6. Topologia degli spazi metrici, I

6.a $\mathbb{R}^n$ come spazio metrico

Se $x = (x^1, x^2, \dots, x^n)$ e $y = (y^1, y^2, \dots, y^n) \in \mathbb{R}^n$, indichiamo con $x \bullet y : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ il *prodotto scalare* di x e y

$$x \bullet y := \sum_{i=1}^n x^i y^i$$

e con

$$|x| := \sqrt{x \bullet x}$$

la *norma euclidea* o semplicemtne *norma* di $x \in \mathbb{R}^n$.

Come conseguenza della formula di Carnot

6.1 Proposizione (Diseguaglianza di Cauchy-Schwarz). *Per ogni $x, y \in \mathbb{R}^n$ si ha*

$$|\, x \bullet y \,| \le |x|\, |y|.$$

Inoltre $x \bullet y = |x|\, |y|$ se e solo se o $y = 0$, o $x = \lambda y$, $\lambda \ge 0$.

Dimostrazione. Se $y = 0$, la tesi è ovvia. Per $y \neq 0$, la funzione $t \to |x + ty|^2$ è un polinomio non negativo di secondo grado in t,

$$0 \le |x + ty|^2 = (x + ty|x + ty) = |x|^2 + 2(x|y)\, t + |y|^2 t^2;$$

perciò il suo discriminante $(x|y)^2 - |x|^2|y|^2$ è non positivo, i.e., la diseguaglianza di Cauchy–Schwarz.

Inoltre, se $(x|y) = |x|\, |y|$, allora il discriminante del polinomio $t \to |x + ty|^2$ è nullo. Perciò per qualche $t \in \mathbb{R}$ $|x + ty|^2 = 0$ e dunque $x = -ty$, Resta da provare che $-t$ è non negativo; questo segue da $-t = (x|y) = |x|\, |y| \ge 0$. □

Una conseguenza della diseguaglianza di Schwarz è che *la funzione lunghezza di un vettore $x \to |x|$ ha le proprietà di una* norma, i.e.,

(i) $|x| \in \mathbb{R}$ e $|x| \ge 0$ per ogni $x \in X$,
(ii) $|x| = 0$ se e solo se $x = 0$,
(iii) $|\lambda x| = |\lambda|\, |x|$ $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ e $\forall x \in X$,
(iv) $|x + y| \le |x| + |y|$ $\forall x, y \in X$ e, se $|x + y| = |x| + |y|$, allora o $y = 0$ o $x = \lambda y$ con $\lambda \ge 0$.

Le prime due proprietà sono ovvie. Per la terza basta calcolare con la formula di Carnot e la diseguaglianza di Cauchy–Schwarz

$$|x + y|^2 = |x|^2 + |y|^2 + 2(\, x \bullet y \,) \le |x|^2 + |y|^2 + 2\, |x|\, |y| = (|x| + |y|)^2.$$

Se $x = (x^1, x^2, \dots, x^n)$ e $y = (y^1, y^2, \dots, y^n) \in \mathbb{R}^n$, si chiama *distanza euclidea* o sempilicemente *distanza* di x e y il numero

$$d(x,y) := |x-y|$$

E' facile verificare che la distanza euclidea $d : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *ha le proprietà di una distanza*, i.e.,

(i) $d(x,y) \geq 0$, $d(x,y) \in \mathbb{R}$ $\forall x,y \in X$, e $d(x,y) = 0$ se e solo se $x = y$,
(ii) $d(x,y) = d(y,x)$ $\forall x,y \in X$,
(iii) (Proprietà triangolare) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$, $\forall\, x,y,z \in X$.

6.2 Definizione. *Si dice che una successione* $\{x_n\} \subset \mathbb{R}^n$ converge ad un punto $x \in \mathbb{R}^n$ *se* $d(x_n, x) \to 0$ *per* $n \to \infty$, *i.e., se*

$$\forall \epsilon > 0\ \exists \overline{n} \text{ tale che } |x_n - x| < \epsilon \text{ per ogni } n \geq \overline{n}.$$

Poiche'

$$|x^1|, |x^2|, \dots, |x^n| \leq |x| = \Big(\sum_{i=1}^n (x^i)^2\Big)^{1/2}$$

$\{x_k\}_k \subset \mathbb{R}^n$, $x_k = (x_k^1, \dots, x_k^n)$, converge a $x = (x^1, x^2, \dots, x^n)$ in $\mathbb{R}^n$ se e solo se le succssioni delle coordinate $\{x_k^i\}_k$ convergono a x^i in $\mathbb{R}$ per ogni $i = 1, \dots, n$.

6.b Spazi metrici

E' difficile inoltrarsi nelle conoscenza, anche di base, delle funzioni di piu' variabili senza la conoscenza di un minimo di struttura e della generalizzazione del concetto di limite. Qui estendiamo le nozioni di limite di funzione, di funzione continua e di successione convergente e il linguaggio relativo all'ambito degli *spazi metrici*.

6.3 Definizione. *Sia X un insieme i cui elementi saranno chiamati* punti. *Una* distanza *o* metrica *su X è una funzione $d : X \times X \to \mathbb{R}$ che ad ogni coppia (x,y) di punti di X associa un numero reale $d(x,y)$ con le seguenti proprietà*

(i) $d(x,y) \geq 0$, $d(x,y) \in \mathbb{R}$ $\forall x,y \in X$, *e* $d(x,y) = 0$ *se e solo se* $x = y$,
(ii) $d(x,y) = d(y,x)$ $\forall x,y \in X$,
(iii) (Proprietà triangolare) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$, $\forall\, x,y,z \in X$.

Uno spazio metrico (X,d) *è un insieme X su cui è assegnata una distanza d.*

6.4 Definizione. *Sia (X,d) uno spazio metrico. Si dice che una successione* $\{x_n\} \subset X$ converge ad un punto $x \in X$ *se* $d(x_n, x) \to 0$ *per* $n \to \infty$, *i.e., se*

$$\forall \epsilon > 0\ \exists \overline{n} \text{ tale che } d(x_n, x) < \epsilon \text{ per ogni } n \geq \overline{n}.$$

Se lo spazio metrico (X, d) è chiaro dal contesto, si scrive semplicemente $x_n \to x$ per $n \to \infty$ anziche $d(x_n, x) \to 0$. Si oservi che è la scelta della distanza d che permette di ricondurre la convergenza su X alla convergenza a zero di successioni di numeri reali non negativi.

Ad esempio, la funzione $d(x, y) := |x - y|$, $x, y \in \mathbb{R}$, è una distanza su $\mathbb{R}$ detta la *distanza euclidea* e la convergenza in $(\mathbb{R}, d)$ è la usuale convergenza delle successioni di numeri reali. Infine, come abbiamo visto, $\mathbb{R}$ è uno spazio metrico con la distanza euclidea.

6.5 Esercizio. Se A è un arbitrario sottoinsieme di uno spazio metrico X con distanza d. Mostrare che A è esso stesso uno spazio metrico con la stessa distanza. Ad esempio, se A è la sfera di $\mathbb{R}^3$,

$$A := \Big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,\Big|\, x^2 + y^2 + z^2 = 1\Big\},$$

allora A è uno spazio metrico con la distanza di $\mathbb{R}^3$. La distanza tra due punti della sfera è misurata calcolando la lunghezza del segmento (in $\mathbb{R}^3$) che li congiunge.

La nozione di limite di successione negli spazi metrici ha le proprietà caratterische delle successioni di numeri reali. Si ha

6.6 Proposizione. *Sia $\{x_n\}$ una successione di uno spazio metrico (X, d). Si ha*

(i) (Unicità) *$\{x_n\}$ ha al piu' un unico limite,*
(ii) (Limitatezza) *$\{x_n\}$ è* limitata, *i.e., esiste $x_0 \in X$ e $M \in \mathbb{R}$ tale che $d(x_n, x_0) \le M$ $\forall n$.*
(iii) (Permanenza del segno) *$x_n \to x$ in X se e solo se per ogni $r > 0$ esiste $\overline{n}$ tale che $d(x_n, x) < r$ $\forall n \ge \overline{n}$.*
(iv) *Se $x_n \to x$ in X, allora ogni sottosuccessione $\{x_{k_n}\}$ estratta da $\{x_n\}$ converge ad x.*

6.c Palle in uno spazio metrico

6.7 Definizione. *Per ogni x_0 di uno spazio metrico (X, d) e ogni $r > 0$, la* palla *(aperta) di centro x_0 e raggio r è definita da*

$$B(x_0, \rho) := \Big\{x \in X \,\Big|\, d(x, x_0) < \rho\Big\}.$$

Si noti la diseguaglianza stretta nella definizione di $B(x_0, r)$. Nel caso in cui lo spazio metrico è $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ con la distanza euclidea, la palla $B(x_0, r)$ è rispettivamente l'intervallo $]x_0 - r, x_0 + r[$, il disco del piano di centro x_0 e raggio r, o la palla piena di centro x_0 e raggio r.

Anche se il linguaggio è suggestivo, le palle di uno spazio metrico generico non sono in generale né rotonde, né convesse; tuttavia la famiglia di tutte le palle aperte di X ha alcune proprietà dell'insieme dei dischi di $\mathbb{R}^2$, come conseguenza delle proprietà della distanza, in particolare, della diseguaglianza triangolare. Ad esempio:

(i) $\forall x_0 \in X$ e $0 < r < s$ si ha $x_0 \in B(x_0, r) \subset B(x_0, s)$,
(ii) $\forall x_0 \in X$ si ha $\cup_{r>0} B(x_0, r) = X$,
(iii) $\forall x_0 \in X$ si ha $\cap_{r>0} B(x_0, r) = \{x_0\}$,

(iv) $\forall x_0 \in X$ e $\forall z \in B(x_0, r)$, la palla di centro z e raggio $\rho := r - d(x_0, z) > 0$ è contenuta in $B(x_0, r)$.
(v) per ogni coppia di palle $B(x, r)$ e $B(y, s)$ con intersezione non vuota e $\forall z \in B(x, r) \cap B(y, s)$ esiste $t > 0$ tale che $B(z, t) \subset B(x, r) \cap B(y, s)$,
(vi) per ogni $x, y \in X$ con $x \neq y$, sia $r := d(x, y)/2$. Le palle $B(x, r)$ e $B(y, r)$ sono disgiunte.

Si osservi che $\{x_n\} \subset X$ converge a x in (X, d) se e solo se

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists \; \overline{n} \text{ tale che } x_n \in B(x, \epsilon) \; \forall n \geq \overline{n}.$$

6.8 Esercizio (Distanza tra codici). Sia X un insieme che consideriamo come un insieme di "simboli" e $X^n := X \times X \times \cdots \times X$ lo spazio delle liste ordinate di n simboli, i.e., delle "parole" formate da n simboli. Date due parole $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ e $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in X^n$, sia

$$d(x, y) := \#\Big\{i \,\Big|\, x_i \neq y_i\Big\}$$

il numero di bit differenti. Si provi che $d(x, y)$ definisce una distanza in X^n. Descrivere esplicitamente le palle in X^n con questa distanza. [*Sugg.* Scrivere $d(x, y)$ come $d_0(x, y) = \sum_{i=1}^n d(x_i, y_i)$ dove $d_0 : X \times X \to \mathbb{R}$ è la *distanza discreta* in X,

$$d(r, t) = \begin{cases} 1 & \text{se } r = s, \\ 0 & \text{se } z \neq s. \end{cases}]$$

6.d Punti aderenti, punti di frontiera

Sia (X, d) uno spazio metrico e $A \subset X$. Dato $x \in X$, si dice che x è *aderente ad* A o un *punto limite di* A se esiste una successione $\{x_n\} \subset A$ tale che $x_n \to x$ ($A = \emptyset$ non ha punti aderenti). L'insieme dei punti aderenti ad A si chiama la *chiusura di* A e si indica con $\overline{A}$,

$$\overline{A} := \{x \in X \,\Big|\, \exists \{x_n\} \subset A \text{ t.c. } x_n \to x\}.$$

Evidentemente $A \subset \overline{A}$ e

$$\overline{A} := \Big\{x \in X \,\Big|\, B(x, r) \cap A \neq \emptyset \; \forall r > 0\Big\}.$$

Se $A \subset X$, indichiamo con $A^c := X \setminus A$ il complementare di A in X. I punti che sono contemporaneamente aderenti ad A e a A^c costituiscono la *frontiera di* A, indicata con ∂A,

$$\partial A := \overline{A} \cap \overline{A^c}.$$

Infine i punti che *non* sono aderenti a A^c si dicono *punti interni ad* A. L'insieme dei punti interni, detto la *parte interna di* A, è indicato $\operatorname{int} A$,

$$\operatorname{int} A := \Big(\overline{A^c}\Big)^c.$$

e si ha

$$\operatorname{int} A := \Big\{x \in X \,\Big|\, \exists \, r > 0 \text{ tale che } B(x, r) \subset A\Big\}. \tag{6.1}$$

Infatti, $x \in \operatorname{int} A$ se e solo se x non è aderente ad A^c, i.e., se e solo se esiste $r > 0$ tale che $B(x, r) \cap A^c = \emptyset$, i.e., se e solo se esiste $r > 0$ tale che $B(x, r) \subset A$.

6.e Aperti

Sia $A \subset X$ un sottoinsieme dello spazio metrico (X, d). Un altro modo di arrivare alle nozione di parte interna è a partire dalle palle di (X, d).

6.9 Definizione. *Sia $B \subset X$ un sottoinsieme dello spazio metrico (X, d) B si dice* aperto *in X se $B = \emptyset$ oppure se $\forall x \in B$ esiste $r > 0$ tale che $B(x, r) \subset B$.*

Evidentemente le palle $B(x, r)$ di X sono aperte, e, utilizzando le proprietà della distanza d, è facile covincersi che

6.10 Proposizione. (i) *$A \neq \emptyset$ è aperto se e solo se A è unione di palle,*
(ii) *$\emptyset$ e X sono aperti,*
(iii) *se $\{A_\alpha\}$ è una famiglia di aperti, allora $\cup_\alpha A_\alpha$ è aperto,*
(iv) *se $A_1, A_2, \dots, A_n$ sono un numero finito di aperti, allora $\cap_{i=1}^n A_i$ è aperto.*

Dimostrazione. (i) Sia A unione di palle. Per ogni $x \in A$ esiste una palla $B(y, r) \subset A$ che contiene x. Se si pone $\rho := r - d(x, y)$, si ha $\rho > 0$ e $B(x, \rho) \subset A$. A è dunque aperto per l'arbitrarietà di x.

L'implicazione opposta è ovvia.

Le (ii), (iii) e (iv) seguono facilmente da (i) □

Il seguente teorema da' una caratterizzazione della parte interna di A in termini di aperti.

6.11 Proposizione. *Sia (X, d) uno spazio metrico e $A \subset X$.*

(i) $\operatorname{int} A$ *è aperto,*
(ii) *$A \subset X$ è aperto se e solo se $A = \operatorname{int} A$,*
(iii) *si ha*
$$\operatorname{int} A := \bigcup \Big\{ B \,\Big|\, B \text{ aperto}\ ,\ B \subset A \Big\},$$
a parole, $\operatorname{int} A$ *è il piu' grande aperto di X contentuto in A.*

Dimostrazione. (i) è la (6.1).

(ii) Se $A = \operatorname{int} A$, allora A è aperto per (i). Se viceversa A è aperto, basta dimostrare che $A \subset \operatorname{int} A$. Se infatti $x \in A$, esiste una palla $B(x, r) \subset A$, dunque nessuna successione a valori in A^c puo' convergere ad x. Percio' x non è aderente a A^c, i.e., $x \in \operatorname{int} A$.

(iii) Sia
$$A' := \bigcup \Big\{ B \,\Big|\, B \text{ aperto}\ ,\ B \subset A \Big\}.$$
Poiche' l'unione diuna famiglia di aperti è aperta, A' è il piu' grande aperto contenuto in A. Proviamo che $A' = \operatorname{int} A$. Poiche' $\operatorname{int} A$ è aperto e contenuto in A si ha $\operatorname{int} A \subset A'$. Inoltre, se B è aperto e $B \subset A$, da (ii) segue che $B = \operatorname{int} B \subset \operatorname{int} A$, Per l'arbitrarietà di B, segue che $A' \subset \operatorname{int} A$. □

6.f Chiusi

6.12 Definizione. *Sia (X,d) uno spazio metrico. $F \subset X$ si dice* chiuso *se F^c è aperto.*

Con le formule di de Morgan,

$$\Big(\cap_\alpha A_\alpha\Big)^c = \bigcup A_\alpha^c, \qquad \Big(\cup_\alpha A_\alpha\Big)^c = \bigcap A_\alpha^c,$$

non è difficile convincersi che le Proposizioni 6.10 e 6.11 si rileggono come

6.13 Proposizione. *Se X è uno spazio metrico allora*

(i) *$\emptyset$ e X sono chiusi,*
(ii) *l'intersezione di una qualunque famiglia di chiusi è chiusa,*
(iii) *l'unione finita di chiusi è chiusa.*

6.14 Proposizione. *Sia (X,d) uno spazio metrico, e $F \subset X$.*

- *$\overline{F}$ è chiuso,*
- *$F \subset X$ è chiuso se e solo se $F = \overline{F}$,*
- *si ha*
$$\overline{F} = \bigcap \Big\{ G \subset X \,\Big|\, G \text{ è chiuso, } G \supset F \Big\},$$
a parole, $\overline{F}$ è il piu' piccolo chiuso contenente F.

L'uguaglianza $F = \overline{F}$ si rilegge dicendo che F contiene tutti i suoi punti limite. Percio'

6.15 Proposizione. *Sia (X,d) uno spazio metrico, e $F \subset X$. F è chiuso se e solo se per ogni successione $\{x_n\} \subset F$ convergente a $x \in X$ si ha $x \in F$.*

6.g Punti isolati e punti di accumulazione

I punti aderenti si dividono in *punti di accumulazione* e *punti isolati.*

6.16 Definizione. *Sia (X,d) uno spazio metrico e $A \subset X$. Dato $x \in X$, si dice che x è un* punto di accumulazione *per A se esiste una successione $\{x_n\}$ a valori in $A \setminus \{x_0\}$ tale che $x_n \to x$.*

L'insieme dei punti di accumulazione di A si indica con $\mathcal{D}A$ e si chiama il derivato *di A.*

6.17 Proposizione. *Sia (X,d) uno spazio metrico e $A \subset X$. Sono fatti equivalenti*

- *$x_0 \in X$ è un punto di accumulazione per A,*
- *$x_0 \in \overline{A \setminus \{x_0\}}$,*
- *$A \cap B(x_0,r) \setminus \{x_0\} \neq \emptyset \ \forall r > 0$.*

L'insieme $\mathcal{I}(A) := \overline{A} \setminus \mathcal{D}(A) \subset \overline{A}$ si chiama l'insieme dei *punti isolati* di A. Il nome di *punto isolato* per gli elementi di $\mathcal{I}(A)$ è motivato dalla

6.18 Proposizione. *Siano $A \subset (X,d)$ e $x \in \mathcal{I}(A)$. Se $\{x_n\} \subset A$ converge ad x, allora esiste n_0 tale che $x_n = x$ $\forall n \geq n_0$. In particolare $\mathcal{I}(A) \subset A$.*

Dimostrazione. Infatti, se $\{x_n\}$ non fosse definitivamente costante, esisterebbe una sottosuccessione $\{x_{k_n}\}$ di $\{x_n\}$ tale che $x_{k_n} \neq x$ $\forall n$: un assurdo perche' $x_{k_n} \to x$ e $x \notin \mathcal{D}A$. □

6.19 Esercizio. Dimostrare che se $A = \overline{A}$ allora A non ha punti di accumulazione se e solo se A è costituito da soli punti isolati, $A = \mathcal{I}(A)$.

Completezza

6.20 Definizione. *Sia (X,d) uno spazio metrico. Una successione $\{x_n\}$ è una* successione di Cauchy *se*

$$\forall \epsilon\ \exists \overline{n} \ \text{ tale che } d(x_n, x_m) < \epsilon \quad \forall n, m \geq \overline{n}.$$

6.21 Proposizione. *Ogni successione di Cauchy è limitata.*

Dimostrazione. Sia $\{x_n\}$ una successione di Cauchy. Dalla definizione segue, scegliendo $\epsilon = 1$, l'esistenza di un indice ν tale che $d(x_n, x_\nu) < 1 \quad \forall n \geq \nu$. Quindi per

$$M := \max(d(x_1, x_0), d(x_2, x_0), \dots, d(x_\nu, x_0) + 1)$$

si ha $d(x_0, x_n) \leq M$ $\forall n$. □

Per concretizzare la Definizione 6.20, conviene introdurre per ogni successione limitata in (X,d) e ogni intero n la "coda" n-esima $\{x_k\}_{k \geq n}$ di $\{x_n\}$, i.e., la sottosuccesione di $\{x_n\}$ ottenuta cancellando i primi n elementi di $\{x_n\}$, e il suo *diametro*

$$\delta_n := \sup_{h,k \geq n} d(x_h, x_k) \in \mathbb{R}.$$

Ovviamente $\{\delta_n\}$ è decrescente e $\{x_n\}$ *è di Cauchy in (X,d) se e solo se $\delta_n \to 0$.*

6.22 Proposizione. *Ogni successione convergente è una successione di Cauchy.*

Dimostrazione. Infatti, se $\{x_n\} \subset X$ e $d(x_n, x) \to 0$, allora per ogni $\epsilon > 0$ esiste $\overline{n}$ tale che per $n, m > \overline{n}$ si ha

$$d(x_n, x) < \frac{\epsilon}{2}, \qquad d(x_m, x) < \frac{\epsilon}{2}$$

e per la diseguaglianza triangolare $d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x) + d(x, x_m) < \epsilon$. □

Il viceversa della Proposizione 6.22, i.e., tutte le successioni di Cauchy sono convergenti, non è sempre vero. Si pensi ad una successione $\{x_n\} \subset \mathbb{Q}$ di approssimazioni razionali di $\sqrt{2}$. $\{x_n\}$ è convergente in $\mathbb{R}$, quindi è di Cauchy in $\mathbb{R}$ e a fortiori una successione di Cauchy in $\mathbb{Q}$. Tuttavia $\{x_n\}$ non converge in $\mathbb{Q}$.

Il fatto che tutte le successioni di Cauchy siano convergenti è una importante proprietà di uno spazio metrico: spesso si hanno processi infiniti che portano alla costruzione di una successione di Cauchy $\{x_n\}$. Se esiste un oggetto x a cui la successione costruita converge, è possibile parlare dell'oggetto limite x senza più riferimenti al processo di costruzione. Una bella semplificazione, si pensi ad esempio alla definizione del "numero" $\sqrt{2}$.

6.23 Definizione. *Si dice che uno spazio metrico (X, d) è* completo *se e solo se ogni successione di Cauchy in X è convergente.*

In uno spazio metrico completo vale il cosidetto *principio degli intervalli incapsulati* di Georg Cantor (1845–1918).

6.24 Proposizione. *Sia X uno spazio metrico completo e sia $\{E_k\}$ una successione di sottoinsiemi non vuoti di X con $E_{k+1} \subset E_k$ $\forall k$ e con $\operatorname{diam} E_k \to 0$ per $k \to \infty$. Allora*

(i) *esiste uno ed un solo punto $\overline{x} \in X$ tale che in ogni palla $B(\overline{x}, r)$ è incluso uno, e quindi infiniti, degli E_k,*
(ii) *il punto $\overline{x}$ appartiene all'intersezione degli E_k se gli E_k sono chiusi.*

In particolare si ha

6.25 Corollario. *In uno spazio metrico completo una successione di palle chiuse una contenuta nella precedente e con raggi tendenti a zero in modo monotono possiede un (unico) punto comune.*

6.26 Esercizio. Dimostrare la Proposizione 6.24 e conseguentemente il Corollario 6.25. La condizione sui diametri è essenziale: per la successione di sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ dati da $E_k := [k, +\infty[\subset \mathbb{R}$ si ha $E_{k+1} \subset E_k$ e $\cap_k E_k = \emptyset$.

6.h Completezza di $\mathbb{R}^n$

6.27 Teorema (Criterio di Cauchy). *$\mathbb{R}$ con la distanza euclidea $d(x, y) := |x - y|$ è completo.*

Dimostrazione. Sia $\{x_n\}$ una successione di Cauchy. Definiamo per $n = 1, 2, 3, \dots$

$$l_n := \inf_{k \geq n} \{x_k\}, \qquad L_n := \sup_{k \geq n} \{x_k\}.$$

Ovviamente $\{l_n\}$ è una successione crescente, $\{L_n\}$ è una successione decrescente, $l_n \leq x_n \leq L_n$ $\forall n$,

$$l_n \to \sup_k l_k, \qquad L_n \to \inf_k L_k \qquad \text{per } n \to \infty,$$

e

$$\inf_k L_k - \sup_k l_k \leq L_n - l_n := \delta_n \qquad \forall n.$$

Essendo $\{x_n\}$ una successione di Cauchy, $\delta_n \to 0$ e quindi $\sup_k l_k = \inf_k L_k$. Se ora

$$\overline{x} := \sup_k l_k = \inf_k L_k \in \mathbb{R},$$

per ogni $\epsilon > 0$ si ha per n abbastanza grande che

$$\overline{x} - \epsilon \leq l_n \leq x_n \leq L_n \leq \overline{x} + \epsilon.$$

In altre parole $x_n \to \overline{x}$. □

6.28 Teorema. *$\mathbb{R}^2$ e più in generale $\mathbb{R}^n$ munito della distanza euclidea è uno spazio metrico completo.*

Dimostrazione. Facciamo la dimostrazione per $n = 2$. Sia $P = (x, y) \in \mathbb{R}^2$. Valgono le ovvie diseguaglianze
$$|x|,\ |y| \leq |P| = \sqrt{x^2 + y^2} \leq |x| + |y|.$$
Segue allora che $\{P_n\} \subset \mathbb{R}^2$, $P_n = (x_n, y_n)$ è una successione di Cauchy in $\mathbb{R}^2$ (rispettivamente converge a $P = (x, y)$ in $\mathbb{R}^2$) se e solo se $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ sono successioni di Cauchy in $\mathbb{R}$ (rispettivamente convergono a x e y in $\mathbb{R}$). Se dunque $\{P_n\}$ è di Cauchy e $P_n = (x_n, y_n)$, allora $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ sono successioni di Cachy in $\mathbb{R}$, esistono allora $x, y \in \mathbb{R}$ tali che $x_n \to x$ e $y_n \to y$. Ma allora $P_n \to P = (x, y)$. □

6.i Massimo e minimo limite

Osserviamo che qualunque sia la successione $\{x_n\} \subset \mathbb{R}$, le successioni $\{l_n\}$ $\{L_n\}$ date da
$$l_n := \inf_{k \geq n} \{x_k\}, \qquad \text{e} \qquad L_n := \sup_{k \geq n} \{x_k\}$$
sono rispettivamente crescente e decrescente, quindi hanno limite in $\overline{\mathbb{R}}$:
$$l_n \to \sup_k l_k, \qquad L_n \to \inf_k L_k.$$
Si pone
$$\liminf_{n\to\infty} x_n := \lim_{n\to\infty} l_n = \lim_{n\to\infty} \inf_{k\geq n} x_k, \qquad \limsup_{n\to\infty} x_n := \lim_{n\to\infty} L_n = \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geq n} x_k$$
e ci si riferisce a questi numeri reali estesi rispettivamente come al *minimo limite* e al *massimo limite* della successione $\{x_n\}$. Nel seguito vedremo meglio la rilevanza di queste definizioni, qui ci si accontenta di osservare come, a differenza del limite,

6.29 Proposizione. *Ogni successione di numeri reali ha massimo e minimo limite.*

È evidente dalle definizioni che
$$\liminf_{n\to\infty} x_n \leq \limsup_{n\to\infty} x_n, \qquad \text{e} \qquad \liminf_{n\to\infty} x_n = -\limsup_{n\to\infty}(-x_n).$$
Inoltre ripercorrendo la dimostrazione del criterio di Cauchy, si vede che

6.30 Proposizione. *Sia $\{x_n\}$ una successione di numeri reali. $x_n \to l \in \overline{\mathbb{R}}$ se e solo se*
$$\liminf_n x_n = \limsup_n x_n = l.$$

Come conseguenza dell'esistenza del massimo limite per successioni si ha

6.31 Teorema. *Ogni successione limitata di numeri reali ha una sottosuccessione convergente in $\mathbb{R}$.*

Dimostrazione. Sia $\{x_n\}$ una successione limitata e $L := \limsup_n x_n \in \mathbb{R}$ il suo massimo limite.
(i) Proviamo anzitutto che per ogni $\epsilon > 0$ si ha $L - x_n < \epsilon$ per infiniti indici n. Infatti dalla definizione di limite esiste $\overline{n}$ tale che $L - L_n < \epsilon/2$ per ogni $n \geq \overline{n}$ e per definizione di estremo superiore, esiste almeno un elemento x_{k_n} della successione con $k_n \geq n$ tale che $L_n - x_{k_n} < \epsilon/2$. Si conclude quindi che che $L - x_{k_n} < \epsilon$ per ogni $n \geq \overline{n}$.

(ii) Costruiamo ora la sottosuccessione voluta. Fissiamo $\epsilon = 1$, da (i) si trova un elemento x_{k_1} della successione tale che $L - x_{k_1} < 1$. Fissiamo ora $\epsilon = 1/2$, da (i) si trova un elemento della successione *con indice maggiore di* k_1 tale che $L - x_{k_2} < 1/2$. Per induzione, se $x_{k_1}, x_{k_2}, x_{k_j}$ sono stati selezionati, da (i) si trova un elemento $x_{k_{j+1}}$ di $\{x_n\}$ con $k_{j+1} > k_j$ tale che
$$L - x_{k_j} < 1/j.$$
$\{x_{k_j}\}$ è una sottosuccessione e per il criterio del confronto $x_{k_j} \to L$. □

Procedendo infine come nella dimostrazione del Teorema 6.31 si provano le seguenti caratterizzazioni del massimo e minimo limite.

6.32 Proposizione. *Sia $\{x_n\}$ una successione di numeri reali. $L \in \mathbb{R}$ è il massimo limite di $\{x_n\}$ se e solo se*
(i) $\forall \epsilon > 0\ \exists\ \overline{n}$ *tale che per* $n \geq \overline{n}$ *si ha* $x_n < L + \epsilon$,
(ii) *esiste una sottosuccessione* $\{x_{k_n}\}$ *di* x_n *convergente a* L.

6.33 Proposizione. *Sia $\{x_n\}$ una successione di numeri reali. $L \in \mathbb{R}$ è il minimo limite di $\{x_n\}$ se e solo se*
(i) $\forall \epsilon > 0\ \exists\ \overline{n}$ *tale che per* $n \geq \overline{n}$ *si ha* $x_n > L - \epsilon$,
(ii) *esiste una sottosuccessione* $\{x_{k_n}\}$ *di* x_n *convergente a* L.

6.j Esercizi

6.34 Esercizio. Mostrare che in $\mathbb{R}$ gli intervalli $[a, b]$, $[a, +\infty[$ e $[-a, +\infty[$ sono chiusi, mentre $[0, 1[$ non è nè chiuso nè aperto.

6.35 Esercizio. Mostrare che l'insieme $\{x \in \mathbb{R} \mid x = 1/n$ per qualche intero $n \geq 1\}$ non è nè chiuso nè aperto.

6.36 Esercizio. Mostrare che ogni insieme finito (cioè contenente un numero finito di punti) di uno spazio metrico è chiuso.

6.37 Esercizio. Mostrare che $\partial B(x_0, r) = \{x \in X \,|\, d(x, x_0) = r\}$.

6.38 Esercizio. Se F è un sottoinsieme chiuso di uno spazio metrico completo (X, d), allora (F, d) è completo.

6.39 Esercizio. Mostrare che
(i) se $A :=]a, b[$, si ha $\operatorname{int} A = A$, $\overline{A} = [a, b]$ e $\partial A = \{a, b\}$,
(ii) se $A := [a, b[$, si ha $\operatorname{int} A =]a, b[$, $\overline{A} = [a, b]$ e $\partial A = \{a, b\}$,
(iii) se $A := [a, +\infty[$, si ha $\operatorname{int} A =]a, +\infty[$, $\overline{A} = A$ e $\partial A = \{a\}$,
(iv) se $A := \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, si ha $\operatorname{int} A = \emptyset$, $\overline{A} = \mathbb{R}$ e $\partial A = \mathbb{R}$,
(v) se $A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y\}$, si ha $\operatorname{int} A = \emptyset$, $\overline{A} = A$ e $\partial A = A$,
(vi) Se $A := \mathbb{N} \subset \mathbb{R}$, si ha $\operatorname{int} A = \emptyset$, $\overline{A} = A$ e $\partial A = A$.

Mostrare ancora che

$$\cup_i \overline{A_i} \subset \overline{\cup_i A_i}, \qquad \overline{\cap_i A_i} \subset \cap_i \overline{A_i}.$$

6.40 Esercizio. Provare la seguente

6.41 Proposizione. *Ogni aperto $A \subset \mathbb{R}^n$ è unione di cubi n-dimensionali chiusi con parti interne disgiunte.*

6.42 Esercizio. (i) Mostare che $x_0 \in X$ è interno ad A se e solo se esiste un aperto $U \in \tau$ tale che $x_0 \in U \subset A$.
(ii) Riscrivere utilizzando i soli insiemi aperti che x_0 è esterno a, aderente a o di frontiera per A.

6.43 Esercizio. Si provi che A è aperto se e solo se ogni successione $\{x_n\}$ convergente ad un punto di A è definitivamente contenuta in A, i.e., esiste ν tale che per ogni $n \geq \nu$ $x_n \in A$.

6.44 Esercizio. Un insieme A si dice *discreto* se non ha punti di accumulazione, $\mathcal{D}(A) = \emptyset$. Un insieme è *perfetto* se non ha punti isolati $\mathcal{I}(A) = \emptyset$. Ovviamente i punti di un insieme discreto sono isolati, perché $A \subset \overline{A} = \mathcal{I}(A) \subset A$.

Provare che se $A = \mathcal{I}(A)$, si ha $\mathcal{D}(A) = \partial A$. Osservare che un insieme di punti isolati non è necessariamente discreto. Fare un esempio. Tuttavia un insieme chiuso di punti isolati è discreto.

6.45 Esercizio. Poniamo

Definizione. *Un insieme $E \subset X$ si dice* denso *in X se $\overline{E} = X$.*

Mostrare che sono fatti equivalenti

(i) D è denso in X,
(ii) ogni aperto U interseca D,
(iii) il complementare di D non ha punti interni,
(iv) ogni palla aperta $B(x, r)$ di X interseca D.

6.46 Esercizio. $\mathbb{Q}$ è denso in $\mathbb{R}$, cioè $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$, $\partial\mathbb{Q} = \mathbb{R}$, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ è denso in $\mathbb{R}$. I punti di $\mathbb{R}^n$ a coordinate razionali sono densi in $\mathbb{R}^n$.

6.47 Esercizio. $D \subset X$ è denso in X se e solo se per ogni $x \in X$ esiste una successione a valori in D convergente a x.

6.48 Esercizio. Si ha $\operatorname{diam} \overline{A} = \operatorname{diam} A$, ma $\operatorname{diam} \operatorname{int} A \leq \operatorname{diam} A$. Fare degli esempi.

6.49 Esercizio. Sia $E \subset \mathbb{R}$ limitato superiormente, allora $\sup E \in \overline{E}$; se $\sup E \notin E$, allora $\sup E$ è un punto di accumulazione di E; se E è limitato e chiuso allora esistono $\max E$ e $\min E$.

6.50 Esercizio. Provare che $\partial \operatorname{int} A \subset \partial A$. Mostrare con un esempio che effettivamente puo' accadere che $\partial \operatorname{int} A \neq \partial A$.

6.51 Esercizio. A volte si dice che A è un *aperto regolare* se $A = \operatorname{int} \overline{A}$ e C è un *chiuso regolare* se $C = \overline{\operatorname{int} C}$. Fare esempi di aperti e chiusi regolari e non, in $\mathbb{R}^2$ ed $\mathbb{R}^3$.
Mostrare che

(i) La parte interna di un chiuso è un chiuso regolare; la chiusura di un aperto è un chiuso regolare.
(ii) Il complementare di un aperto (chiuso) regolare è un chiuso (aperto) regolare.
(iii) Se A, B sono aperti regolari, allora $A \cap B$ è un aperto regolare. Se C, D sono chiusi regolari, allora $C \cup D$ è un chiuso regolare.

6.52 Esercizio. Mostrare che da ogni successione si può estrarre una successione monotona.

6.53 Esercizio. Sia $A \subset \mathbb{R}$ non vuoto e sia $\sup A \in \overline{\mathbb{R}}$ il suo estremo superiore. Provare che

Proposizione. *Esiste una successione crescente $\{x_n\}$ di punti di A con limite* $\sup A$. *Se A non ha massimo allora si può scegliere $\{x_n\}$ in modo strettamente crescente.*

6.54 Esercizio. Dimostrare la

Proposizione. *Ogni numero reale è il limite monotono di una successione di razionali.*

6.55 Esercizio. Provare che

Proposizione. *Sia $\{x_n\}$ una successione.*

(i) *$+\infty$ è il massimo limite di x_n se e solo se esiste una sottosuccessione di x_n divergente a $+\infty$.*

(ii) $-\infty$ è *il massimo limite di* x_n *se e solo se* $\{x_n\}$ *diverge a* $-\infty$.
(iii) $+\infty$ è *il minimo limite di* x_n *se e solo* $\{x_n\}$ *diverge a* $+\infty$
(iv) $-\infty$ è *il minimo limite di* x_n *se e solo se* $\{x_n\}$ *ha una sottosuccessione divergente a* $-\infty$.

6.56 Esercizio. Calcolare lim sup e lim inf per $n \to \infty$ delle successioni $\{a_n\}$ date da

$$a_n := \sqrt[n]{|n-(-2)^{-n}|}, \qquad a_n := \Big(1+\frac{(-1)^n}{n}\Big)^n,$$

$$a_n := \begin{cases} \sqrt[n]{n^2} & n \text{ pari} \\ \frac{n-2}{2n-9} & n \text{ dispari}, \end{cases} \qquad a_n := \begin{cases} \frac{\sqrt{n}-1}{2\sqrt{n}+3} & n \text{ dispari} \\ (-1)^{n/2} & n \text{ pari}, \end{cases}$$

$a_n :=$ distanza tra n e il più vicino quadrato.

6.57 Esercizio. Mostrare che $\limsup_{n\to\infty} x_n$ è l'estremo superiore dei *valori limiti* di $\{x_n\}$, i.e. dell'insieme dei limiti delle sottosuccessioni di $\{x_n\}$ che hanno limite.