Esercizio Siano p, q naturali, $0 \le p < q$. Calcolare

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^{2p}}{1+x^{2q}}\,dx.$$

Soluzione. Sia $f(z) := \frac{z^{2p}}{1+z^{2q}}$, $z \in \mathbb{C}$. Osserviamo che

(i) $|f(z)| = O(\frac{1}{|z|^2})$ per $z \to \infty$,

(ii) il denominatore $1+z^{2q}$ si annulla sulle radici $2q$-esime di -1 che sono

$$z_j := \exp\Big(i\pi\frac{2j+1}{2q}\Big), \qquad j = 0, \dots 2q-1.$$

(iii) Ogni z_j è una radice semplice di $z^{2q}+1$.

Pertanto abbiamo

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^{2p}}{1+x^{2q}}\,dx &= 2\pi i \sum_{\Im z_j > 0} \mathrm{Res}\,(f, z_j)\\ &= 2\pi i \sum_{j=0}^{q-1} \frac{z_j^{2p}}{2q z_j^{2q-1}} = -i\frac{\pi}{q}\sum_{j=0}^{q-1} z_j^{2p+1}.\end{aligned}$$

Resta da calcolare $\sum_{j=0}^{q-1} z_j^{2p+1}$. Per questo conviene porre

$$\alpha := \pi\frac{2p+1}{2q} \qquad \text{e} \qquad \beta := e^{i\alpha}.$$

Si calcola allora

$$\sum_{j=0}^{q-1} z_j^{2p+1} = \beta\sum_{j=0}^{q-1}\beta^{2j} = \beta\frac{\beta^{2q}-1}{\beta^2-1} = \frac{-2}{\beta-\frac{1}{\beta}} = \frac{-2}{e^{i\alpha}-e^{-i\alpha}} = -\frac{1}{i}\frac{1}{\sin\alpha}.$$

In conclusione

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^{2p}}{1+x^{2q}}\,dx = \frac{\pi}{q}\frac{1}{\sin\Big(\pi\frac{2p+1}{2q}\Big)}.$$