8. Topologia degli spazi metrici, II

Compattezza

Cominciamo con un esempio

Sia E un sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$. Esisterà in E un punto x_0 che abbia massima distanza dall'origine? Ovviamente E dovrà essere limitato, $\sup_{x\in E} d(0,x) < +\infty$, inoltre ci si convince facilmente che se E non è chiuso, il nostro problema può avere una risposta negativa (ad esempio $E := B(0,1)$). Ma come provare l'esistenza? Sappiamo che è sempre possibile trovare una successione massimizzante, i.e., una successione x_n a valori in E e tale che

$$d(0,x_n) \longrightarrow \sup_{x\in E} d(0,x).$$

Se almeno una sottosuccessione x_{k_n} di x_n fosse convergente ad un punto $x_0 \in E$, allora dalla continuità della funzione distanza seguirebbe che $d(0,x_{k_n}) \to d(0,x_0)$ e quindi

$$d(0,x_0) = \sup_{x\in E} d(0,x).$$

8.a Compattezza per successioni

8.1 Definizione. *Sia (X,d) uno spazio metrico. Un sottoinsieme $K \subset X$ si dice* sequenzialmente compatto *se da ogni successione a valori in K si può estrarre una sottosuccessione convergente ad un punto di K.*

Condizioni necessarie per la sequenziale compattezza di uno spazio metrico o di un suo sottoinsieme sono dati dalla seguente

8.2 Proposizione. *Si ha*

(i) *Ogni spazio metrico (X,d) sequenzialmente compatto è completo.*
(ii) *Un sottoinsieme sequenzialmente compatto K di uno spazio metrico è chiuso e limitato.*

Dimostrazione. (i) Sia $\{x_n\}$ una successione di Cauchy di X. Poiché X è sequenzialmente compatto si può estrarre da $\{x_n\}$ una sottosuccessione $\{x_{k_n}\}$ convergente ed un punto x_0 di X. Dunque fissato $\epsilon > 0$ esiste $\overline{n}$ tale che $d(x_n,x_m) < \epsilon\ \forall n,m \geq \overline{n}$ e esiste p con $k_p > \overline{n}$ tale che $d(x_{k_p},x_0) < \epsilon$. Percio'

$$d(x_n,x_0) \leq d(x_n,x_{k_p}) + d(x_{k_p},x_0) \leq \epsilon + \epsilon = 2\,\epsilon$$

per ogni $n \geq \overline{n}$.

(ii) Ogni punto aderente x_0 a K ha una successione a valori in K convergente a x_0. Dall'ipotesi segue allora che $x_0 \in K$. Inoltre, se K non fosse limitato si potrebbe trovare una successione $\{x_n\}$ a valori in K tale che $d(x_i,x_j) \geq 1\ \forall\ i \neq j$; $\{x_n\}$ non ha quindi sottosuccessioni convergenti: assurdo. $\square$

8.b Compatti in $\mathbb{R}^n$

In generale non tutti gli insiemi limitati e chiusi di uno spazio metrico completo sono sequenzialmente compatti. Si ha però

8.3 Teorema. *Gli insiemi (sequenzialmente) compatti di* $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, *sono tutti e soli gli insiemi limitati e chiusi.*

Il Teorema 8.3 è una semplice conseguenza del seguente

8.4 Teorema (Bolzano-Weierstrass). *Ogni insieme limitato ed infinito di* $\mathbb{R}^n$ *ha almeno un punto di accumulazione.*

Dimostrazione. Sia E un insieme limitato ed infinito in $\mathbb{R}^n$. Essendo E limitato esistirà un cubo C_0 di lato L che lo contiene

$$E \subset C_0 := [a_1^{(0)}, b_1^{(0)}] \times \cdots \times [a_n^{(0)}, b_n^{(0)}], \qquad b_i^{(0)} - a_i^{(0)} = L.$$

Dividiamo C_0 in 2^n cubi uguali, in almeno uno di questi cubi, sia

$$C_1 := [a_1^{(1)}, b_1^{(1)}] \times \cdots \times [a_n^{(1)}, b_n^{(1)}] \qquad b_i^{(1)} - a_i^{(1)} = L/2,$$

ci saranno infiniti elementi. Per induzione su i continuiamo a suddividere il cubo C_i in 2^n cubi uguali e scegliamo C_{i+1} in modo che contenga infiniti elementi di E. Se

$$C_i := [a_1^{(i)}, b_1^{(i)}] \times \cdots \times [a_n^{(i)}, b_n^{(i)}] \qquad b_i^{(i)} - a_i^{(i)} = L/2^i,$$

i vertici di C_i convergono e più precisamente

$$a_k^{(i)}, b_k^{(i)} \longrightarrow a_k^\infty = b_k^\infty$$

e che il punto $a := (a_1^\infty, \dots, a_n^\infty)$ è di accumulazione per E perché per ogni $r > 0$ e i sufficientemente grande, $C_i \subset B(a, r)$. □

Dal teorema di Bolzano-Weierstrass segue

8.5 Teorema. *Da ogni successione* $\{x_k\}$ *a valori in* $\mathbb{R}^n$ *limitata si può estrarre una sottosuccessione convergente. In altre parole, ogni insieme limitato e chiuso di* $\mathbb{R}^n$ *è compatto.*

Dimostrazione. Se i valori di $\{x_k\}$ sono un numero finito, almeno uno di essi, diciamo α, è assunto infinite volte dalla successione. Se $\{p_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ sono gli indici per cui $x_{p_k} = \alpha$, allora la sottosuccessione $\{x_{p_k}\}$ è costantemente α e converge ad α. Se invece i valori di $\{x_k\}$ sono infiniti, applicando all'insieme dei valori della successione il teorema di Bolzano-Weierstrass troviamo per essi un punto di accumulazione x_∞. In ogni intorno di x_∞ cadono quindi infiniti valori della successione. Sia ρ_1 il primo indice per cui $|x_{\rho_1} - x_0| < 1$, sia poi ρ_2 il primo indice maggiore di ρ_1 per cui $|x_{\rho_2} - x_0| < 1/2$ e così via: si costruisce così una successione x_{ρ_k} con $|x_{\rho_k} - x_\infty| < 2^{-k}$ $\forall k$, i.e., $x_{\rho_k} \to x_\infty$ per $k \to \infty$. □

8.c Ricoprimenti ed ϵ-reti

Ci sono altri modi per esprimere la sequenziale compattezza di (un sottoinsieme di) uno spazio metrico cui vogliamo accennare.

8.6 Definizione. *Diciamo che* $A \subset X$ è totalmente limitato *se per ogni* $\epsilon > 0$ *esiste un ricoprimento finito di* A *con insiemi di diametro minore di* ϵ, *i.e.,* $A \subset \cup_{i=1}^n A_i$, $\operatorname{diam} A_i < \epsilon$.

8.7 Definizione. *Si dice che $R \subset X$ è una* ϵ-rete *per $A \subset X$ se ogni punto di A ha un punto di R a distanza minore di ϵ.*

Ovviamente un insieme A è totalmente limitato se e solo se per ogni $\epsilon > 0$ A ha una ϵ-rete finita.

8.8 Definizione. *Diciamo che $A \subset X$ è* compatto *se da ogni ricoprimento con aperti di A è possibile estrarre un ricoprimento finito.*

8.9 Teorema. *Sia X uno spazio metrico. Sono fatti equivalenti*
(i) *X è sequenzialmente compatto,*
(ii) *X è completo e totalmente limitato,*
(iii) *X è compatto.*

L'implicazione (ii)$\Rightarrow$(i) è nota come *criterio di Hausdorff* e l'implicazione (i)$\Rightarrow$(iii) come *lemma del ricoprimento finito.*

Dimostrazione del Teorema 8.9. (i)$\Rightarrow$(ii) Sia X sequenzialmente compatto. Abbiamo già dimostrato che X è completo. Se non fosse totalmente limitato, esisterebbe $r > 0$ tale che nessuna famiglia finita di palle di raggio r potrebbe ricoprire X. Sia $x_1 \in X$. Poiché $B(x_1, r)$ non ricopre X, esiste $x_2 \in X$ con $d(x_1, x_2) \geq r$. D'altra parte neanche $B(x_1, r)$ e $B(x_2, r)$ ricoprono X, quindi esisterà x_3 con $d(x_1, x_3) \geq r$ e $d(x_2, x_3) \geq r$. In questo modo si costruisce induttivamente una successione $\{x_i\}$ tale che
$$d(x_i, x_j) \geq r \qquad \forall\, i \neq j.$$
Da $\{x_i\}$ non è perciò possibile estrarre nessuna sottosuccessione convergente, contro l'ipotesi che X sia sequenzialmente compatto.

(ii)$\Rightarrow$(iii) Supponiamo per assurdo che esista un ricoprimento aperto $\mathcal{A}$ di X da cui non sia possibile estrarre nessun ricoprimento finito. Poiché X è totalmente limitato esistono $C_1, \dots, C_n$ aperti con
$$\bigcup_{i=1}^n C_i = X, \qquad \operatorname{diam} C_i < 1, \qquad i = 1, \dots, n.$$
Per l'ipotesi fatta esiste almeno un indice k_1 tale che da $\mathcal{A}$ non si può estrarre un sottocoprimento finito di $X_1 := C_{k_1}$. Ovviamente anche C_{k_1} è totalmente limitato, ripetendo perciò l'argomento di prima ricopriamo C_{k_1} con un numero finito di insiemi aperti di diametro minore di $1/2$. Uno almeno di questi non è copribile con aperti di $\mathcal{A}$, chiamiamolo X_2. Continuando così costruiremo una successione $\{X_i\}$ di sottoinsiemi di X con
$$X_1 \supset X_2 \supset \cdots, \qquad \operatorname{diam} X_i \leq 1/2^i,$$
tali che nessuno di essi possa essere ricoperto da un numero finito di aperti di $\mathcal{A}$. Per ogni k sia $x_k \in X_k$. Essendo $\{x_k\}$ una successione di Cauchy e X completo, $\{x_k\}$ converge ad un punto $x_0 \in X$. Sia ora A_0 un aperto di $\mathcal{A}$ che contiene x_0 e sia r tale che $B(x_0, r) \subset A_0$, Se k è abbastanza grande si ha $d(x, x_0) < r$ per ogni $x \in X_k$, $X_k \subset B(x_0, r) \subset A_0$. Concludiamo che X_k è ricoperto da un solo aperto di A, mentre per costruzione non può essere ricoperto da alcuna famiglia finita di aperti di $\mathcal{A}$.

(iii)$\Rightarrow$(i) Supponiamo che esista $\{x_k\}$ a valori in X dalla quale non sia possibile estrarre una sottosuccessione convergente. $\{x_k\}$ è allora un insieme infinito senza punti di accumulazione in X. Ogni punto $x \in X$ ha perciò una palla $B(x, r_x)$ centrata in x in cui cade al più un numero finito di punti $\{x_k\}$. La famiglia $\mathcal{J} = \{B(x, r_x)\}$ di queste palle costituisce un ricoprimento aperto di X, ma nessuna sottofamiglia finita ricopre $\{x_k\}$ e quindi X contraddicendo l'ipotesi (iii). $\square$

8.10 Esercizio. Se C è un chiuso contenuto in un compatto K, allora C è compatto.

8.11 Esercizio. L'unione di un numero finito di compatti è compatto, mentre l'intersezione di una qualunque famiglia di compatti è compatta.

8.12 Esercizio. Gli insiemi fatti da un numero finito di punti sono compatti.

8.d Funzioni continue e compattezza

Vediamo ora che la risposta positiva all'esistenza di un punto di minimo è conseguenza della continuità e della compattezza. Si ha infatti

8.13 Teorema (Weierstrass). *Sia $f : X \to \mathbb{R}$ una funzione continua a valori reali definita su uno spazio metrico compatto (ad esempio un sottoinsieme chiuso e limitato di $\mathbb{R}^n$ o $\mathbb{C}^n$), allora f assume massimo e minimo, i.e., esistono $x_-, x_+ \in X$ tali che*

$$f(x_-) = \inf_{x \in X} f(x), \qquad f(x_+) = \sup_{x \in X} f(x).$$

Dimostrazione. Proviamo l'esistenza di un punto di minimo. Dalle proprietà dell'estremo inferiore esiste una successione $\{y_k\} \subset f(X)$ tale che

$$y_k \ \to \ \inf_{x \in X} f(x) \in \overline{\mathbb{R}} \qquad \text{per } k \to \infty. \tag{8.1}$$

In corrispondenza di ogni y_k esiste anche un punto $x_k \in X$ tale che $f(x_k) = y_k$. Ci si riferisce alla successione $\{x_k\}$ come ad una *successione minimizzante*. Poiché X è compatto, possiamo estrarre da $\{x_k\}$ una sottosuccessione $\{x_{h_k}\}$ convergente ad un punto $x_- \in X$. La continuità di f implica

$$y_{h_k} := f(x_{h_k}) \ \to \ f(x_-) \qquad \text{per } k \to \infty.$$

Per l'unicità del limite segue dalla (8.1) che $f(x_-) = \inf_{x \in X} f(x)$. □

8.14 Teorema. *Sia $f : X \to Y$ una funzione continua tra spazi metrici con X compatto. Allora $f(X)$ è compatto.*

Dimostrazione. Sia $\{V_i\}$ un ricoprimento aperto di $f(X)$. Poiché f è continua, $f^{-1}(V_i)$ è un aperto, quindi $\{f^{-1}(V_i)\}$ è un ricoprimento aperto di X. Esiste allora un sottoricoprimento finito di X, i.e., esistono indici $i_1, \dots, i_n$ tali che

$$X \subset f^{-1}(V_{i_1}) \cup \ldots \cup f^{-1}(V_{i_n}),$$

da cui[1]

$$f(X) \subset V_{i_1} \cup \ldots \cup V_{i_n},$$

i.e., $f(X)$ è compatto.

Alternativamente, sia $\{y_n\}$ una successione a valori in $f(X)$ e sia $\{x_n\} \subset X$ tale che $f(x_n) = y_n$ $\forall n$. Essendo X sequenzialmente compatto, esiste una sottosuccessione $\{x_{k_n}\}$ di $\{x_n\}$ convergente ad un punto $x_0 \in X$. Essendo f continua si ha $y_{k_n} := f(x_{k_n}) \to f(x_0) \in f(X)$. □

8.15 Esercizio. Dedurre il Teorema 8.13 dal Teorema 8.14.

8.16 Esercizio. Sia E un sottoinsieme non compatto di $\mathbb{R}$. Mostrare che

(i) esiste $f : E \to \mathbb{R}$ continua, ma non limitata,
(ii) esiste $f : E \to \mathbb{R}$ continua e limitata, ma che non ha massimo e/o minimo.

[1] Ricordiamo che $f(f^{-1}(E) = E \ \forall \ E \subset Y$ e $f^{-1}(f(E)) \supset E \ \forall \ E \subset X$. Nella seconda formula non necessariamente vale l'uguaglianza.

8.e Continuità della funzione inversa

La compattezza gioca un ruolo importante anche per la continuità della funzione inversa di una funzione continua invertibile.

8.17 Teorema. *Sia $f : X \to Y$ una funzione continua e iniettiva tra due spazi metrici. Supponiamo X compatto, allora $f^{-1} : f(X) \subset Y \to X$ è continua.*

Dimostrazione. Proviamo che f è chiusa, i.e., $f(F)$ è chiuso se F è un chiuso di X. Se F è chiuso, F è sequenzialmente compatto essendo X compatto. Dal Teorema 8.14 deduciamo che $f(F)$ è compatto e quindi chiuso. Se $g : f(X) \to X$ è l'inversa di f, si ha $g^{-1}(F) = f(F)$ e quindi $g^{-1}(F)$ è chiuso se F è chiuso. □

8.18 Esercizio. Osservare con un esempio che l'ipotesi di compattezza del dominio non è eliminabile.
Soluzione. Sia $X = [0, 2\pi[$, Y la circonferenza in $\mathbb{R}^2$ di centro l'origine e raggio 1 e $f : X \to Y$ l'applicazione definita da $f(t) := (\cos t, \sin t)$, $0 \le t < 2\pi$. Essendo le funzioni $\sin t$ e $\cos t$ continue, $f(t)$ è una funzione continua iniettiva. La sua funzione inversa f^{-1} (che esiste, essendo f biunivoca) non è, chiaramente, continua nel punto $(1, 0) = f(0)$.

8.f Continuità uniforme

È utile introdurre la seguente

8.19 Definizione. *Diciamo che $f : X \to Y$ è* uniformemente continua *in X se per ogni $\epsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che $d_Y(f(x), f(y)) < \epsilon$ per ogni coppia $x, y \in X$ con $d_X(x, y) < \delta$.*

8.20 Osservazione. L'uniforme continuità è una proprietà globale, i.e. una proprietà di una funzione in un insieme assegnato, mentre la continuità è una proprietà locale: una proprietà della funzione vicino ad un punto x_0:

> *f continua in X* : $\forall\, \epsilon > 0$ e $\forall\, x \in X\ \exists\, \delta > 0$, ($\delta$ dipende in linea di principio sia da ϵ che da x), tale che $d_Y(f(x), f(y)) < \epsilon$ se $d_X(x, y) < \delta$.
> *f uniformemente continua in X* : $\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0$, (dipendente quindi solo da ϵ), tale che $d_Y(f(x, f(y) < \epsilon$ se $d_X(x, y) < \delta$.

Ovviamente, se f è uniformemente continua in $E \subset X$, è anche continua in E, e uniformemente continua in ogni sottoinsieme di E.

8.21 Esercizio. Le funzioni lipschitziane e α-hölderiane, cfr. le Definizioni **??** e **??**, sono uniformemente continue.

8.22 Esercizio. Provare che f non è uniformemente continua in X se esistono $\epsilon_0 > 0$ e due successioni $\{x_n\}, \{y_n\}$ a valori in X per cui

$$d_X(x_n, y_n) \to 0 \qquad \text{e} \qquad d_Y(f(x_n), f(y_n)) \ge \epsilon_0.$$

8.23 Esercizio. Provare che
(i) x^2 e $\sin x^2$ non sono uniformemente continue in $\mathbb{R}$,
(ii) $1/x$ non è uniformemente continua in $]0, 1]$.
Provare direttamente e/o ricordandosi del teorema di Lagrange che
(iii) x^2 è uniformemente continua in $[0, 1]$,

(iv) e^{-x} è uniformemente continua in $[0, +\infty[$.

8.24 Esercizio. Provare che se $f : X \to Y$ è una funzione uniformemente continua fra spazi metrici e $\{x_n\} \subset X$ è di Cauchy, allora $f(x_n) \subset Y$ è di Cauchy.

Ogni funzione continua è uniformemente continua sui compatti. Si ha infatti

8.25 Teorema (Heine-Cantor-Borel). *Sia f una funzione continua da uno spazio metrico compatto X in uno spazio metrico Y. Allora f è uniformemente continua in X.*

Dimostrazione. Per assurdo, supponiamo che f non sia uniformemente continua: allora esisterebbe $\epsilon > 0$ e per ogni $n = 0, 1, 2, \dots$ esisterebbero x_n e y_n tali che

$$d_X(x_n, y_n) < \frac{1}{n}, \qquad \text{e} \qquad d_Y(f(x_n), f(y_n)) > \epsilon. \tag{8.2}$$

Poiché X è compatto possiamo estrarre da $\{x_n\}$ una sottosuccessione convergente ad un punto $x \in X$, $x_{k_n} \to x$. Dalla prima delle (8.2) segue allora che la sottosuccessione di $\{y_n\}$ con gli stessi indici converge anch'essa ad x, $y_{k_n} \to x$. Per la continuità della funzione distanza e di f, segue allora

$$d_Y(f(x_{k_n}), f(y_{k_n})) \longrightarrow d_Y(f(x), f(x)) = 0$$

contraddicendo la seconda disuguaglianza in (8.2). □

Connessione

Oltre alla compattezza, un altro concetto topologico elementare è la *connessione*.

8.g Spazi connessi

8.26 Definizione. *Uno spazio metrico X si dice* connesso *se esso non è unione di due aperti A e B non vuoti e disgiunti.*

Ovviamente

8.27 Proposizione. *Sia X uno spazio metrico. Sono fatti equivalenti*

(i) *X è connesso,*
(ii) *X non ha sottoinsiemi diversi dal vuoto e da se stesso che siano contemporaneamente aperti e chiusi,*

8.28 Teorema. *$E \subset \mathbb{R}$ è connesso se e solo se E è un intervallo.*

Dimostrazione. Se $E \subset \mathbb{R}$ non fosse un intervallo, allora $\exists\, x, y \in E$ e $z \notin E$ con $x < z < y$. Allora $E = (E \cap]-\infty, z[) \cup (E \cap]z, +\infty[)$ e $E \cap]-\infty, z[$ ed $E \cap]z, +\infty[$ sarebbero non vuoti e disgiunti. Assurdo.

Viceversa se E non fosse connesso, allora si potrebbe scrivere $E = A \cup B$ con A e B non vuoti e disgiunti. Siano $x \in A$ e $y \in B$ e senza perdere di generalità sia $x < y$. Definiamo

$$z = \sup(A \cap [x, y]).$$

Sappiamo che $z \in \overline{A}$ e quindi $z \notin B$; in particolare $x \leq z < y$. Ora se $z \notin A$, allora $x < z < y$ e $z \notin E$. Se $z \in A$, allora $z \notin \overline{B}$; seguirebbe che $\exists\, z_1$ tale che $z < z_1 < y$ e $z_1 \notin B$, ma allora $x < z_1 < y$ e $z_1 \notin E$. Assurdo. □

8.29 Esercizio. Provare che la chiusura di un connesso è connessa.

8.30 Esercizio. Provare che un sottoinsieme di $\mathbb{Q}$ contenente almeno due punti non è connesso.

8.31 Esercizio. Siano A e B aperti non vuoti e disgiunti tali che $X = A \cup B$. Se Y è un sottoinsieme connesso di X, allora o $Y \subset A$ o $Y \subset B$.

8.32 Esercizio. Se $\{Y_i\}$ è una famiglia di sottoinsiemi connessi di X tali che $\cap_i Y_i \neq \emptyset$, allora $Y = \cup_i Y_i$ è connesso. [*Sugg.* Ragionare per assurdo ed usare l'Esercizio 8.31].

8.33 Esercizio. Se $\{Y_n\}$ è una successione di insiemi connessi con $Y_n \cap Y_{n+1} \neq \emptyset\ \forall\, n$. Allora $Y := \cup_n Y_n$ è connesso.

8.34 Teorema. *Sia $f : X \to Y$ è un'applicazione continua tra due spazi metrici. Allora le immagini mediante f dei sottoinsiemi connessi di X sono sottoinsiemi connessi di Y.*

Dimostrazione. Possiamo supporre che f sia anche surgettiva: basterà allora provare che, se X è connesso, Y è connesso. Supponiamo Y non sia connesso, allora esistono U e V aperti non vuoti e disgiunti in Y con $Y = U \cup V$. Ma allora $f^{-1}(U)$ e $f^{-1}(V)$ sarebbero due aperti non vuoti e disgiunti di X con $X = f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V)$: assurdo. $\square$

Poiché i connessi di $\mathbb{R}$ sono tutti e soli gli intervalli, si ritrova il classico teorema degli zeri e più in generale

8.35 Corollario. *Sia $f : X \to \mathbb{R}$ una funzione a valori reali continua definita su uno spazio metrico X, ad esempio $\mathbb{R}^n$. Allora f assume tutti i valori compresi tra due valori assunti.*

Si ha anche

8.36 Proposizione. *Ogni convesso di $\mathbb{R}^n$ è connesso.*

8.h Connessione per archi

X si dice *connesso per archi* se per ogni $x, y \in X$ esiste una applicazione continua $\varphi : [0,1] \to X$ con $\varphi(0) = x$ e $\varphi(1) = y$. I connessi per archi di $\mathbb{R}^n$ sono connessi, ma i connessi non necessariamente sono connessi per archi come mostra il grafico della funzione $f(x) := \sin \frac{1}{x}$ per $x \neq 0$ unito $\{0\} \times [-1,1]$. Tuttavia

8.37 Proposizione. *Sia Ω aperto in $\mathbb{R}^n$. Allora Ω è connesso se e solo se è connesso per archi.*

8.i Qualche applicazione

Siano (X, d_X), (Y, d_Y) due spazi metrici. Un *omeomorfismo* $f : X \to Y$ è una applicazione bigettiva continua con inversa continua. Due spazi metrici (X, d_X) e (Y, d_Y) si dicono omeomorfi se esiste un omeomorfismo $\varphi : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$.

Sia (X, d) uno spazio metrico. Una proprietà di un oggetto di X definita in termini degli aperti di X è una *proprietà topologica* di X, ad esempio essere un sottoinsieme aperto, o chiuso o la chiusura di o la frontiera di, o per una successione essere o meno convergente sono proprietà topologiche. Un omeomorfismo $f : X \to Y$ tra due spazi metrici X e Y è precisamente una mappa biunivoca che preserva gli aperti, A è aperto in X se e solo se $f(A)$ è aperto in Y e, come si è visto un omeomorfismo preserva i chiusi, i sottoinsiemi compatti, i connessi, i connessi per archi e le successioni convergenti. Si dice the tutti questi oggetti cono invarianti topologici, nel senso che sono conservati dagli omeomorfismi.

Un importante e difficile teorema afferma anche che

8.38 Teorema. *$\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$, $n \neq m$, non sono omeomorfi.*

e la dimostrazione consiste nel costruire un invariante topologico che distingue tra $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$ quando $n \neq m$. Molto piu' semplice e' dimostrare che

8.39 Proposizione. *$\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}^n$ non sono omeomorfi se $n \neq 1$.*

e gli oggeti che distinguono $\mathbb{R}^n$, $n > 1$, da $\mathbb{R}$ è la classe dei sottoinsiemi connessi. Infatti, se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ fosse un omeomorfismo tra $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}^n$, scelto un punto $x_0 \in \mathbb{R}$, f^{-1} manderebbe $\mathbb{R}^n \setminus \{f(x_0)\}$ che è connesso in $\mathbb{R} \setminus \{x_0\}$, che è sconnesso. Un assurdo. Si noti che si possono costruire, e la cosa non è ovvia, mappe $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $n < m$, biunivoche e continue, che non hanno pero' inversa continua.

In modo simile si mostra che $[0, 1]$, anche se in corrispondenza biunivoca con $[0, 1]^n$, $n > 1$, non è omeomorfo a $[0, 1]^n$, $n > 1$; anzi, tenendo presente il teorema sulla continuità dell'inversa di una funzione continua su un compatto, Teorema 8.17, possiamo dire che non esiste alcuna funzione continua e biunivoca da $[0, 1]$ a $[0, 1]^n$ per $n > 1$.

8.40 Teorema. *In $\mathbb{R}$ ciascun intervallo chiuso è omeomorfo a $[-1, 1]$, ogni intervallo aperto è omeomorfo a $]-1, 1[$, e ciascun intervallo semiaperto a $]-1, 1]$. Inoltre nessuno di questi tre intervalli è omeomorfo agli altri.*

Dimostrazione. La prima parte del teorema è ovvia. Per la seconda parte basta osservare che è possibile rimuovere 2, 0 ed 1 punto rispettivamente agli intervalli senza distruggere la connessione. □

8.41 Esercizio. Mostrare che $[0, 2\pi[$ ed $S^1 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x| = 1\}$ non sono omeomorfi.

8.42 Esercizio. Mostrare che $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid |x| = 1\}$ è connesso e che S^1 ed S^n, $n > 1$, non sono omeomorfi.

8.43 Esercizio. Sia A un qualunque sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$ e sia C un connesso che contiene punti di A e punti di $\mathbb{R}^n \setminus A$. Allora C contiene punti di ∂A.

8.j Esercizi

8.44 Esercizio. $\partial A = \emptyset$ se e solo se A è sia aperto che chiuso. In $\mathbb{R}^n$, $\partial A = \emptyset$ se e solo se $A = \emptyset$ oppure $A = \mathbb{R}^n$.

8.45 Esercizio. Sia $f : X \to Y$, X, Y spazi metrici compatti, una mappa continua. Mostrare con un esempio che $f(A)$ puo' non essere aperto anche se A è aperto.

8.46 Esercizio. Dati due insiemi A e B si definisce la *minima distanza tra A e B* il numero

$$d(A, B) := \inf_{\substack{a \in A \\ b \in B}} d(a, b).$$

Ovviamente la minima distanza tra due aperti o tra due chiusi disgiunti può essere zero; ma, se A è chiuso e B compatto, allora

$$d(A, B) > 0.$$

[*Sugg.* Supponiamo che $\exists\ a_n, b_n$ con $d(a_n, b_n) \to 0 \dots$]

8.47 Esercizio. Mostrare che l'insieme dei punti a coordinate non entrambe razionali in $\mathbb{R}^2$ è connesso in $\mathbb{R}^2$.

8.48 Esercizio. Sia B un sottoinsieme al più numerabile di $\mathbb{R}^n$, $n > 1$. Allora $\mathbb{R}^n \setminus B$ è connesso. [*Sugg.* Supporre che l'origine non sia un punto di B e mostrare che ogni $x \in \mathbb{R}^n \setminus B$ si congiunge con l'origine con un connesso E_x: se il segmento $\vec{0x} \subset \mathbb{R}^n \setminus B$ abbiamo finito, altrimenti si consideri un qualunque segmento $\vec{r}$ che intersechi $\vec{0x}$ e si mostri che esiste $z \in \vec{r}$ tale che la spezzata $\vec{0z} \cup \vec{zx}$ non interseca B.]

8.49 Esercizio. Sia $f : X \to Y$. Supponiamo Y compatto. Allora f è continua se e solo se il suo grafico

$$G_f := \{(x, y) \in X \times Y \mid x \in X,\ y = f(x)\}$$

è chiuso in $X \times Y$. La compattezza di Y non è eliminabile. Fare esempi.

8.50 Esercizio. Sia $K \subset X$ un sottoinsieme compatto di uno spazio metrico e $x \in X \setminus K$. Si provi che esiste $y \in K$ tale che $d(x, y) = d(x, K)$.