

12. I teoremi del calcolo differenziale, II

12.a Il teorema di invertibilità locale

Sia $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una applicazione. Se f è lineare, $f(x) = \mathbf{A}x$, $\mathbf{A} \in M_{n,n}(\mathbb{R})$, l'invertibilità di f , i.e. la risolubilità in x di $\mathbf{A}x = y$ per ogni $y \in \mathbb{R}^n$, è equivalente all'invertibilità della matrice \mathbf{A} e questa alla condizione $\det \mathbf{A} \neq 0$.

Per funzioni $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ derivabili, abbiamo visto con i metodi del calcolo che la condizione $f' > 0$ (o $f' < 0$) è sufficiente a garantire la monotonia e quindi la invertibilità di f e la derivabilità della funzione inversa. Inoltre per funzioni con derivata continua l'essere $f'(x_0) \neq 0$ in un punto x_0 , assicura l'esistenza di un intervallo $I(x_0, r)$ su cui $f'(x)$ ha lo stesso segno di $f'(x_0)$, da cui la stretta monotonia, la continuità, la derivabilità di $(f|_I)^{-1}$ e la formula

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} \quad \forall y \in f(I(x_0, r)).$$

Enunciamo qui di seguito un risultato di *invertibilità locale* per funzioni $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ di classe C^1 . La condizione $f'(x_0) \neq 0$ in una variabile, viene sostituita dalla condizione $\det \mathbf{D}f(x_0) \neq 0$ di non degenerazione della matrice jacobiana, una similitudine piuttosto naturale se la si interpreta come condizione di non degenerazione dell'applicazione lineare tangente $h \rightarrow \mathbf{D}f(x_0)(h)$ o, se si vuole, di non degenerazione dello sviluppo di Taylor al primo ordine di f in x_0 ,

$$f(x) = f(x_0) + \nabla f(x_0) \bullet (x - x_0) + o(|x - x_0|) \quad \text{per } x \rightarrow x_0.$$

Ricordiamo che $f|_U$ denota la restrizione di f ad $U \subset \Omega$ e che con $x_0 + U$ si intende il sottoinsieme $\{x \in \mathbb{R}^n \mid x - x_0 \in U\}$, ad esempio $x_0 + B(0, r) = B(x_0, r)$.

12.1 Definizione. Una funzione $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ si dice localmente invertibile se per ogni $x \in \Omega$ esiste un intorno U di x tale che $f|_U$ è iniettiva.

Si prova il seguente

12.2 Teorema (di invertibilità locale). Sia $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ una applicazione di classe C^1 , definita su un aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e sia $x_0 \in \Omega$. Se $\det \mathbf{D}f(x_0) \neq 0$, allora esiste un intorno aperto U di x_0 tale che

- (i) f ristretta ad U è iniettiva,
- (ii) $V := f(U)$ è aperto, f è aperta e $(f|_U)^{-1} : V \rightarrow U$ è continua,
- (iii) $(f|_U)^{-1} : V \rightarrow U$ è di classe C^1 ed inoltre $\forall y \in V$

$$\mathbf{D}(f|_U)^{-1}(y) = \left[\mathbf{D}f(x) \right]^{-1} \quad x := (f|_U)^{-1}(y). \quad (12.1)$$

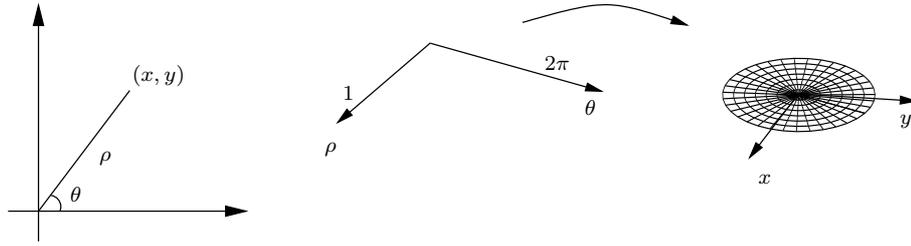


Figura 12.1. Coordinate polari in \mathbb{R}^2 .

Pertanto una funzione $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ definita su un aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ di classe $C^k(\Omega)$, $k \geq 1$, con $\det \mathbf{D}f(x) \neq 0 \forall x \in \Omega$ è localmente invertibile, aperta e con inversa di classe C^k .

12.3 Corollario. Sia $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ iniettiva e di classe $C^1(\Omega)$. Se $\det \mathbf{D}f(x) \neq 0 \forall x \in \Omega$, allora $f(\Omega)$ è aperto e l'inversa $f^{-1} : f(\Omega) \rightarrow \Omega$ è di classe C^1 con

$$\mathbf{D}f^{-1}(y) = [\mathbf{D}f(x)]^{-1}, \quad x = f^{-1}(y) \quad \forall y \in f(\Omega).$$

12.b Qualche esempio

12.4 Coordinate polari. La funzione *coordinate polari* $\phi(\rho, \theta) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)$, $(\rho, \theta) \in \mathbb{R}^2$, ha matrice jacobiana e jacobiano

$$\mathbf{D}\phi(\rho, \theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\rho \sin \theta \\ \sin \theta & \rho \cos \theta \end{pmatrix}, \quad \det \mathbf{D}\phi(\rho, \theta) = \rho.$$

Per il teorema di invertibilità locale, Teorema 12.2, ϕ ristretta a $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ è localmente invertibile. ϕ non è però globalmente invertibile da $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ non essendo iniettiva: $\phi(\rho, \theta + 2\pi) = \phi(\rho, \theta)$. Però la restrizione di ϕ alla striscia $S_a :=]0, +\infty[\times]a - \pi, a + \pi[$, $a \in \mathbb{R}$, è iniettiva e quindi globalmente invertibile da S_a sull'immagine $\phi(S_a)$ (con inversa C^∞). Osserviamo che

$$\mathbf{D}\phi(\rho, \theta) = \begin{pmatrix} \frac{x}{\rho} & -y \\ \frac{y}{\rho} & x \end{pmatrix}$$

da cui

$$\mathbf{D}\phi^{-1}(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}.$$

Si osservi che $\phi(S_a)$ è tutto \mathbb{R}^2 meno la semiretta che forma un angolo $a + \pi$ col semiasse positivo delle x uscente dall'origine. L'inversa di $\phi|_{S_a}$ si scrive esplicitamente. Ad esempio per $a = 0$, per ogni $(x, y) \in \phi(S_a)$ si può risolvere in $(\rho, \theta) \in]0, \infty[\times]-\pi, \pi[$ il sistema

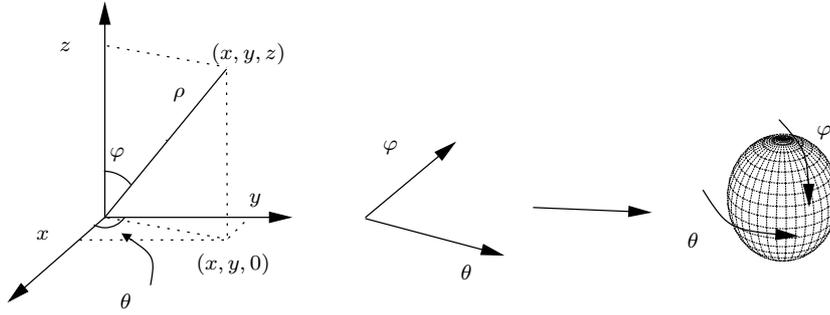


Figura 12.2. Coordinate sferiche.

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{cases}, \quad \rho > 0, \theta \in]a - \pi, a + \pi[.$$

Si trova $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ e

$$\theta = \begin{cases} \frac{\pi}{2} + \arctan \frac{y}{x} & \text{se } x < 0, y > 0, \\ \frac{\pi}{2} & \text{se } x = 0, y > 0, \\ \arctan \frac{y}{x} & \text{se } x > 0, \\ -\frac{\pi}{2} & \text{se } x = 0, y < 0, \\ -\frac{\pi}{2} + \arctan \frac{y}{x} & \text{se } x < 0, y < 0, \end{cases}$$

i.e., l'angolo in radianti tra l'asse positivo delle ascisse e la semiretta uscente dall'origine per (x, y) misurato in verso antiorario da $-\pi$ a π .

12.5 Coordinate cilindriche. Considerazioni analoghe si possono fare per la trasformazione che dà le *coordinate cilindriche*,

$$(x, y, z) = \phi(\rho, \theta, z), \quad \begin{cases} x = \rho \cos \theta, \\ y = \rho \sin \theta, \\ z = z. \end{cases}$$

La matrice jacobiana e lo jacobiano di ϕ valgono

$$\mathbf{D}\phi(\rho, \theta, z) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\rho \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \rho \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \det \mathbf{D}\phi(\rho, \theta, z) = \rho.$$

ϕ è dunque localmente invertibile da $\mathbb{R}^3 \setminus \{\rho = 0\}$ su $\mathbb{R}^3 \setminus \{z = 0\}$ con inverse locali C^∞ . Inoltre la mappa ϕ ristretta a $\Omega :=]0, +\infty[\times]0, 2\pi[\times \mathbb{R}$ è bigettiva e quindi globalmente invertibile.

12.6 Coordinate sferiche. Per la trasformazione $\phi : (\rho, \theta, \varphi) \rightarrow (x, y, z)$ da \mathbb{R}^3 in sé che dà le *coordinate sferiche*

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \sin \varphi, \\ y = r \sin \theta \sin \varphi, \\ z = r \cos \varphi \end{cases}$$

si ha

$$\mathbf{D}\phi(\rho, \theta, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos \theta \sin \varphi & -r \sin \theta \sin \varphi & \rho \cos \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi & \rho \cos \theta \sin \varphi & \rho \sin \theta \cos \varphi \\ \cos \varphi & 0 & -\rho \sin \varphi \end{pmatrix}$$

e quindi $\det \mathbf{D}\phi(\rho, \theta, \varphi) = \rho^2 \sin \varphi$. Perciò $\det \mathbf{D}\phi(\rho, \theta, \varphi) \neq 0$ per ogni (ρ, θ, φ) in

$$\Omega := \mathbb{R}^3 \setminus \left\{ (\rho, \theta, \varphi) \mid \rho \neq 0, \varphi \neq (2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

e si conclude che $\phi|_{\Omega}$ è localmente invertibile.

La restrizione di ϕ a $\Delta :=]0, \infty[\times]0, 2\pi[\times]0, \pi[\subset \Omega$ è invece bigettiva ed ha immagine \mathbb{R}^3 meno il semipiano generato dall'asse z e dal semiasse positivo delle ascisse. $\phi|_{\Delta}$ è dunque globalmente invertibile con inversa C^∞ .

Quando si scrive $(x, y, z) = \phi(\rho, \theta, \varphi)$, $(\rho, \theta, \varphi) \in \Delta$, le nuove variabili ρ, θ, φ sono rispettivamente la distanza ρ dall'origine, la longitudine θ misurata in radianti a partire dal semipiano generato dall'asse z e dal semiasse positivo delle ascisse e la latitudine φ misurata in radianti da 0, corrispondente al polo nord, a π , corrispondente al polo sud, cfr. la Figura 12.2.

12.7 Trasformazione per raggi reciproci. È la trasformazione ϕ del piano che ad ogni punto $P = (x, y) \neq (0, 0)$ associa il punto P' che sta sulla semiretta uscente da 0 e passante per P ad una distanza tale che $\overline{OP} \cdot \overline{OP}' = 1$. Essa trasforma punti interni al cerchio $x^2 + y^2 = 1$ in punti esterni e viceversa. In formula

$$\phi(x, y) = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{y}{x^2 + y^2} \right),$$

o, in coordinate complesse $z = x + iy$,

$$\phi(z) = 1/\bar{z}.$$

Ovviamente si tratta di una mappa globalmente invertibile di $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ in sé di classe C^∞ con inversa di classe C^∞ .

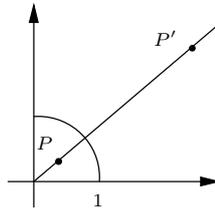


Figura 12.3. Trasformazione per raggi reciproci.

12.8 Esercizio (Coordinate ellittiche cofocali). Provare che $\phi : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ data da

$$(x, y) \rightarrow (\cosh x \cos y, \sinh x \sin y)$$

con dominio $\Omega := \{(x, y) \mid x > 0\}$ è localmente invertibile ma non globalmente invertibile. Mostrare poi che ϕ ristretta alla striscia $\Omega := \{(x, y) \mid x > 0, 0 < y < 2\pi\}$ è invertibile. [Sugg. Provare che le immagini dei segmenti verticali sono tutte ellissi con gli stessi fuochi $\pm(1, 0)$ e le immagini delle semirette orizzontali sono tutte iperboli con gli stessi fuochi, ancora $\pm(1, 0)$.]

12.9 Mappa esponenziale. Sia $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ la mappa esponenziale, $f(z) = e^z$, o in coordinate cartesiane $(u, v) = f(x, y) = (e^x \cos y, e^x \sin y)$. La matrice jacobiana di f è

$$Df(x, y) := \begin{pmatrix} e^x \cos y & e^x \sin y \\ -e^x \sin y & e^x \cos y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u & v \\ -v & u \end{pmatrix}$$

e lo jacobiano è $\det Df(x, y) = u^2 + v^2 = e^{2x}$. f è dunque localmente invertibile con inverse C^∞ e

$$Df^{-1}(u, v) = \frac{1}{u^2 + v^2} \begin{pmatrix} u & -v \\ v & u \end{pmatrix}.$$

f non è ovviamente globalmente invertibile in \mathbb{R}^2 essendo 2π -periodica in y . La restrizione di f a $\Omega := \mathbb{R} \times]0, 2\pi[$ è iniettiva e quindi globalmente invertibile. L'inversa è la cosiddetta *determinazione principale del logaritmo complesso*.

Le immagini dei segmenti verticali di Ω sono cerchi con centro l'origine mentre le immagini delle rette orizzontali sono semirette uscenti dall'origine.

12.c Formula di Taylor al secondo ordine

Sia $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, A aperto di \mathbb{R}^n , una funzione di classe C^2 , e siano x_0, x due punti di A tali che il segmento congiungente x^0 ad x sia tutto contenuto in A . Se $h := x - x_0$ nella base standard, la funzione

$$F(t) := f(x_0 + th)$$

è ben definita per $t \in [0, 1]$. Ovviamente $F(0) = f(x_0)$ e $F(1) = f(x)$. Se si fissa un sistema di coordinate (x_1, x_2, \dots, x_n) in \mathbb{R}^n e si applica iterativamente la (11.3), si prova che $F \in C^2([0, 1])$ e che per ogni $t \in [0, 1]$

$$\begin{aligned} F'(t) &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0 + th)h_i = \sum_{i=1}^n D_i f(x_0 + th)h_i \\ F''(t) &= \sum_{i=1}^n [D_i f(x_0 + th)]'h_i = \sum_{i,j=1}^n D_j D_i f(x_0 + th)h_i h_j \end{aligned} \tag{12.2}$$

Abbiamo indicato con (h_1, h_2, \dots, h_n) le coordinate di h e per convenienza le componenti dei vettori sono indicizzate in basso. Seguiremo questa convenzione in tutta la sezione.

Si noti che si può scrivere in modo più compatto, con le notazioni dell'algebra lineare,

$$F'(t) = \nabla f(x_0 + th) \bullet h, \quad \text{e} \quad F''(t) = \mathbf{H}f(x_0 + th)h \bullet h, \quad (12.3)$$

dove ∇f è il gradiente della funzione f , $\mathbf{H}f$ è la matrice $n \times n$ delle derivate seconde o matrice hessiana, $\mathbf{H}f := [D_{ij}f]$, e $x \bullet y$ è il prodotto scalare in \mathbb{R}^n .

Le varie formule di Taylor per la restrizione $F(t) := f(x_0 + t(x - x_0))$, $t \in [0, 1]$, di f , se riscritte con le (12.3), danno le varie formule di Taylor per f . Ad esempio

12.10 Teorema (Formule di Taylor al secondo ordine). *Sia f una funzione di classe $C^2(B(x_0, r))$, $r > 0$. Per ogni $h \in \mathbb{R}^n$, $|h| < r$, si ha allora*

(i) (RESTO INTEGRALE)

$$\begin{aligned} f(x_0 + h) &= f(x_0) + \nabla f(x_0) \bullet h + \int_0^1 (1-s) \left[\mathbf{H}f(x_0 + sh)h \bullet h \right] ds \\ &= f(x_0) + \nabla f(x_0) \bullet h \\ &\quad + \sum_{i,j=1}^n \left(\int_0^1 (1-s) \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0 + sh) ds \right) h_i h_j \end{aligned}$$

(ii) (RESTO DI LAGRANGE)

$$\begin{aligned} f(x_0 + h) &= f(x_0) + \nabla f(x_0) \bullet h + \frac{1}{2} \mathbf{H}f(x_0 + sh)h \bullet h \\ &= f(x_0) + \nabla f(x_0) \bullet h + \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0 + sh) h_i h_j \end{aligned}$$

per qualche $s \in]0, 1[$,

(iii) (RESTO DI PEANO)

$$f(x_0 + h) - f(x_0) - \nabla f(x_0) \bullet h - \frac{1}{2} \mathbf{H}f(x_0)h \bullet h = o(|h|^2) \quad \text{per } h \rightarrow 0.$$

12.d Punti critici

Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ ed $f : A \rightarrow \mathbb{R}$. Ricordiamo che un punto $x_0 \in A$ tale che

$$f(x_0) \leq f(x) \quad \forall x \in A \quad (12.4)$$

si chiama un *punto di minimo (assoluto)* per f in A e

$$f(x_0) = \min \left\{ f(x) \mid x \in A \right\}$$

il *valore minimo* di f in A . Se la disuguaglianza in (12.4) è stretta (tranne che per $x = x_0$) diciamo che x_0 è un punto di minimo assoluto *isolato*. Ovviamente non sempre i punti di minimo esistono e però essi sicuramente esistono se A è chiuso e limitato e f è continua in A .

Si dice che x_0 è un *punto di minimo relativo o locale* per f se esiste un intorno U_{x_0} di x_0 tale che

$$f(x_0) \leq f(x) \quad \forall x \in U_{x_0} \cap A.$$

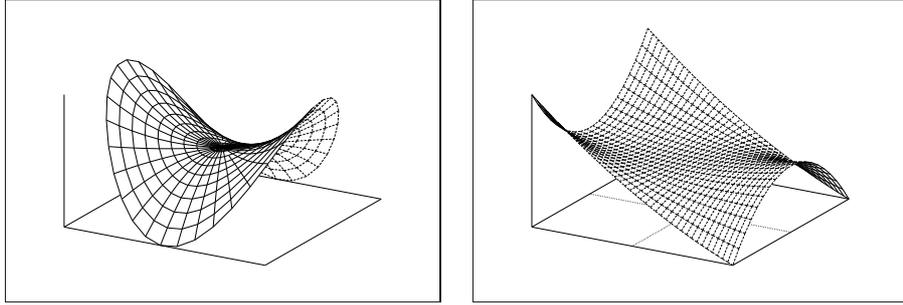


Figura 12.4. Due “selle”.

Se la diseuguaglianza è stretta per $x \neq x_0$, diciamo che x_0 è un punto di minimo locale *stretto*. Analoghe definizioni valgono per i punti di massimo e i punti di massimo locale. I punti di massimo e minimo locale si chiamano anche *punti estremi* per f ed i relativi valori *valori estremi*.

La ricerca dei punti estremi di una funzione si riduce a volte nei casi concreti ad una ispezione diretta. Ad esempio $f(x) := |x|$, $x \in \mathbb{R}^n$, ha un punto di minimo assoluto in 0, come pure la funzione $\log(1 + x^2 + 2y^2)$: si vede immediatamente che le funzioni sono non negative e sono nulle se e solo se $(x, y) = (0, 0)$.

Tuttavia si possono fare considerazioni di ordine generale. Se x_0 è un punto estremo per f , allora x_0 è anche un punto estremo per la restrizione di f ad una qualunque retta passante per x_0 . Come abbiamo già osservato, segue dal teorema di Fermat che

se x_0 è un punto interno ad A di minimo relativo per f in A e se f ha derivata direzionale nella direzione v in x_0 , allora $\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = 0$.

Come già sappiamo, le ipotesi che x_0 sia interno ad A e che f abbia derivata direzionale in x_0 sono essenziali, si consideri ad esempio $f(x) = |x|$.

Quando A è un aperto in \mathbb{R}^n e $f \in C^1(A)$, $\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = (\nabla f(x_0)|v)$ e quindi

12.11 Proposizione. *Condizione necessaria affinché un punto x_0 interno ad A sia un estremo per una funzione $f \in C^1(A)$ è che*

$$Df(x_0) = 0 \quad \text{equivalentemente} \quad \nabla f(x_0) = 0. \quad (12.5)$$

12.12 Definizione. *Siano $A \subset \mathbb{R}^n$ aperto e $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ differenziabile in A . I punti $x \in A$ per cui $\nabla f(x) = 0$ si chiamano punti critici di f in A .*

Mentre è evidente dalla Proposizione 12.11 che tutti i punti estremi interni di una funzione differenziabile sono punti critici, non tutti i punti critici sono punti estremi, come del resto in una variabile. Per un esempio in due variabili si consideri la funzione $f(x, y) = x^2 - y^2$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, per la quale $(0, 0)$ è un punto critico che non è di massimo né di minimo. In questo caso è un *punto di sella*.

A questo punto è opportuno avvertire il lettore che l'intuizione relativa ai punti critici per funzioni di più variabili non sempre è affidabile. Ad esempio

12.13 Esercizio. *Mostrare con un esempio che non si possono caratterizzare i punti di massimo o di minimo guardando alle sole restrizioni di f lungo rette uscenti dal punto critico.*

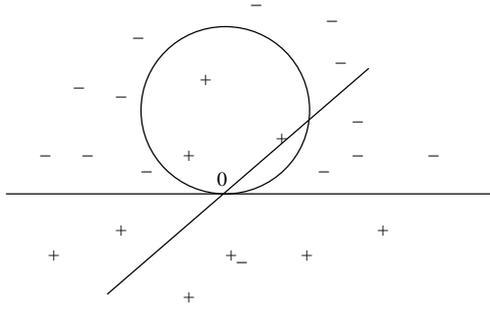


Figura 12.5. Insieme di livello zero della funzione in Esercizio 12.13.

Soluzione. La funzione $f(x, y) = y(y - x^2)$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, ha un punto critico in $(0, 0)$. f ha un minimo su ogni retta passante per l'origine e un massimo se ristretta alla parabola $y = x^2/2$, cfr. la Figura 12.5.

Supponiamo ora che $f \in C^2(A)$, A aperto in \mathbb{R}^n , e che $x_0 \in A$ sia un punto critico di f . Ricordando le (12.3), la formula di Taylor con resto di Peano centrata in un punto critico x_0 diventa

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \frac{1}{2} \mathbf{H}f(x_0)h \bullet h + o(|h|^2) \quad \text{per } |h| \rightarrow 0. \quad (12.6)$$

dove $\mathbf{H}f(x) = [D_{ij}f(x_0)]$ denota la matrice hessiana di f in x . Dalla (12.6) segue

12.14 Proposizione. Sia $f \in C^2(A)$, A aperto in \mathbb{R}^n e sia $x_0 \in A$ un punto critico di f . Allora

- (i) $\mathbf{H}f(x_0)\xi \bullet \xi \geq 0 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n$ è una condizione necessaria perché x_0 sia un punto di minimo locale,
- (ii) $\mathbf{H}f(x_0)\xi \bullet \xi > 0 \quad \forall \xi \neq 0$ è una condizione sufficiente perché x_0 sia un punto di minimo locale,

Dimostrazione. (i) Dalla (12.6) segue

$$0 \leq f(x_0 + \lambda\xi) - f(x_0) = \frac{1}{2} [\mathbf{H}f(x_0)(\lambda\xi) \bullet (\lambda\xi)] + o(\lambda^2)$$

per $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \rightarrow 0$. Dividendo per λ^2 si ottiene

$$\mathbf{H}f(x_0)\xi \bullet \xi + o(1) \geq 0 \quad \text{per } \lambda \rightarrow 0.$$

e quindi la tesi. (ii) Consideriamo la restrizione di $\mathbf{H}f(x_0)\xi \bullet \xi$ alla sfera unitaria $S^{n-1} := \{\xi \mid \|\xi\| = 1\} \subset \mathbb{R}^n$. La forma quadratica $\mathbf{H}f(x_0)\xi \bullet \xi$ è un polinomio omogeneo di grado due, in particolare una funzione continua su S^{n-1} . Dal teorema di Weierstrass e dall'ipotesi segue l'esistenza di un punto $\xi_0 \in S^{n-1}$ tale che

$$\mathbf{H}f(x_0)\xi \bullet \xi \geq \mathbf{H}f(x_0)\xi_0 \bullet \xi_0 =: m_0 > 0 \quad \forall \xi \in S^{n-1} \quad (12.7)$$

e, essendo infine $\mathbf{H}f(x_0)\xi \bullet \xi$ omogeneo di grado 2 segue che

$$\mathbf{H}f(x_0)\xi \bullet \xi \geq m_0|\xi|^2 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \xi \neq 0.$$

Dalla formula di Taylor al secondo ordine segue quindi che

$$f(x) - f(x_0) = \frac{1}{2} \mathbf{H}f(x_0)h \bullet h + o(|h|^2) \geq |h|^2 \left(\frac{m_0}{2} + o(1) \right), \quad h := x - x_0.$$

Poiché $m_0 > 0$, per il teorema della permanenza del segno esiste una palla $B(x_0, \delta)$ su cui $m_0/2 + o(1) > 0$, da cui $f(x) > f(x_0)$ per ogni $x \in B(x_0, \delta)$, $x \neq x_0$. Si noti che il punto di minimo locale è nella situazione considerata un punto di minimo locale isolato. \square

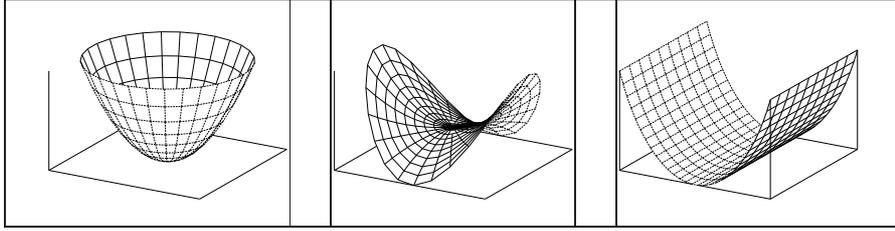


Figura 12.6. Il paraboloide a sinistra ha due autovalori positivi, la sella ha autovalori di segno opposto, il cilindro ha un autovalore positivo e l'altro nullo.

12.15 . Ricordiamo che la positività di una forma quadratica, $\phi(h) = \mathbf{A}h \bullet h$ relativa ad una matrice $\mathbf{A} \in M_{n,n}$ simmetrica, si trova calcolando la *segnatura* della metrica $(h, k) \rightarrow \mathbf{A}h \bullet k$, vale a dire riscrivendo ϕ come una somma di quadrati

$$\mathbf{A}h \bullet h = \sum_{i=1}^n m_i w_i^2$$

con un cambiamento lineare di coordinate, $h = \mathbf{R}w$, se si vuole decomponendo \mathbf{A} come $\mathbf{A} = \mathbf{R}\Lambda\mathbf{R}^T$, con $\mathbf{R} \in M_{n,n}$ e

$$\Lambda = \begin{pmatrix} m_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & m_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & m_n \end{pmatrix}$$

diagonale. La segnatura di \mathbf{A} è il numero di elementi positivi, negativi e nulli sulla diagonale di Λ che si dimostra essere indipendente dal cambiamento di variabile utilizzato.

Ricordiamo ancora che la riduzione a somma di quadrati puo' farsi o per tentativi, o utilizzando il *metodo di Jacobi*, o ancora calcolando gli autovalori di \mathbf{A} . Essendo \mathbf{A} simmetrica, segue dal teorema spettrale l'esistenza di una base ortonormale $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ di \mathbb{R}^n di autovettori di \mathbf{A} . Quindi se per ogni $i=1, \dots, n$ λ_i è l'autovalore corrispondente a u_i e se si definiscono $S := [u_1 | u_2 | \dots | u_n]$, e $\Lambda := \text{diag} \{ \lambda_1, \dots, \lambda_n \}$, allora

$$\mathbf{S}^T = \mathbf{S}^{-1}, \quad \text{e} \quad \mathbf{A}h \bullet h = \sum_{i=1}^n \lambda_i w_i^2, \quad h := \mathbf{S}w. \tag{12.8}$$

Dalle (12.8) segue immediatamente che $|h| = |w|$ e che

$$\lambda_m |h|^2 = \lambda_m |w|^2 \leq \mathbf{A}h \bullet h \leq \lambda_M |w|^2 = \lambda_M |h|^2 \quad \forall h \in \mathbb{R}^n.$$

Possiamo quindi rinunciare la Proposizione 12.14 come

12.16 Proposizione. Sia $f \in C^2(A)$, A aperto in \mathbb{R}^n e sia $x_0 \in A$ un punto critico di f . Se $\mathbf{H}f(x_0)$ denota la matrice hessiana di f in x_0 , allora

- (i) condizione necessaria perché x_0 sia un punto di minimo locale è che tutti gli autovalori di $\mathbf{H}f(x_0)$ siano non negativi,
- (ii) condizione sufficiente perché x_0 sia un punto di minimo locale è che tutti gli autovalori di $\mathbf{H}f(x_0)$ siano positivi.

12.17 Esercizio. In \mathbb{R}^2 una forma quadratica $\mathbf{A}h \bullet h$ è positiva se e solo se $\text{tr } \mathbf{A} > 0$ e $\det \mathbf{A} > 0$.

12.e Esercizi

12.18 Esercizio. Mostrare che il *polinomio di Taylor* $P_2(x; x_0)$ di grado 2 centrato in x_0 di una funzione f è caratterizzato dall'essere l'unico polinomio $Q(x)$ di grado minore od uguale a 2 tale che

$$f(x) - Q(x) = o(|x - x_0|^2) \quad \text{per } x \rightarrow x_0,$$

12.19 Esercizio. Tenendo presente la formula di Taylor con resto integrale per $k = 0$ e $k = 1$, provare il

Lemma (di Hadamard). se $f \in C^\infty$ in un intorno di 0, allora esistono funzioni regolari $g_i(x)$ e $g_{ij}(x)$ tali che

$$f(x) - f(0) = \sum_{i=1}^n g_i(x)x^i, \quad f(x) - f(0) = \sum_{i=1}^n f_{x^i}(0)x^i + \sum_{i,j=1}^n g_{ij}(x)x^i x^j. \quad (12.9)$$

in un intorno di zero.

12.20 Esercizio. Studiare i punti critici e piu' in generale i grafici delle seguenti funzioni

$$\begin{array}{ll} x^3 - 3xy^2, & x^2y^2, \\ e^{-x^2-y^2} \sin^2, & \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, \\ 2y^2 - x(x-1)^2. & \end{array}$$

12.21 Esercizio. Determinare la variazione dell'intensità di un campo E in \mathbb{R}^3 rispetto al tempo misurata da un osservatore che si muove lungo la traiettoria descritta dalla legge oraria $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = t$.

12.22 Esercizio. Sia $y(x)$ una funzione differenziabile per cui $F(x, y(x)) = 0 \forall x$ per una qualche funzione differenziabile $F(x, y)$. Mostrare che

$$\frac{dy}{dx}(x) = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, y(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, y(x))}$$

se $\frac{\partial F}{\partial y}(x, y(x)) \neq 0$. Trovare formule analoghe nel caso che $y_1(x)$, $y_2(x)$, $F_1(x, y_1, y_2)$ e $F_2(x, y_1, y_2)$ siano differenziabili e

$$F_1(x, y_1(x), y_2(x)) = 0, \quad F_2(x, y_1(x), y_2(x)) = 0.$$

12.23 Esercizio. L'operatore differenziale

$$\Delta u := \operatorname{div} \nabla u = \sum_{i=1}^n D_i D_i u$$

si chiama *operatore di Laplace* o *laplaciano*. Le funzioni $C^2(\Omega)$ con $\Delta u = 0$ in Ω si dicono *armoniche* in Ω . Mostrare che in dimensione $n = 2$, l'operatore si scrive in coordinate polari (ρ, θ) come

$$u_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho}u_{\rho} + \frac{1}{\rho^2}u_{\theta\theta} \quad \circ \quad \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho f_{\rho}) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\rho} f_{\theta} \right) \right].$$

e in dimensione 3 esso si scrive in *coordinate sferiche* come

$$\frac{1}{\rho \sin^2 \varphi} \left\{ \frac{\partial}{\partial \rho}(\rho^2 f_{\rho} \sin \varphi) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sin \varphi} f_{\theta} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi}(\sin \varphi f_{\varphi}) \right\}.$$

12.24 Esercizio (Operatore di Laplace e funzioni armoniche). La forza gravitazionale agente su una massa unitaria posta in (x, y, z) dovuta alla sua interazione con una massa M posta nell'origine è data, secondo la *legge gravitazionale di Newton*, da

$$F = g \frac{M}{r^2} \frac{r}{|r|} \quad r = (x, y, z)$$

F è l'opposto del gradiente del potenziale gravitazionale

$$V = -g \frac{M}{r}.$$

Mostrare che

- (i) V è una funzione *armonica* in $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$, i.e., $\Delta V = 0$ in $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$,
- (ii) le uniche funzioni armoniche in $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ a simmetria sferica, i.e., del tipo $u(|x|)$ sono date da

$$A\gamma(|x|) + B \quad \text{dove } A, B \in \mathbb{R} \quad e \quad \gamma(r) := \begin{cases} \log r & \text{se } n = 2 \\ \frac{1}{r^{n-2}} & \text{se } n \geq 3 \end{cases}$$

- (iii) le funzioni $e^{kx} \cos ky$, $e^{kx} \sin ky$ sono armoniche in \mathbb{R}^2 ,
- (iv) la funzione $e^{3x+4y} \sin 5y$ è armonica in \mathbb{R}^3 ,
- (v) se $f(x, y)$ è armonica in \mathbb{R}^2 , allora anche $f(x/(x^2 + y^2), y/(x^2 + y^2))$ è armonica. Dare una interpretazione geometrica della trasformazione

$$(x, y) \rightarrow \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{y}{x^2 + y^2} \right).$$

12.25 Esercizio (Equazione delle onde). Se f e g sono due funzioni di classe C^2 , la funzione

$$u(t, x) := f(x - ct) + g(x + ct) \tag{12.10}$$

soddisfa l'equazione delle onde unidimensionale

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Questa equazione è supposta descrivere le vibrazioni di una corda tesa lungo l'asse x e fissata agli estremi. $u(x, t)$ rappresenta lo spostamento nella direzione y nella posizione x al tempo t . Si assume che lo spostamento longitudinale sia trascurabile. Osservare che $f(x - ct)$ e $g(x + ct)$ rappresentano onde che si propagano rispettivamente verso destra e verso sinistra con velocità c .

- (i) Usando il cambiamento di coordinate $r = x + ct$ $s = x - ct$, mostrare che l'equazione delle onde si trasforma nell'equazione

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r \partial s} = 0$$

e quindi (12.10) rappresenta una qualunque soluzione dell'equazione delle onde unidimensionale.

- (ii) Mostrare che il problema ai valori iniziali

$$\begin{cases} u_{tt}(x, t) = c^2 u_{xx}(x, t) \\ u(x, 0) = p(x) \\ u_t(x, 0) = q(x) \end{cases}$$

ammette come soluzione

$$u(x, t) = \frac{1}{2} (p(x - ct) + p(x + ct)) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} q(s) ds.$$

12.26 Esercizio (Equazione del calore). La diffusione del calore in una sbarra è descritta, secondo Fourier, dall'*equazione del calore*

$$u_t = u_{xx},$$

dove $u(t, x)$ è la temperatura della sbarra in x al tempo t in opportune unità di misura. Mostrare che la funzione $t^{-1/2}e^{-x^2/4t}$ è soluzione per $t > 0$.

12.27 Esercizio. Siano $a, b, c \in \mathbb{R}^n$. Calcolare gli eventuali punti critici delle seguenti funzioni

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{|x-a|} + \frac{1}{|x-b|}, & x \in \mathbb{R}^n \setminus \{a, b\}, \\ f(x) &= |x-a| + |x-b| + |x-c|, & x \in \mathbb{R}^n, \\ f(x) &= |x-a|^2 + |x-b|^2 + |x-c|^2, & x \in \mathbb{R}^n, \\ f(x) &= \max(|x-a|, |x-b|, |x-c|), & x \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$