7. Funzioni continue

7.a Funzioni continue e limiti

Mimando la definizione di continuità per funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, si pone

7.1 Definizione. *Siano (X, d_X) e (Y, d_Y) due spazi metrici e $E \subset X$. Una funzione $f : E \to Y$ si dice* continua in x_0 *se*

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \text{ tale che, se } x \in E \text{ e } d_X(x, x_0) < \delta, \text{ allora } d_Y(f(x), f(x_0)) < \epsilon.$$

Equivalentemente, $f : E \subset X \to Y$ è continua in x_0 se

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \text{ tale che } f(B(x_0, \delta) \cap E) \subset B(f(x_0), \epsilon).$$

Infine, $f : X \to Y$ si dice continua *se f è continua in ogni punto di X.*

Collegata alla nozione di continuità è la nozione di limite. Volendo descrivere il comportamento di f *vicino a* un punto $x_0 \in X$, bisognerà almeno supporre che f sia definita in punti arbitrariamente vicini ad x_0, i.e., che x_0 sia un punto di accumulazione per il dominio E di f.

7.2 Definizione. *Siano (X, d_X), (Y, d_Y) spazi metrici, $E \subset X$ e x_0 un punto di accumulazione per E. Si dice che $f : E \to Y$* tende a $y_0 \in Y$ per x che tende a x_0, $x \in E$, *e si scrive*

$$f(x) \to y_0 \text{ per } x \to x_0,\ x \in E, \quad \text{o anche} \quad \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in E}} f(x) = y_0,$$

se per ogni $\epsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che $d_Y(f(x), y_0) < \epsilon$ per ogni $x \in E$ per il quale $0 < d_X(x, x_0) < \delta$.

Come per il caso delle funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, il limite se esiste è unico. Inoltre, confrontando le definizioni, si vede subito che

7.3 Proposizione. *Siano (X, d_X) e (Y, d_Y) spazi metrici, $E \subset X$, $x_0 \in X$ e $f : E \to Y$. Allora*

(i) *se x_0 è un punto isolato di E, allora f è continua in x_0,*
(ii) *se x_0 è un punto di accumulazione per E, allora f è continua in x_0 se e solo se $f(x) \to f(x_0)$ per $x \to x_0$, $x \in E$.*

7.4 Esercizio. Siano (X, d_X) e (Y, d_Y) spazi metrici, $E \subset X$, $x_0 \in X$ di accumulazione per E e sia $f : E \to Y$. Allora
$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in E}} f(x) = y_0,$$
se e solo se la funzione $g : E \cup \{x_0\} \to Y$ data da
$$g(x) := \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in E \setminus \{x_0\}, \\ y & \text{se } x = x_0, \end{cases}$$
è continua in x_0.

Le nozioni di limite e di continuità sono per certi versi piu' intuitive se espresse in termini di successioni. Vale il

7.5 Teorema (di collegamento). *Siano (X, d_X) e (Y, d_Y) spazi metrici, $E \subset X$, $f : E \to Y$ e x_0 di accumulazione per E. Allora*
$$f(x) \ \to \ y_0 \quad \text{per } x \to x_0,\ x \in E, \tag{7.1}$$
se e solo se per ogni successione $\{x_n\} \subset E \setminus \{x_0\}$ con $x_n \to x_0$ si ha $f(x_n) \to y_0$.

Analogamente, $f : E \subset X \to Y$ è continua in $x_0 \in E$ se e solo se per ogni successione $\{x_n\} \subset E$ con $x_n \to x_0$ si ha $f(x_n) \to f(x_0)$.

7.b Le regole di calcolo dei limiti

Completiamo questa carrellata sulla definizione di funzione continua e di limite con un elenco di utili regole di calcolo.

7.6 Proposizione (Restrizione). *Siano (X, d_X) e (Y, d_Y) spazi metrici, $E \subset F \subset X$ e $f : F \subset X \to Y$.*

- (i) *Se $x_0 \in X$ di accumulazione per E, allora x_0 è di accumulazione per F e, se $f(x) \to y$ per $x \to x_0$, $x \in F$, allora $f(x) \to y$ per $x \to x_0$, $x \in E$.*
- (ii) *Se $x_0 \in E$ e $f : F \subset X \to Y$ è continua in x_0, allora anche $f : E \subset X \to Y$ è continua in x_0.*

7.7 Proposizione (Cambiamento di variabile). *Siano (X, d_X), (Y, d_Y) e (Z, d_z) tre spazi metrici e $E \subset X$. Se x_0 è di accumulazione per E, y_0 è di accumulazione per $f(E)$ e*

- (i) *$g(y) \to L$ per $y \to y_0$, $y \in f(E)$,*
- (ii) *$f(x) \to y_0$ per $x \to x_0$, $x \in E$,*
- (iii) *o $g(y_0) = L$, o $f(x) \neq y_0$ per ogni $x \in E$, $x \neq x_0$, allora $g(f(x)) \to L$ per $x \to x_0$, $x \in E$.*

Analogamente, se $x_0 \in E$, $y_0 \in f(E)$, $f : E \subset X \to Y$ è continua in x_0 e $g : Y \to Z$ è continua in $f(x_0)$, allora $g \circ f : E \to Z$ è continua in x_0.

7.8 Proposizione (Giunzione). *Sia (X, d) uno spazio metrico, e $\{U_\alpha\}$ un ricoprimento di X. Supponiamo*

- (i) *o che tutti gli U_α sono aperti,*

(ii) *o che tutti gli* U_α *sono chiusi e per ogni* $x \in X$ *esiste una palla aperta che incontra solo un numero finito di* U_α.

Allora

(i) A *è aperto (risp. chiuso) in* X *se e solo se* $A \cap U_\alpha$ *è aperto (risp. chiuso) in* U_α,

(ii) *sia* $f : X \to Y$ *tale che per ogni* α *la restrizione* $f_\alpha : U_\alpha \to Y$ *di* f *a* U_α *è continua, allora* f *è continua.*

7.9 Osservazione. Una qualche condizione sulla posizione degli elementi del ricoprimento è necessaria. Ad esempio nel caso in cui $X := [a, b]$, $x_0 \in [a, b]$, $U_x := \{x\}$ per ogni $x \in [a, b]$, la tesi del teorema è manifestamente falsa.

Funzioni a valori in $\mathbb{R}^m$

7.c La classe delle funzioni continue $C^0(X, \mathbb{R}^m)$

Nel seguito considereremo spesso funzioni continue definite su spazi metrici a valori in $\mathbb{R}^m$ $m \geq 1$ e in particolare funzioni a valori reali.

Abbiamo già visto che le funzioni coordinate e le applicazioni lineari sono funzioni continue. Inoltre, abbiamo visto che composizioni di funzioni continue sono ancora funzioni continue.

7.10 Proposizione. *Le funzioni coordinate* $\pi^i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, *definite per* $i = 1, \dots, n$ *da* $\pi^i(x) = x^i$ *se* $x = (x^1, x^2, \dots, x^n) \to x^i$, *sono funzioni continue da* $\mathbb{R}^n$ *su* $\mathbb{R}$.

7.11 Proposizione. *Sia* (X, d) *uno spazio metrico. allora* $f : X \to \mathbb{R}^m$, $f = (f^1, f^2, \dots, f^m)$ *è continua se e solo tutte le componenti* $f^i : X \to \mathbb{R}$ *sono continue.*

Infine si prova come per le funzioni di una variabile, che

7.12 Proposizione. *Sia* (X, d) *uno spazio metrico.*

(i) *se* $f, g : X \to \mathbb{R}^n$ *sono continue in* x_0, *allora* $f + g : X \to \mathbb{R}^n$ *è continua in* x_0;

(ii) *se* $f : X \to \mathbb{R}^n$ *e* $\lambda : X \to \mathbb{R}$ *sono continue in* x_0, *allora* $\lambda f : X \to \mathbb{R}^n$ *è continua in* x_0.

In altre parole, se si indica con $C^0(X, \mathbb{R}^m)$ lo spazio delle funzioni continue dallo spazio metrico (X, d) su $\mathbb{R}^n$, la Proposizione **??** si rienuncia dicendo che $C^0(X, \mathbb{R}^n)$ *è uno spazio vettoriale su* $\mathbb{R}$.

7.13 Esercizio. Mostrare che la funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x, y, z) := \sin(x^2 y + z^2)$ è continua in $\mathbb{R}^3$.

Soluzione. Sia $P_0 := (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$. Le tre funzioni coordinate $P = (x, y, z) \to x$, $P \to y$, $P \to z$ sono continue in P_0. Perciò, per (ii), Proposizione 7.12 $P \to x^2 y$ e $P \to z^2$ sono continue in P_0. Per (i) Proposizione 7.12, $P \to x^2 y + z^2$ è continua in P_0. Infine la funzione $t \sin t$ è continua in $t + 0 := x_0^2 y_0 + z_0^2$: segue quindi che $(x, y, z) \to \sin(x^2 y + z^2)$ è continua in P_0.

7.14 Esercizio. Mostrare che i polinomi in n variabili sono funzioni continue da $\mathbb{R}^n$ su $\mathbb{R}$.

7.d Il calcolo dei limiti

Abbiamo insistito, parlando di limiti, nello specificare sempre l'insieme E in cui la variabile x varia, anche se questo risulta essere non particolarmente rilevante in alcune delle argomentazioni precedenti. Esso è assai rilevante quando si trattano limiti di funzioni di più variabili: ad esempio, ci sono molti modi di avvicinarsi ad un punto $x_0 \in \mathbb{R}^2$. Scelte diverse sono determinanti per l'esistenza, e/o per l'eguaglianza dei limiti

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in E}} f(x) \quad \text{e} \quad \lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in F}} f(x).$$

Il calcolo dei limiti di funzioni di più variabili procede come per le funzioni di una variabile. Siano (X, d_X) e (Y, d_Y) due spazi metrici, $f : X \to Y$ e $x_0 \in X$ un punto di accumulazione.

- ○ se si trovano due insiemi E_1, E_2 (ad esempio due curve o due successioni) aventi x_0 come punto di accumulazione e tali che le restrizioni $f : E_1 \subset X \to Y$ e $f : E_2 \subset X \to Y$ di f hanno limiti diversi, allora il limite non esiste per la proprietà di restrizione,
- ○ se si vuole provare l'esistenza del limite di $f(x)$ per $x \to x_0$, si può
  - (i) indovinare un possibile limite $y_0 \in Y$, ad esempio calcolando il limite su una restrizione, e poi
  - (ii) mostrare che la funzione *a valori reali* $d_Y(f(x), y_0)$ tende a zero per $x \to x_0$. Per quest'ultimo passo si può utilizzare il criterio del confronto.

  In definitiva se si ha un candidato y_0 e si prova che

  $$d_Y(f(x), y_0) \le h(x) \text{ per ogni } x \in X,\ x \ne x_0,$$

  per una funzione $h : X \to \mathbb{R}$ con $h(x) \to 0$ per $x \to x_0$, allora $f(x) \to y_0$ per $x \to x_0$. Funzioni $h : X \to \mathbb{R}$ continue in zero con $h(x_0) = 0$ si producono facilmente componendo la funzione $d_X(x, x_0)$ distanza da x_0 con una funzione $\phi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ continua in 0 e con $\phi(0) = 0$.

7.15 Esercizio. In $\mathbb{R}^2$, sia $f(x, y) := xy/(x^2 + y^2)$ per $(x, y) \ne (0, 0)$. Si calcoli se possibile il limite di f per $(x, y) \to (0, 0)$.

Soluzione. Proviamo che il limite richiesto non esiste. Se per assurdo fosse $f(x, y) \to L \in \overline{\mathbb{R}}$ per $(x, y) \to (0, 0)$, allora per il teorema di collegamento dovrebbe essere $f(x_n, y_n) \to \overline{\mathbb{R}}$ per ogni successione $\{(x_n, y_n)\}$ convergente a $(0, 0)$. Se si sceglie $\mathbf{x}_n := (1/n, k/n)$, si trova

$$f\Big(\frac{1}{n}, \frac{k}{n}\Big) = \frac{k}{1 + k^2}$$

e quindi per $n \to \infty$, $L = k/(1 + k^2)$, un assurdo se si scelgono due differenti valori di k.

Che la funzione f non possa avere limite lo si deduce anche guardando alla sua "omogeneità". Per ogni $(x, y) \ne (0, 0)$ e ogni $\lambda > 0$ si ha $f(\lambda x, \lambda y) = f(x, y)$. La funzione f è dunque costante lungo ogni semiretta uscente dall'origine, cfr. Figura 7.1. È dunque evidente che f ha limite in $(0, 0)$ nel solo caso in cui è costante. Si noti infine che dalla diseguaglianza $2xy \le x^2 + y^2$ segue in particolare che $|f(x, y)| \le 1/2\ \forall (x, y)$.

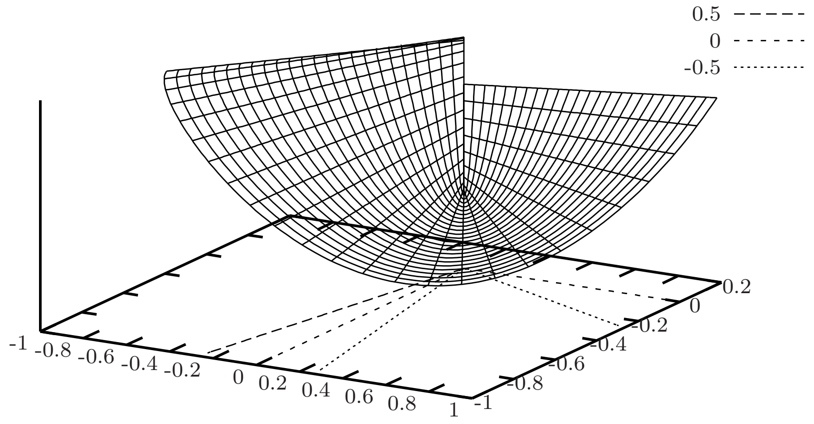

Figura 7.1.

7.16 Esercizio. In $\mathbb{R}^2$, sia $f(x,y) := \sin(x^2y)/(x^2+y^2)$ per $(x,y) \neq (0,0)$. Si calcoli se possibile il limite di f per $(x,y) \to (0,0)$.
Soluzione. La successione $(1/n, 0)$ converge a $(0,0)$ e si ha $f(1/n,0) = 0 \to 0$. L'unico possibile limite, se esiste, è dunque zero. Il limite esiste perché

$$|f(x,y) - 0| = \frac{|\sin(x^2y)|}{x^2+y^2} \leq \frac{|x|^2}{x^2+y^2}|y| \leq |y| \to 0$$

per $(x,y) \to (0,0)$. Si è usato nell'ordine che $|\sin t| \leq |t|\ \forall t$, che $|x|2 \leq x^2+y^2\ \forall (x,y)$ e che $|y|$ è una funzione continua in $\mathbb{R}^2$, ad esempio in quanto composizione della mappa coordinata $(x,y) \to y$, cfr. la Proposizione 7.11, e del modulo $t \to |t|$.

Si possono anche scegliere come restrizioni *cammini continui uscenti da* x_0, i.e., funzioni $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ continue in 0 con $\varphi(0) = x_0$, e $\varphi(t) \neq x_0$ per $t \neq 0$ e calcolare

$$\lim_{t \to 0^+} f(\varphi(t)).$$

Questi limiti esistono o non esistono ed il loro valore dipende dal cammino scelto per una fissata f. Ovviamente se

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in E}} f(x) = L$$

a causa della proprietà di restrizione e di cambiamento di variabile,

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in F}} f(x) = L \quad \text{e} \quad \lim_{t \to 0^+} f(\varphi(t)) = L$$

rispettivamente per ogni $F \subset E$ per cui x_0 sia ancora di accumulazione e per ogni cammino in E, $\varphi([0,1]) \subset E$, uscente da x_0.

7.17 Esercizio. Mostrare che la funzione

$$f : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad f(x, y) := \frac{xy}{x^2 + y^2}.$$

non ha limite per $(x, y) \to (0, 0)$. Ma

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in E}} f(x, y) = 0, \quad \text{se} \quad E := \{(x, y) \,|\, x \in \mathbb{R},\ 0 < y < \lambda x^2\}.$$

Soluzione. f è evidentemente continua in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Se scegliamo di uscire dallo zero muovendosi sul grafico della retta $y = mx$, parametrizzato ad esempio da $\varphi(x) := (x, mx)$, si ha

$$f(\varphi(x)) = f(x, mx) = \frac{m}{1 + m^2} \quad \to \frac{m}{1 + m^2}, \text{ per } x \to 0,$$

in particolare non esiste il limite di $f(x, y)$ per $(x, y) \to (0, 0)$.

D'altra parte, se $(x, y) \in E$, si ha

$$0 \le \frac{|xy|}{x^2 + y^2} \le \frac{\lambda |x|^3}{x^2} = \lambda\, |x|$$

e quindi la tesi.

7.18 Esercizio. Mostrare che la funzione

$$f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}, \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\},$$

non è continua in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ e che

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in E}} f(x, y) = 0 \quad \text{se} \quad E := \{(x, y) \ \mid\ x \ge 0,\ |y| \le x^3\}.$$

Soluzione. Se ci si muove sul grafico di una retta per $(0, 0)$ parametrizzata ad esempio con $\varphi(t) = (ta, tb)$ si ha

$$f(\varphi(t)) = f(at, bt) = \frac{a^2 b t^3}{a^2 t^2 + b^2 t^2} = \frac{a^2 b}{a^2 + b^2}\, t \to 0 \qquad \text{per } (x, y) \to (0, 0),$$

Se ci si muove però sul grafico della parabola $y = \alpha x^2$, $\alpha \in \mathbb{R}$, parametrizzata con $x \to (x, \alpha x^2)$, si ha questa volta

$$f(x, \alpha x) = \frac{\alpha x^4}{x^4 + \alpha^2 x^4} \quad \to \frac{\alpha}{1 + \alpha^2},$$

in particolare non esiste il limite per $(x, y) \to 0$. Esso mostra anche che non è possibile studiare la continuità di una funzione guardando solamente alle sue restrizioni su rette.

D'altra parte, se $(x, y) \in E$,

$$\Big|\frac{x^2 y}{x^4 + y^2} - 0\Big| = \frac{|x|^2 |y|}{x^4 + y^2} \le \frac{|x|^5}{x^4 + y^2} \le |x| \to 0.$$

7.e Applicazioni lineari e applicazioni lipschitziane

7.19 Definizione. *Siano (X, d_X), (Y, d_Y) due spazi metrici e $f : X \to Y$. Si dice che f è* lipschiziana *se esiste una costante $L > 0$ tale che*

$$d_Y(f(x), f(y)) \le L d_X(x, y) \qquad \forall x, y \in X. \tag{7.2}$$

La piu' piccola costante L per cui vale la (7.2), precisamente

$$\mathrm{Lip}\,(f) := \inf\{L \,|\, (7.2) \text{ è vera}\} = \sup_{x,y\in X} \frac{d_Y(f(x), f(y))}{d_X(x, y)}$$

si chiama costante di Lipschitz *di f.*

Le funzioni lipschitziane sono anche dette con una terminologia assai intuitiva funzioni a *dilatazione uniformemente limitata*. Ovviamente

7.20 Proposizione. *Ogni funzione $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ lipschitziana è continua.*

7.21 Esercizio. Mostrare che la funzione *coordinata i-esima*

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \to x_i \in \mathbb{R}$$

è una mappa lineare con costante di Lipschitz 1.
Soluzione. Per ogni $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$

$$|\pi_i(x) - \pi_i(y) = |x_i - y_i| \leq |y - x|$$

da cui $\mathrm{Lip}\,(\pi_i) \leq 1$. Scegliendo poi x e y con tutte le coordinate nulle eccetto la i-esima, si prova che $\mathrm{Lip}\,(\pi_i)$ non puo' essere minore di 1.

7.22 Esercizio. Sia V un sottospazio lineare di $\mathbb{R}^n$, e $P : \mathbb{R}^n \to V$ la proiezione ortogonale su V. P è una applicazione lineare e dal teorema della proiezione ortogonale,

$$|P(x)| \leq |x| \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

Segue che per ogni $x, y \in \mathbb{R}^n$

$$|P(x) - P(y)| = |P(y - x)| \leq |y - x|$$

i.e., P è lipschitziana con $\mathrm{Lip}\,(P) \leq 1$. Essendo poi P l'identità du V segue che $\mathrm{Lip}\,(P)$ non puo' essere minore di 1 e quindi $\mathrm{Lip}\,(P) = 1$.

Sia $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una applicazione lineare. Definiamo il *coefficiente di massima dilatazione di L* come

$$||L|| := \sup_{|x|=1} |L(x)|$$

Si dimostra che in effetti $||L|| < +\infty$ e che il sup è raggiunto, i.e., che esiste $\overline{x}$ con $||\overline{x}|| = 1$ tale che $|L(\overline{x})| = ||L||$. Si ha

7.23 Proposizione. *Sia $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ lineare. Allora L è liptschitziana con costante di Lipschitz $||L||$.*

Dimostrazione. Siano $x, y \in \mathbb{R}^n$ con $y \neq x$. Sia $z := \frac{y-x}{|y-x|}$. Allora $|z| = 1$ e dunque $|L(z)| \leq ||L||$. Per linearità

$$|L(z)| = \frac{|L(y) - L(x)|}{|y - x|} \leq ||L||$$

i.e.,

$$|L(x) - L(y)| \leq ||L||\,|y - x|,$$

vale a dire L è una mappa lispschitziana con costante di Lipschitz non superiore a $||L||$. D'altra parte se si prende $x := \overline{x}$ e $\overline{y} = \lambda\overline{x}$, $\lambda > 1$, allora

$$|L(\overline{y}) - L(\overline{x})| = |L((\lambda - 1)\overline{x})| = |(\lambda - 1)L(\overline{x})| = (\lambda - 1)||L|| = ||L||\,|\overline{y} - \overline{x}|$$

e la costante di Lipschitz di L non puo' essere minore di $||L||$. $\square$

7.f La funzione distanza da un sottoinsieme

7.24 Esercizio. Sia (X, d) uno spazio metrico e $x_0 \in X$. Mostrare che la funzione "distanza da x_0" definita da
$$d_{x_0}(x) := d(x, x_0), \qquad x \in X,$$
è lipschitziana con costante di Lipschitz 1 da X in $\mathbb{R}$.
Soluzione. Dalla diseguaglianza triangolare segue per ogni $x, y \in X$
$$d(x, x_0) \le d(x, y) + d(y, x_0) \qquad \text{e} \qquad d(y, x_0) \le d(x, y) + d(x, x_0),$$
i.e.,
$$|d(x, x_0) - d(y, x_0)| \le d(x, y) \qquad \forall x, y \in X$$
Scegliendo $y = x_0$, si vede poi che la costante di Lipschitz di $d(x, x_0)$ non puo' essere inferiore a 1.

Più in generale, sia $A \subset (X, d)$ un sottoinsieme di uno spazio metrico. Definiamo la funzione *distanza di x da A* come
$$x \ \to d_A(x) := \inf\Big\{d(x, y)\ \Big|\ y \in A\Big\}.$$

7.25 Teorema. *la funzione distanza da A, $d_A : X \to \mathbb{R}$, è lipschiztiana con costante di Lipschitz* 1.

Dimostrazione. Infatti, per ogni $x, y \in X$ e ogni $z \in A$ si ha
$$d(x, z) \le d(x, y) + d(y, z)$$
e prendendo l'inf al variare di $z \in A$,
$$d_A(x) \le \inf_{z \in A}(d(x, y) + d(y, z)) = d(x, y) + d_A(y)$$
da cui $d_A(x) - d_A(y) \le d(x, y)$. Scambiando quindi x con y si trova anche che $d_A(y) - d_A(x) \le d(x, y)$. In definitiva
$$|d_A(x) - d_A(y)| \le d(x, y),$$
i.e., d_A è lipschtziana con costante di Lipschitz non superiore a 1. Si puo' poi provare che in effetti la costante di Lipschiz è 1. □

7.g Linee di livello

Nel caso di funzioni a valori reali, sono rilevanti le sue *linee di livello*, e i corrispondenti sopra e sottolivelli. Si ha

7.26 Proposizione. *Sia (X, d) uno spazio metrico e $f : X \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora per ogni $t \in \mathbb{R}$*

(i) *gli insiemi*
$$\Big\{x \in X\ \Big|\ f(x) > t\Big\}, \qquad \Big\{x \in X\ \Big|\ f(x) < t\Big\}$$
sono aperti,
(ii) *gli insiemi*
$$\Big\{x \in X\ \Big|\ f(x) \ge t\Big\}, \qquad \Big\{x \in X\ \Big|\ f(x) \le t\Big\}$$
sono chiusi,

(iii) *le linea di livello*
$$\Big\{x \in X \,\Big|\, f(x) = t\Big\}$$
è chiusa.

Dimostrazione. (i) Sia x_0 tale che $f(x_0) > t$ e sia $\epsilon := f(x_0) - t > 0$. Essendo f continua in x_0 per ipotesi, esiste $\delta > 0$ tale che per ogni $x \in B(x_0, \delta)$ si ha $-\epsilon < f(x) - f(x_0) < \epsilon$. In particolare si ha $f(x) > t$ per ogni $x \in B(x_0, \delta)$, vale a dire
$$B(x_0, \delta) \subset \Big\{x \,\Big|\, f(x) > t\Big\}.$$
L'altra affermazione in (i) si prova allo stesso modo. (ii) segue allora da (i) per passaggio al complementare e (iii) segue da (ii) essendo
$$\Big\{x \in X \,\Big|\, f(x) = t\Big\} = \Big\{x \in X \,\Big|\, f(x) \geq t\Big\} \bigcap \Big\{x \in X \,\Big|\, f(x) \leq t\Big\}$$
intersezione di due chiusi. □

7.27 Corollario. *Sia (X, d) uno spazio metrico. Allora $\overline{F} = \{x \in X \,|\, d(x, F) = 0\}$.*

Dimostrazione. Sia $G := \{x \in X \,|\, d(x, F) = 0\}$. Evidentemente $F \subset G$ e, essendo $x \to d(x, F)$ continua, G è chiuso per la Proposizione 7.26. Segue che $\overline{F} \subset G$ essendo $\overline{F}$ il più piccolo chiuso contenente F. Proviamo che $G \subset \overline{F}$. Se $x \in G$, i.e., se $d(x, F) = 0$, esiste una successione $\{x_n\} \subset F$ tale che $d(x, n, x) \to 0$. x è allora aderente a F, i.e., $x \in \overline{F}$. □

7.h Esercizi

7.28 Esercizio. Siano (X, d_X), (Y, d_Y) due spazi metrici, $E \subset X$, $f : E \to Y$ e $x_0 \in E$. Per ogni A, definiamo l'*oscillazione di f in A* come
$$\omega_{f,A} := \sup_{x,y \in A} d_Y(f(x), f(y)).$$
Mostrare che $f : E \to Y$ è continua in x_0 se e solo se la funzione di variabile reale $\delta \to \omega_{f, B(x_0, \delta)}$, che misura l'oscillazione di f su una palla di centro δ, è continua in $\delta = 0$.

7.29 Esercizio. Mostrare che $f : (X, d) \to \mathbb{R}$ è continua se e solo se gli insiemi
$$\Big\{x \in X \mid f(x) < t\Big\} \qquad \text{e} \qquad \Big\{x \in X \mid f(x) > t\Big\}$$
sono aperti per ogni $t \in \mathbb{R}$; oppure se e solo se gli insiemi
$$\Big\{x \in X \mid f(x) \leq t\Big\} \qquad \text{e} \qquad \Big\{x \in X \mid f(x) \geq t\Big\}$$
sono chiusi in X per ogni $t \in \mathbb{R}$.

7.30 Esercizio. Se $f, g : X \to Y$ sono due funzioni continue fra spazi metrici, l'insieme $\{x \in X \,|\, f(x) \neq g(x)\}$ è aperto in X.

7.31 Esercizio. Siano (X, d_X), (Y, d_Y) spazi metrici e $f : X \to Y$ una mappa continua. Mostrare che
(i) se $y_0 \in Y$ è interno a $B \subset Y$ e se $f(x_0) = y_0$, allora x_0 è interno a $f^{-1}(B)$.
(ii) se $x_0 \in X$ è aderente ad $A \subset X$, allora $f(x_0)$ è aderente a $f(A)$,
(iii) se $x_0 \in X$ è di frontiera per $A \subset X$, allora $f(x_0)$ è di frontiera per $f(A)$,
(iv) se $x_0 \in X$ è di accumulazione per $A \subset X$ e f è anche iniettiva, allora $f(x_0)$ è di accumulazione per $f(A)$.

7.32 Esercizio. Dimostrare che

(i) l'equazione parametrica della retta in $\mathbb{R}^n$, $t \to \mathbf{a}t+\mathbf{b}$, $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$, è una funzione continua,
(ii) l'equazione parametrica dell'elica in $\mathbb{R}^3$, $t \to (\cos t, \sin t, t)$, $t \in \mathbb{R}$, è una funzione continua.

7.33 Esercizio. Determinare i domini di definizione delle seguenti funzioni di variabili reali e dire se sono continue nel loro dominio di definizione

$$\frac{xz}{1+y^2}, \qquad \frac{xy^2}{x-\log y}, \qquad \sqrt{xe^y - ye^x}.$$

7.34 Esercizio. Dire se le seguenti funzioni sono continue

$$\begin{cases} \frac{x^3y}{x^4+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}, \qquad \begin{cases} \frac{xy^3}{x^4+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{x^2 \sin y}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{x}{y-x^2} & \text{se } y - x^2 > \sqrt{|x|} \text{ e } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

7.35 Esercizio. Calcolare, se esistono, i limiti per $(x,y) \to (0,0)$ di

$$\frac{\log^2(1+xy)}{x^2+y^2}, \qquad \frac{x\sin(x^2+3y^2)}{x^2+y^2},$$
$$\frac{\sin x(1-\cos x)}{x^2+y^2}, \qquad \frac{x^2\sin^2 y}{\sin(x^2+y^2)}$$