solo se $\phi^{-1}(A)$ è aperto per ogni A aperto del codominio, segue immediatamente dalla definizione di variabile aleatoria che

(i) se $g : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^m$ è continua, allora g è $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$-misurabile,
(ii) $\phi \circ f$ è $\mathcal{E}$-misurabile se $f : \Omega \to \mathbb{R}^N$ è $\mathcal{E}$-misurabile e $\phi : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^m$ è $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$-misurabile,

Dalla (ii) segue ad esempio che $|f|^p$, $\log|f|, \dots$ sono $\mathcal{E}$-misurabili e che $f : \Omega \to \mathbb{R}^N$, $f = \big(f^1, \dots, f^N\big)$ è $\mathcal{E}$-misurabile se e solo se le sue componenti $f^1, \dots, f^N$ sono $\mathcal{E}$-misurabili.

A.16 Esercizio. Siano Ω un insieme, $(\mathcal{E}, \mathbb{P})$ una misura su Ω e $f, g : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ $\mathcal{E}$-misurabili. Allora $\{x \in \Omega \,|\, f(x) > g(x)\} \in \mathcal{E}$.

Soluzione. Per ogni razionale $r \in \mathbb{Q}$, l'insieme $A_r := \{x \in \Omega \,|\, f(x) > r,\ g(x) < r\}$ è in $\mathcal{E}$ come intersezione di elementi di $\mathcal{E}$. D'altra parte

$$\Big\{x \in E \,\Big|\, f(x) > g(x)\Big\} = \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} A_r,$$

quindi $\{x \in E \,|\, f(x) > g(x)\}$ è unione numerabile di insiemi in $\mathcal{E}$.

A.17 Esercizio. Siano Ω un insieme, $(\mathcal{E}, \mathbb{P})$ una misura su Ω, $E \in \mathcal{E}$ e $f, g : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ due funzione $\mathcal{E}$-misurabili. Allora la funzione

$$h(x) := \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in E, \\ g(x) & \text{se } x \in E^c \end{cases}$$

è $\mathcal{E}$-misurabile.

A.h L'integrale rispetto ad una misura

Consideriamo prima il caso delle cosidette *funzioni semplici* i.e, di funzioni $\mathcal{E}$-misurabili che prendono un numero *finito* di valori. Indichiamo con $\mathcal{S}$ la classe delle funzioni semplici. Se $a_1, a_2, \dots, a_k$ sono i valori distinti di $\varphi \in \mathcal{S}$, φ si scrive come

$$\varphi(x) = \sum_{j=1}^{k} a_j \chi_{E_j}(x), \qquad E_j := \{x \,|\, \varphi(x) = a_j\}\,.$$

dove $\chi_A(x)$ denota la fuznione caratteristica di A. Si noti che essendo φ $\mathcal{E}$-misurabile, $E_j \in \mathcal{E}$ per ogni j. Inoltre gli E_j sono a due a due disgiunti Sono quindi una partizione di Ω.

Se $\varphi \in \mathcal{S}$, l'*integrale di* φ è allora, come suggerito dall'intuizione,

$$I(\varphi) := \sum_{j=1}^{k} a_j\, \mathbb{P}(\varphi = a_j). \tag{A.6}$$

Poiché la misura di un insieme può anche essere infinita, si fa la convenzione che se $a_j = 0$ e $\mathbb{P}(E_j) = +\infty$, allora $a_j\, \mathbb{P}(E_j) := 0$. Si noti che $I(\varphi)$ può anche essere $+\infty$.

Una volta definito l'integrale per le funzioni nella classe $\mathcal{S}$, si estende la definizione di integrale alle funzioni $\mathcal{E}$-misurabili nonnegative con

$$\int f(x)\, d\,\mathbb{P}(x) := \sup\Big\{I(\varphi) \,\Big|\, \varphi \in \mathcal{S}, \varphi(x) \le f(x)\ \forall x \in \Omega\Big\}\,. \tag{A.7}$$

A.18 Esercizio. Verificare che se $\varphi \in \mathcal{S}$, allora $\int \varphi(x)\, d\,\mathbb{P}(x) = I(\varphi)$.

Quindi, per funzioni $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ $\mathcal{E}$-misurabili di segno qualunque, si decompone f in parte positiva e parte negativa,

$$f(x) = f_+(x) - f_-(x), \qquad f_+(x) := \max(f(x), 0), \qquad f_-(x) := \max(-f(x), 0)$$

e si pone

$$\int f(x)\, d\,\mathbb{P}(x) := \int f_+(x)\, d\,\mathbb{P}(x) - \int f_-(x)\, d\,\mathbb{P}(x). \tag{A.8}$$

sempre che la differenza a destra abbia senso, i.e., non sia $+\infty - \infty$. È allora naturale introdurre le seguenti definizioni.

A.19 Definizione. *Sia* $(\mathcal{E}, \mathbb{P})$ *una misura su* Ω *e* $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ *una funzione* $\mathcal{E}$*-misurabile. Si dice che* f *è* $\mathbb{P}$-integrabile *se uno almeno dei due integrali* $\int f_+(x)\, d\,\mathbb{P}(x)$ *e* $\int f_-(x)\, d\,\mathbb{P}(x)$ *è finito. L'integrale di* f *è definito dalla* (A.8).

Si dice poi che f *è* $\mathbb{P}$-sommabile *se entrambi gli integrali di* f_+ *e* f_- *sono finiti. La classe delle funzioni* $\mathbb{P}$*-sommabili si indica con* $\mathcal{L}^1(E; \mathbb{P})$.

Infine, se $f : \Omega \to \mathbb{R}$ è una funzione e $E \in \mathcal{E}$, si dice che f è *misurabile su* E (risp. *integrabile su* E, *sommabile su* E) se la funzione $f(x)\chi_E(x)$ è $\mathcal{E}$-misurabile, (risp. integrabile, sommabile). Se f è $\mathbb{P}$-integrabile su E si definisce

$$\int_E f(x)\, d\,\mathbb{P}(x) := \int f(x)\chi_E(x)\, d\,\mathbb{P}(x). \tag{A.9}$$

In particolare,

$$\int_E 1\, d\,\mathbb{P}(x) = \int \chi_E(x)\, d\,\mathbb{P}(x) = \mathbb{P}(E).$$

A.20 Osservazione. Si noti che f è sommabile se e solo se $|f|$ ha integrale finito. In questo caso anche l'integrale di f è finito e

$$\left| \int f(x)\, d\,\mathbb{P}(x) \right| \le \int |f(x)|\, d\,\mathbb{P}(x).$$

A.21 Osservazione. Nel caso in cui $\Omega = \mathbb{R}$ e $(\mathcal{E}, \mathbb{P}) = (\mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathcal{L}^1)$ è la misura di Lebesgue, allora la differenza nelle teorie dell'integrazione di Riemann e di Lebesgue è nella scelta delle funzioni semplici: combinazioni finite di funzioni caratteristiche di *insiemi misurabili secondo Lebesgue* nella teoria di Lebesgue, combinazioni finite di funzioni caratteristiche di *intervalli* nella teoria di Riemann.

A.i Proprietà dell'integrale

Le proprietà dell'integrale si deducono o direttamente dalla definizione, o dalle proprietà dell'integrale per funzioni semplici attraverso una importante operazione di passaggio al limite, diretta conseguenza della σ-additività della misura. Si ha

A.22 Teorema. *Sia $(\mathcal{E}, \mathbb{P})$ una misura su Ω.*

(i) (MONOTONIA) *Se f, g sono due funzioni integrabili tali che $f(x) \leq g(x)$ per ogni x, allora*
$$\int f(x)\, d\,\mathbb{P}(x) \leq \int g(x)\, d\,\mathbb{P}(x).$$

(ii) (CONTINUITÀ) *Se f è integrabile, allora*
$$\left| \int f(x)\, d\,\mathbb{P}(x) \right| \leq \int |f(x)|\, d\,\mathbb{P}(x).$$

(iii) (TEOREMA DI BEPPO LEVI) *Sia $f_k : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ una successione nondecrescente di funzione $\mathcal{E}$-misurabili nonnegative. Detto $f(x) := \lim_{k\to\infty} f_k(x)$ (finito o infinito) il limite puntuale delle $\{f_k\}$, si ha*
$$\int f(x)\, d\,\mathbb{P}(x) = \lim_{k\to\infty} \int f_k(x)\, d\,\mathbb{P}(x).$$

(iv) (LINEARITÀ) *$\mathcal{L}^1$ è uno spazio vettoriale e l'integrale sulle funzioni $\mathbb{P}$-sommabili è un operatore lineare,*
$$\int (\alpha f(x) + \beta g(x))\, d\,\mathbb{P}(x) = \alpha \int f(x)\, d\,\mathbb{P}(x) + \beta \int g(x)\, d\,\mathbb{P}(x)$$
per ogni $f, g \in \mathcal{L}^1$ e ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

A proposito della (iii) si noti che l'ipotesi qualitatitiva di $\mathcal{E}$-misurabilità è sulle approssimanti f_k: la $\mathcal{E}$-misurabilità del limite f è automatica. Non c'è alcuna ipotesi di finitezza sui valori degli integrali e infine la tesi è una uguaglianza: si può usare uno dei lati dell'uguaglianza per calcolare l'altro, nei due sensi.

Il teorema di Beppo Levi discende direttamente dalla proprietà di σ-additività della misura. Si è dimostrato essere il punto di forza della teoria dell'integrazione di Lebesgue.

Riportiamo qui una dimostrazione del teorema di Beppo Levi.

Dimostrazione del teorema di Beppo Levi. Essendo f limite puntuale di funzioni $\mathcal{E}$ misurabili per ipotesi, f è $\mathcal{E}$-misurabile. Essendo $f_k \leq f$ per ogni k segue dalla monotonia dell'integrale che $\lim_{k\to\infty} \int_E f_k\, d\,\mathbb{P} \leq \int_E f\, d\,\mathbb{P}$. Resta da provare la diseguaglianza opposta
$$\int_E f\, d\,\mathbb{P} \leq \alpha := \lim_{k\to\infty} \int_E f_k\, d\,\mathbb{P}\,.$$
Non è evidentemente restrittivo supporre $\alpha < +\infty$. Sia ϕ una funzione semplice con $\phi \leq f$ e sia $0 < \beta < 1$. Posto per $k = 1, 2, \dots$
$$A_k := \Big\{ x \in E \,\Big|\, f_k(x) \geq \beta\, \phi(x) \Big\}\,,$$
chiaramente $\{A_k\}$ è una successione crescente di insiemi misurabili e $\cup_k A_k = \Omega$. Ora, per ogni k
$$\beta \int_{A_k} \phi\, d\,\mathbb{P} = \int_{A_k} \beta\, \phi\, d\,\mathbb{P} \leq \int_{A_k} f_k\, d\,\mathbb{P} \leq \int_E f_k\, d\,\mathbb{P} \leq \alpha. \tag{A.10}$$
D'altra parte ϕ è una funzione semplice, $\phi = \sum_{i=1}^N a_i \chi_{B_i}$, $B_i = \{x \,|\, \phi(x) = a_i\} \in \mathcal{E}$, e dunque tenendo conto della continuità della misura e della (A.6)
$$\int_{A_k} \phi\, d\,\mathbb{P} = \sum_{i=1}^N a_i\, \mathbb{P}(B_i \cap A_k) \to \sum_{i=1}^N a_i\, \mathbb{P}(B_i) = \int \phi\, d\,\mathbb{P} \qquad \text{per } k \to \infty.$$

Pertanto passando al limite nella (A.10) per $k \to \infty$

$$\beta \int_E \phi \, d\,\mathbb{P} = \beta \lim_{k\to\infty} \int_{A_k} \phi \, d\,\mathbb{P} \le \alpha.$$

Per $\beta \to 1$ si ottiene che $\int_E \phi(x)\, d\,\mathbb{P} \le \alpha$ per ogni ϕ semplice con $0 \le \phi \le f$. Ricordando la definizione di integrale, la tesi segue. □

La additività dell'integrale segue naturalmente dalla additività dell'integrale per le funzioni semplici, dal seguente lemma di approssimazione e dal teorema Beppo Levi utilizzato nel passaggio al limite.

A.23 Lemma (Campionamento). *Sia $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}_+$ una funzione $\mathcal{E}$-misurabile nonnegativa. Esiste una successione crescente $\{\varphi_k\}$ di funzioni semplici nonnegative tali che $\varphi_k(x) \to f(x)$ per $k \to \infty$ per ogni $x \in \Omega$.*

Dimostrazione. Per ogni intero k si costrusice la funzione $\varphi_k(x)$ *campionando* i valori di $f(x)$ sui livelli $0, 1/2^k, 2/2^k, \dots, 1, (2^k+1)/2^k, \dots, 4^k$, cfr. la Figura 1.1. Precisamente, sia $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ una funzione qualunque. Per ogni intero $k = 1, 2, 3, \dots$ definiamo $E_k := \{x \,|\, f(x) > 2^k\}$ e per $h = 0, 1, , \dots 4^k - 1$ sia $E_{k,h} := \{x \,|\, h/2^k < f(x) \le (h+1)/2^k\}$. Definiamo quindi $\varphi_k : \Omega \to \mathbb{R}$ ponendo

$$\varphi_k(x) = \begin{cases} 2^k & \text{se } x \in E_k, \\ \frac{h}{2^k} & \text{se } x \in E_{k,h}. \end{cases} \tag{A.11}$$

È subito visto che $\varphi_{k+1}(x) \ge \varphi_k(x)$ perché nel passare da k a $k+1$ i livelli di quantizzazione quadruplicano mantenendo i precedenti, che $\varphi_k(x) \le f(x)$ per ogni x, e che

$$\varphi_k(x) = \sum_{h=0}^{4^k-1} \frac{h}{2^k} \chi_{E_{k,h}}(x) + 2^k \chi_{E_k}(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Inoltre $\varphi_k(x) \to f(x)$ puntualmente. Infatti se $f(x) = +\infty$, allora $\varphi_k(x) = 2^k$ $\forall k$ e quindi $\varphi_k(x) \to +\infty = f(x)$. Se invece $f(x) \in \mathbb{R}$ per k sufficientemente grande si ha $f(x) < 2^k$ e quindi $f(x) \in E_{k,h}$ per qualche $h = 0, 1, \dots, 4^k - 1$. Perciò

$$f(x) - \varphi_k(x) \le \frac{h+1}{2^k} - \frac{h}{2^k} = \frac{1}{2^k}.$$

Di nuovo per $k \to \infty$ $\varphi_k(x) \to f(x)$. Resta da osservare che se f è $\mathcal{E}$-misurabile, gli insiemi $E_{h,k}$ e E_k sono $\mathcal{E}$-misurabili, e quindi φ_h è una funzione semplice. □

A.24 Osservazione. Il teorema di Beppo Levi si applica alla successione $\{\varphi_k\}$ della tesi del Lemma A.23. Pertanto

$$\int \varphi_k(x)\, d\,\mathbb{P}(x) \to \int f(x)\, d\,\mathbb{P}(x).$$

Concludiamo con alcune semplici conseguenze:

A.25 Proposizione. *Si ha*

(i) *se f è $\mathbb{P}$-integrabile su $E \in \mathcal{E}$, $|f(x)| \le M$ per ogni $x \in E$ e $\mathbb{P}(E) < +\infty$, allora f è $\mathbb{P}$-sommabile su E e $\int_E |f|\, d\,\mathbb{P}(x) \le M\ \mathbb{P}(E)$,*

(ii) *$f \in \mathcal{L}^1(E; \mathbb{P})$ se e solo se f è $\mathcal{E}$-misurabile e $\int_E |f|\, d\,\mathbb{P}(x) < +\infty$,*

(iii) *se $E, F \in \mathcal{E}$ e $f : E \cup F \to \overline{\mathbb{R}}$ è $\mathbb{P}$-integrabile su $E \cup F$, allora*

$$\begin{aligned} &\int_F f(x)\, d\,\mathbb{P}(x) + \int_G f(x)\, d\,\mathbb{P}(x) \\ &\qquad = \int_{F\cup G} f(x)\, d\,\mathbb{P}(x) + \int_{F\cap G} f(x)\, d\,\mathbb{P}(x). \end{aligned} \tag{A.12}$$

A.j La formula di Cavalieri

A.26 Teorema (formula di Cavalieri). *Sia $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ una funzione nonnegativa $\mathcal{E}$-misurabile. Allora*

$$\int f(x)\, d\,\mathbb{P}(x) = \text{(Riemann)} \int_0^\infty \mathbb{P}(f > t)\, dt. \tag{A.13}$$

Come d'uso, si è abbreviato $\mathbb{P}(\{x \in \Omega \,|\, f(x) > t\})$ con $\mathbb{P}(f > t)$.

Dimostrazione. Proviamo prima il risultato per funzioni semplici. Sia φ una funzione semplice, $\varphi(x) = \sum_{i=1}^N a_i \chi_{E_i}(x)$, con $\{E_i\}$ misurabili e a due a due disgiunti. Per ogni $i = 1, \dots, N$ sia $\alpha_i(t) := \chi_{[}0, a_i](t)$. Evidentemente $\mathbb{P}(\varphi > t)$ è una funzione costante a tratti, quindi semplice e

$$\mathbb{P}(\varphi > t) = \sum_{i=1}^N \mathbb{P}(E_i \cap \{\varphi > t\}) = \sum_{i=1}^N \alpha_i(t)\, \mathbb{P}(E_i)$$

e dunque integrando

$$\int_0^\infty \mathbb{P}(\varphi > t)\, dt = \sum_{i=1}^N \left(\int_0^\infty \alpha_i(t)\, dt \right) \mathbb{P}(E_i) = \sum_{i=1}^N a_i\, \mathbb{P}(E_i) = \int \varphi(x)\, d\,\mathbb{P}(x).$$

Sia ora $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ $\mathcal{E}$-misurabile e nonnegativa. Per il Lemma A.23 esiste una successione crescente $\{\varphi_k\}$ di funzioni semplici nonnegative convergenti puntualmente a f. Per quanto detto per ogni k

$$\int \varphi_k(x)\, d\,\mathbb{P}(x) = \int_0^\infty \mathbb{P}(\varphi_k > t)\, dt$$

e ovviamente $\mathbb{P}(\varphi_k > t) \to \mathbb{P}(f > t)$ crescendo. Il teorema di Beppo Levi inplica allora che

$$\text{Lebesgue} \int f(x)\, d\,\mathbb{P}(x) = \text{Lebesgue} \int_0^\infty \mathbb{P}(f > t)\, d\mathcal{L}^1(t)$$

e quindi la tesi, se si osserva che $t \to \mathbb{P}(f > t)$ è noncrescente, quindi integrabile secondo Riemann su $\mathbb{R}$. □

A.k Diseguaglianza di Chebychev

Siano $(\mathcal{E}, \mathbb{P})$ una misura su un insieme Ω e $f : \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione $\mathcal{E}$-misurabile nonnegativa. Dalla monotonia dell'integrale si deduce per ogni $t > 0$ la *diseguaglianza*

$$t\ \mathbb{P}(f > t) = \int_{\{f>t\}} t\, d\,\mathbb{P}(x) \le \int_{\{f>t\}} f(x)\, d\,\mathbb{P}(x)$$

i.e.,

$$\mathbb{P}(f > t) \le \frac{1}{t} \int_{\{f>t\}} f(x)\, d\,\mathbb{P}(x). \tag{A.14}$$

A questa diseguaglianza ci si riferisce con vari nomi: *stima debole*, *disuguaglianza di Markov*, *disuguaglianza di Chebychev*.

Insiemi trascurabili e integrale

Siano Ω un insieme, $(\mathcal{E}, \mathbb{P})$ una misura su Ω e $E \in \mathcal{E}$.

A.27 Definizione. *Si dice che un insieme $N \subset \Omega$ ha* misura nulla *se esiste $F \in \mathcal{E}$ tale che $N \subset F$ e $\mathbb{P}(F) = 0$.*

Si dice che un predicato $p(x)$, $x \in E$, è vero per $\mathbb{P}$-quasi ogni $x \in E$ *o* $\mathbb{P}$-quasiovunque *in E se l'insieme*

$$N := \Big\{ x \in E \,\Big|\, p(x) \text{ è falso} \Big\}$$

ha misura nulla.

In particolare, se $f : \Omega \to \mathbb{R}$ è una funzione, si dice che "$f = 0$ $\mathbb{P}$-quasi ovunque", o anche "$f(x) = 0$ per $\mathbb{P}$-q.o. x", se l'insieme $\{x \in \Omega \,|\, f(x) \neq 0\}$ ha misura $\mathbb{P}$ nulla, e si dice che "$|f| < \infty$ $\mathbb{P}$-quasi ovunque", o anche "$|f(x)| < +\infty$ per $\mathbb{P}$-q.o. x", se l'insieme $\{x \in \Omega \,|\, f(x) = +\infty\}$ ha misura $\mathbb{P}$ nulla. Dalla numerabile additività della misura segue

A.28 Proposizione. *Sia $f : \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione $\mathcal{E}$-misurabile.*

(i) *Se $\int |f(x)|\, d\,\mathbb{P}(x) < \infty$, allora $|f(x)| < +\infty$ $\mathbb{P}$-quasiovunque,*
(ii) *$\int |f(x)|\, d\,\mathbb{P}(x) = 0$ se e solo se $f(x) = 0$ $\mathbb{P}$-quasiovunque.*

A.1 Qualche esempio

In questo paragrafo esplicitiamo la nozione di integrale rispetto ad alcune classi di misure.

A.29 Esempio (Funzioni a valori discreti). Sia $(\mathcal{E}, \mathbb{P})$ una misura su un insieme Ω e $f : \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione $\mathcal{E}$-misurabile nonnegativa a valori *discreti*, i.e., con una infinità al più numerabile di valori $\{a_k\}$ distinti. È il solo caso che si presenta se Ω è finito o numerabile.

Se $E_k := \{x \,|\, f(x) = a_k\}$, allora

$$f(x) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j\, \mathbb{1}_{E_j}(x) \qquad \forall x \in \Omega.$$

Si noti che fissato x, la serie si riduce in realtà ad un solo termine essendoci un solo insieme tra gli $\{E_j\}$ contenente x. Si ha

$$\int f(x)\, d\,\mathbb{P}(x) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j\, \mathbb{P}(f = a_j). \tag{A.15}$$

Infatti, se i valori assunti da f sono in numero finito, allora f è semplice e per definizione, cfr. (A.6),

$$\int f(x)\, d\,\mathbb{P}(x) = \sum_{j=1}^{k} a_j\, \mathbb{P}(f = a_j). \tag{A.16}$$

Se invece i valori assunti sono una infinità numerabile, allora per ogni intero k si ha per definizione

$$\int \sum_{j=1}^{k} a_j\, \mathbb{1}_{E_j}\; d\,\mathbb{P}(x) = \sum_{j=1}^{k} a_j\, \mathbb{P}(f = a_j).$$

e, essendo f nonnegativa, si passa al limite per $k \to \infty$ con il teorema di Beppo-Levi e si ottiene

$$\int f(x)\, d\,\mathbb{P}(x) = \lim_{k\to\infty} \int \Big(\sum_{j=1}^{k} a_j\, \mathbb{1}_{E_j} \Big)\, d\,\mathbb{P}(x) = \lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{k} a_i\, \mathbb{P}(f = a_i) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i\, \mathbb{P}(f = a_i).$$

La (A.15) può riscriversi come

$$\int f(x)\, d\,\mathbb{P}(x) = \sum_{t\in\mathbb{R}} t\, \mathbb{P}(f = t) \tag{A.17}$$

poiché $\mathbb{P}(f = t) = 0$ se t non è uno degli a_i.

A.30 Esempio (Probabilità su insiemi numerabili). Siano $\mathbb{P}$ una misura su un insieme numerabile Ω sia $p : \Omega \to \mathbb{R}$ la funzione densità di $\mathbb{P}$, i.e. $p(x) := \mathbb{P}(\{x\})$ per ogni $x \in \Omega$. Allora per ogni $f : \Omega \to \mathbb{R}$ nonnegativa

$$\int f(x)\ d\,\mathbb{P}(x) = \sum_{x\in\Omega} f(x)p(x). \tag{A.18}$$

Infatti, f ha una infinità al più numerabile di valori distinti $a_1, \dots, a_n$ e quindi dalla (A.15)

$$\begin{aligned}\int f(x)\, d\,\mathbb{P}(x) &= \sum_{j=0}^{\infty} a_j\, \mathbb{P}(f = a_j) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j \Big(\sum_{f(x)=a_j} p(x) \Big)\\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{f(x)=a_j} f(x)p(x) = \sum_{x\in\Omega} f(x)p(x).\end{aligned}$$

A.31 Esercizio (Delta di Dirac). Siano Ω un insieme e $x_0 \in \Omega$. La funzione $\delta_{x_0} : \mathcal{P}(\Omega) \to \mathbb{R}$,

$$\delta_{x_0}(A) = \begin{cases} 1 & \text{se } x_0 \in A,\\ 0 & \text{altrimenti,}\end{cases}$$

detta *delta di Dirac*[1] centrata in x_0, è una misura di probabilità su Ω. Segue dalla (A.18) che

$$\int f(x)\, d\delta_{x_0}(x) = f(x_0). \tag{A.19}$$

per ogni funzione $f : \Omega \to \mathbb{R}$.

A.32 (Somma di misure). Siano $(\mathcal{E}, \alpha)$ e $(\mathcal{E}, \beta)$ due misure su Ω. È facile verificare che la funzione $\alpha + \beta : \mathcal{E} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ data da $(\alpha + \beta)(E) = \alpha(E) + \beta(E)$ $\forall E \in \mathcal{E}$ definisce una misura $(\mathcal{E}, \alpha + \beta)$ su Ω. Si ha

$$\int f(x)\, d(\alpha + \beta)(x) = \int f(x)\, d\alpha(x) + \int g(x)\, d\beta(x) \tag{A.20}$$

per ogni f $\mathcal{E}$-misurabile nonnegativa.

Dimostrazione. Per provare la (A.20) si considera prima il caso in cui $f = \sum_{i=1}^{N} c_i \chi_{E_i}$ è semplice con valori nonnegativi distinti $c_1, \dots, c_n$ in modo che $E_i = \{f = c_i\}$. Pertanto

$$\begin{aligned}\int f(x)\, d(\alpha + \beta)(x) &= \sum_{i=1}^{n} c_i(\alpha + \beta)(f = c_i) = \sum_{i=1}^{n} c_i\alpha(f = c_i) + \sum_{i=1}^{n} c_i\beta(f = c_i)\\ &= \int f(x)\, d\alpha(x) + \int f(x)\, d\beta(x).\end{aligned}$$

[1] Paul Dirac (1902–1984)

Il caso generale segue per approssimazione. Sia $\{\varphi_k\}$ una succesione crescente di funzioni semplici nonnegative convergente puntualmente a $f(x)$. Passando al limite la

$$\int \varphi_k(x)\, d(\alpha+\beta)(x) = \int \varphi_k(x)\, d\alpha(x) + \int \varphi_k(x)\, d\beta(x)$$

per $k \to +\infty$ con il teorema di Beppe Levi, si ottiene la (A.20). □

Analogamente, se $(\mathcal{E}, \alpha)$ è una misura su Ω e $\lambda \in \mathbb{R}$, posto $(\lambda\alpha)(E) := \lambda\, \alpha(E)$ $\forall E \in \mathcal{E}$, si verifica che $(\mathcal{E}, (\lambda\alpha))$ è una misura su Ω e che

$$\int f(x)\, d(\lambda\alpha)(x) = \lambda \int f(x)\, d\alpha(x). \tag{A.21}$$

per ogni funzione f $\mathcal{E}$-misurabile nonnegativa.

A.33 . Siano $(\mathcal{E}, \mathbb{P})$ e $(\mathcal{E}, \mathbb{Q})$ due misure su un insime Ω. Supponiamo che esista una funzione $\mathcal{E}$-misurabile nonnegativa ρ tale che

$$\mathbb{P}(A) = \int_A \rho(x)\, d\,\mathbb{Q}(x)$$

per ogni $A \in \mathcal{E}$. Si dice che $\mathbb{P}$ *è assolutamente continua rispetto a* $\mathbb{Q}$. Allora

$$\int f(x)\, d\,\mathbb{P}(x) = \int f(x)\rho(x)\, d\,\mathbb{Q}(x) \tag{A.22}$$

per ogni funzione f $\mathcal{E}$-misurabile nonnegativa.

Supponiamo dapprima che f sia semplice. Esistono allora costanti distinte $x_1, \dots, x_n$ tali che $f(x) = \sum_{i=1}^n c_i\, \mathbb{1}_{E_i}(x)$, $E_i = \{x \,|\, f(x) = c_i\} \in \mathcal{E}$ Allora

$$\begin{aligned}\int f(x)\, d\,gP(x) &= \sum_{i=1}^n c_i\, \mathbb{P}(f = c_i) = \sum_{i=1}^n c_i \int \mathbb{1}_{E_i}(x)\rho(x)\, d\,\mathbb{Q}(x)\\ &= \int \Big(\sum_{i=1}^n c_i\, \mathbb{1}_{E_i}(x)\Big)\rho(x)\, d\,\mathbb{Q}(x) = \int f(x)\rho(x)\, d\,\mathbb{Q}(x).\end{aligned}$$

Il caso generale segue per approssimazione, utilizzando il teorema di Beppo Levi.

A.m L'immagine di una misura

Sia $(\mathcal{E}, \mu)$ una misura su un insieme Ω e $f : \Omega \to \mathbb{R}^N$ una funzione $\mathcal{E}$-misurabile. Poiché le controimmagini degli insiemi di Borel di $\mathbb{R}^N$ sono per definizione $\mathcal{E}$-misurabili, è definita la mappa $f_{\#}\mu : \mathcal{B}(\mathbb{R}^N) \to \overline{\mathbb{R}}$,

$$f_{\#}\mu(A) := \mu(f^{-1}(A)) \qquad \forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N), \tag{A.23}$$

A.34 Proposizione. *$(\mathcal{B}(\mathbb{R}^N), f_{\#}\mu)$ è una misura su $\mathbb{R}^N$ e per il corrispondente integrale si ha*

$$\int \varphi(t)\, df_{\#}\mu(t) = \int \varphi(f(x))\, d\mu(x) \tag{A.24}$$

per ogni $\varphi : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$-misurabile nonnegativa.

Dimostrazione. La σ-additività di $f_{\#}\mu$ segue da quella di μ tenendo conto delle formule di de Morgan e del fatto che

$$f^{-1}(\cup_i A_i) = \cup_i f^{-1}(A_i), \qquad f^{-1}(\cap_i A_i) = \cap_i f^{-1}(A_i).$$

Suppniamo che φ sia una funzione semplice, $\varphi(t) = \sum_{i=1}^n c_i\, \mathbb{1}_{E_i}(t)$ con $c_1, \dots, c_n$ distinti e per $i = 1, \dots, n$ $E_i := \{y \,|\, \varphi(t) = c_i\}$, Allora

$$\varphi \circ f(x) = \sum_{i=1}^n c_i\, \mathbb{1}_{f^{-1}(E_i)}(x)$$

e

$$f^{-1}(E_i) = \{x \in \Omega \,|\, \varphi \circ f(x) = c_i\}$$

Pertanto

$$\int g(t)\, df_{\#}\mu(t) = \sum_{i=1}^n c_i f_{\#}\mu(E_i) = \sum_{i=1}^n c_i\, \mu(\varphi \circ f = c_i) = \int \varphi(f(x))\, d\mu(x)$$

Se ora φ è misurabile e nonnegativa su $\mathbb{R}^N$, si procede approssimando φ con una successione crescente $\{\varphi_k\}$ di funzioni semplici convergente puntualmente a φ , cfr. Lemma A.23. Per ogni intero k si è appena visto che

$$\int \varphi_k(t)\, df_{\#}\mu(t) = \int \varphi_k(f(x))\, d\mu(x)$$

e, passando al limite per $k \to \infty$ con il teorema di Beppo Levi, si ottiene la (A.24) per φ. □

Formule di riduzione e misure prodotto

A.n Misura prodotto

Siano $(\mathcal{E}, \mathbb{P})$ una misura su X e $(\mathcal{F}, \mathbb{Q})$ una misura su Y. Consideriamo la classe $\mathcal{I}$ dei "rettangoli" nel prodotto cartesiano $X \times Y$

$$\mathcal{I} := \Big\{A = E \times F \,\Big|\, E \in \mathcal{E},\ F \in \mathcal{F}\Big\}$$

e la funzione d'insieme $\zeta : \mathcal{I} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ definita da $\lambda(A \times B) := \mathbb{P}(A)\, \mathbb{Q}(B)$. È presto visto che

A.35 Proposizione. $\mathcal{I}$ è un semianello *e $\zeta : \mathcal{I} \to \overline{\mathbb{R}}$ è σ-additiva su $\mathcal{I}$.*

Dimostrazione. È facile convincersi che $\mathcal{I}$ è un semianello. Proviamo che ζ è σ-additiva su $\mathcal{I}$. Se $E \times F = \cup_k (E_k \times F_k)$, $E, E_k \in \mathcal{E}$, $F, F_k \in \mathcal{F}$, allora

$$\chi_E(x)\, \chi_F(y) = \sum_{k=1}^\infty \chi_{E_k}(x) \chi_{F_k}(y) \qquad \forall x \in X,\ y \in Y$$

e quindi integrando su Y, otteniamo dal teorema di Beppo Levi,

$$\chi_E(x)\ \mathbb{Q}(F) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{Q}(F_k)\chi_{E_k}(x) \qquad \forall x \in X.$$

Integrando su X, di nuovo per lo stesso motivo

$$\zeta(E \times F) := \mathbb{P}(E)\,\mathbb{Q}(F) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(E_k)\,\mathbb{Q}(F_k).$$

□

Pertanto, cfr. Teorema A.4, ζ ha una *unica* estensione come misura sulla più piccola σ-algebra $\mathcal{G}$ contenente $\mathcal{I}$. Questa misura si indica con $(\mathcal{G}, \mathbb{P} \times \mathbb{Q})$ e si chiama la *misura prodotto* di $\mathbb{P}$ e $\mathbb{Q}$.

A.36 Esercizio. Mostrare che $\mathcal{L}^n \times \mathcal{L}^k = \mathcal{L}^{n+k}$ in $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$.

A.37 Esercizio. Mostrare che se $\mathbb{P}$ è una misura esterna su Ω e $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}_+$ è una funzione $\mathbb{P}$-misurabile, allora il sottografico di f

$$SG_f := \Big\{(x,t) \in \Omega \times \mathbb{R} \,\Big|\, 0 < t < f(x)\Big\}$$

è $\mathbb{P} \times \mathcal{L}^1$-misurabile e

$$\mathbb{P} \times \mathcal{L}^1(SG_f) = \int f(x)\, d\,\mathbb{P}(x).$$

[*Sugg.* Considerare il caso di funzioni semplici e passare al limite.]

A.o Formule di riduzione

Sia $A \subset X \times Y$. Per ogni $x \in A$ indichiamo con A_x il sottoinsieme di Y definito da

$$A_x := \Big\{y \in Y \,\Big|\, (x,y) \in A\Big\}.$$

A.38 Teorema (Fubini). *Siano $(\mathcal{E}, \mathbb{P})$ e $(\mathcal{F}, \mathbb{Q})$ misure su X e Y rispettivamente e sia $(\mathcal{G}, \mathbb{P} \times \mathbb{Q})$ la misura prodotto. Per ogni $A \in \mathcal{G}$*

(i) *$A_x \in \mathcal{F}$ per $\mathbb{P}$-q.o. $x \in X$,*
(ii) *$x \mapsto \mathbb{Q}(A_x)$ è una funzione $\mathcal{E}$-misurabile,*
(iii) *si ha*

$$(\mathbb{P} \times \mathbb{Q})(A) = \int_X \mathbb{Q}(A_x)\, d\,\mathbb{P}(x).$$

Scambiando l'ordine delle variabili, si ha anche

(i) $A_y \in \mathcal{E}$ per $\mathbb{Q}$-q.o. $y \in Y$,
(ii) $y \mapsto \mathbb{P}(A_y)$ è una funzione $\mathcal{F}$-misurabile,
(iii) si ha

$$(\mathbb{P} \times \mathbb{Q})(A) = \int_Y \mathbb{P}(A_y)\, d\,\mathbb{P}(y).$$

L'ipotesi di finitezza sulle misure, può essere indebolita ma non eliminata. Si vede facilmente che il teorema si estende a misure σ-finite[2].

[2] Una misura $(\mathcal{E}, \mathbb{P})$ su Ω si dice σ-finita se esiste una successione $\{E_j\} \subset \mathcal{E}$ con $\mathbb{P}(E_j) < +\infty$ tali che $\cup_j E_j = \Omega$.

A.39 Esempio. Si consideri ad esempio $X = Y = \mathbb{R}$, $\mathbb{P} = \mathcal{L}^1$ e $\mathbb{Q}$ la misura che conta i punti, $\mathbb{Q}(A) = |A|$. Sia $S := \{(x, x) \,|\, x \in [0, 1]\}$ e $f(x, y) = \chi_S(x, y)$ la sua funzione caratteristica. Essendo S chiuso, S è nella più piccola σ-algebra generata dagli "intervalli", che in questo caso è costituita dagli insiemi di Borel di $\mathbb{R}^2$.

$$\int d\,\mathbb{P} \int f\, d\,\mathbb{Q} = \int_0^1 1\, dx = 1, \qquad \int d\,\mathbb{Q} \int f\, d\,\mathbb{P} = \int_0^1 0\, d\,\mathbb{Q} = 0.$$

Non potendosi scambiare l'ordine di integrazione, il teorema non vale.

Come conseguenza si trovano le *formule di riduzione.*

A.40 Teorema (Fubini–Tonelli). *Siano* $(\mathcal{E}, \mathbb{P})$ *e* $(\mathcal{F}, \mathbb{Q})$ *misure* σ*-finite su* X *e* Y *e* $(\mathcal{G}, \mathbb{P} \times \mathbb{Q})$ *la misura prodotto. Se* $f : X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$ *è* $\mathcal{G}$*-misurabile e nonnegativa (risp.* $\mathbb{P} \times \mathbb{Q}$ *sommabile), allora*

(i) $y \mapsto f(x, y)$ *è* $\mathcal{F}$*-misurabile (risp.* $\mathbb{Q}$*-sommabile) per* $\mathbb{P}$*-q.o.* $x \in X$*,*
(ii) $x \to \int_Y f(x, y)\, d\,\mathbb{Q}(y)$ *è* $\mathcal{E}$*-misurabile (risp.* $\mathbb{P}$*-sommabile),*
(iii) *si ha*

$$\int f(x, y)\, d(\mathbb{P} \times \mathbb{Q})(x, y) = \int d\,\mathbb{P}(x) \int f(x, y)\, d\,\mathbb{Q}(y).$$

Dimostrazione. La dimostrazione è a tappe.

(i) Se f è la funzione caratteristica di un insieme $\mathbb{P} \times \mathbb{Q}$ misurabile, siamo ricondotti al teorema di Fubini Teorema A.38. Per additività la tesi è ancora vera se f è una funzione semplice $\mathcal{G}$-misurabile.

(ii) Se f è nonnegativa, si procede appossimando f con funzioni semplici e passando al limite con il teorema di Beppo Levi e la continuità delle misure.

(iii) Se f è $\mathbb{P} \times \mathbb{Q}$ sommabile, si applica il passo precedente alle parti positive e negative di f. $\square$