11. I teoremi del calcolo differenziale, I

11.a Funzioni di classe C^1

Abbiamo visto, cfr Capitolo 9, che l'esistenza delle sole derivate parziali non è sufficiente a garantire la differenziabilita' in un punto dato. Pero' si ha

11.1 Teorema (del differenziale totale). *Sia $f : B(x_0, r) \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $r > 0$. Se le derivate parziali di f sono definite in $B(x_0, r)$ e se tutte le derivate parziali sono continue in x_0, allora f è differenziabile in x_0.*

Dimostrazione. Consideriamo solo il caso $n = 2$, lasciando al lettore il compito di convincersi che la dimostrazione si estende a dimensione qualunque. Conviene cambiare leggermente le notazioni: supponiamo che f sia definita in $B(P_0, r)$ dove $P_0 := (x_0, y_0)$, e sia $P := (x, y) \in B(P_0, r)$. Si ha

$$f(P) - f(P_0) = f(x, y) - f(x_0, y_0) = f(x, y) - f(x, y_0) + f(x, y_0) - f(x_0, y_0). \tag{11.1}$$

Poiche' per ipotesi la funzione $g_1(t) := f(t, y_0)$ è derivabile in ogni punto dell'intervallo chiuso di estremi x_0 e x, per il teorema di Lagrange in una variabile esiste $\xi = \xi(x)$ con $0 < |\xi - x_0| < |x - x_0|$ tale che

$$\begin{aligned} f(x, y_0) - f(x_0, y_0) &= f_x(\xi, y_0)(x - x_0) \\ &= f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + [f_x(\xi, y_0) - f_x(x_0, y_0)](x - x_0) \end{aligned} \tag{11.2}$$

Analogamente per ogni x la funzione $g_2(t) = f(x, t)$ è derivabile in ogni punto t dell'intervallo di estremi y_0 e y e, per il teorema del valor medio, esiste $\eta = \eta(x, y)$ con $0 < |\eta - y_0| \leq |y - y_0|$ tale che

$$f(x, y) - f(x, y_0) = f_y(x, \eta)(y - y_0) = f_y(x_0, y_0)(y - y_0) + [f_y(x, \eta) - f_y(x_0, y_0)](y - y_0).$$

Ora per costruzione i punti (ξ, y_0), (x, η) distano da $P_0 = (x_0, y_0)$ meno che P da P_0, e quindi

$$(\xi, y_0) = (\xi(x), y_0) \to (x_0, y_0), \qquad (x, \eta) = (x, \eta(x, y)) \to (x_0, y_0), \qquad \text{per } P \to P_0,$$

e, per la continuità delle derivate parziali in x^0,

$$\Big| f_x(\xi, y_0) - f_x(x_0, y_0) \Big| + \Big| f_y(x, \eta) - f_y(x_0, y_0) \Big| \to 0 \qquad \text{per } P \to P_0.$$

Deduciamo quindi dalle (11.1), (11.2) che

$$\begin{aligned} f(P) - f(P_0) &= f_x(P_0)(x - x_0) + [f_x(\xi, y_0) - f_x(x_0, y_0)](x - x_0) \\ &\quad + f_y(P_0)(y - y_0) + [f_y(x, \eta) - f_y(x_0, y_0)](y - y_0) \\ &= f_x(P_0)(x - x_0) + f_y(P_0)(y - y_0) + o(|P - P_0|) \qquad \text{per } P \to P_0. \end{aligned}$$

□

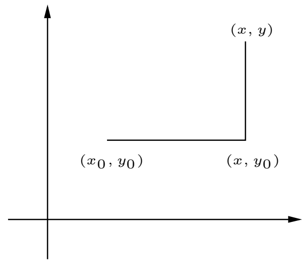

Figura 11.1.

11.2 Osservazione. Si noti che nel Teorema 11.1 non si suppone ne' che la funzione f sia continua ne' tantomeno che le derivate parziali siano continue in tutti i punti di $B(x_0, r)$. Si suppone tuttavia che le derivate parziali $\frac{\partial f}{\partial x^i}(x^1, x^2, \dots, x^n)$ siano continue nel solo punto x_0 *come funzioni di piu' variabili* e non solo come funzioni della sola variabile di derivazione x_i.

11.3 Esercizio. Sia $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e x_0 interno ad A. Se f è continua in x_0, se tutte le derivate parziali di f esistono in $A \setminus \{x_0\}$ e se per ogni $i = 1, \dots, n$ $f_{x^i}(x) \to a^i \in \mathbb{R}$ per $x \to x^0$, allora f è differenziabile in x_0 e $df_{x_0} = \sum_{i=1}^n a^i dx^i$.

11.4 Definizione. *Se f ha derivate parziali in un aperto A e queste sono continue in A, si dice che f è di* classe C^1 *in A e si scrive $f \in C^1(A)$.*

Dal Teorema 11.1 segue che f è differenziabile in A e dalla Proposizione 9.6 f è continua. Percio'

$$C^1(A) \subset C^0(A).$$

11.b Funzioni $C^2(A)$

Se una funzione $f : A \to \mathbb{R}$, A aperto in $\mathbb{R}^n$, ha le derivate prime in un intorno di $x_0 \in A$ e se le derivate prime ammettono a loro volta derivate parziali in x_0, si dice che f *ha le derivate seconde in* x_0. Se $(x^1, x^2, \dots, x^n)$ sono le coordinate standard in $\mathbb{R}^n$, la derivata parziale seconda di f fatta prima rispetto a x^j e poi rispetto a x^i si indica con uno dei simboli

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(x_0), \qquad D_i D_j f(x_0), \qquad \text{oppure} \qquad D_{ij} f(x_0).$$

La matrice $n \times n$ di tutte le derivate seconde di f,

$$\mathbf{H}f(x_0) := [D_i D_j f(x_0)]$$

si chiama *matrice hessiana* di f in x_0. In generale può succedere che

$$D_i D_j f \neq D_j D_i f \qquad \text{per } i \neq j,$$

come ad esempio per la funzione di due variabili

$$f(x,y) = \begin{cases} y^2 \arctan \dfrac{x}{y} & se\ y \neq 0 \\ 0 & se\ y = 0. \end{cases}$$

per la quale $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 0$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = 1$. Si ha però

11.5 Teorema (di Schwarz, o dell'inversione dell'ordine di derivazione). *Sia $f : B(x_0, r) \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $r > 0$. Se per $i \neq j$ le derivate parziali miste*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(x) \qquad e \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i}(x)$$

esistono in tutto $B(x_0, r)$ e sono continue in x_0, allora

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(x_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i}(x_0).$$

Dimostrazione. Facciamo la dimostrazione per funzioni di due variabili, lasciando al lettore il compito di convincersi che la dimostrazione si estende anche al caso di piu' variabili.

Sia dunque $P_0 := (x_0, y_0)$, e $P = (x, y) \in B(P_0, r)$. Consideriamo quello che a volte si chiama il *quoziente differenziale secondo*

$$A(t) := \frac{f(x_0 + t, y_0 + t) - f(x_0 + t, y_0) - f(x_0, y_0 + t) + f(x_0, y_0)}{t^2}$$

che è ben definito per $0 < |t| < r$. Se introduciamo le funzioni

$$g(x) := f(x, y_0 + t) - f(x, y_0), \qquad h(y) := f(x_0 + t, y) - f(x_0, y),$$

si ha

$$A(t) = t^{-2}(g(x_0 + t) - g(x_0)) = t^{-2}(h(y_0 + t) - h(y_0)).$$

Applicando il teorema del valor medio (in una variabile), si ottiene

$$A(t) = t^{-1} g'(\xi) = t^{-1}(f_x(\xi, y_0 + t) - f_x(\xi, y_0))$$

per qualche ξ compreso tra x_0 e $x_0 + t$. Applicando ancora il teorema del valor medio in una variabile

$$A(t) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\xi, \eta)$$

dove η è un punto compreso tra y_0 e $y_0 + t$. Analogamente si ottiene

$$A(t) = t^{-1} h'(\beta) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\alpha, \beta)$$

dove α è compreso tra x_0 e $x_0 + t$ e β tra y_0 e $y_0 + t$.

Quando $t \to 0$ ambedue i punti (α, β) e (ξ, η) (che dipendono da t) tendono a (x_0, y_0). Per la continuità delle derivate parziali seconde miste si ottiene quindi la tesi passando al limite per $t \to 0$ in

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\xi, \eta) = A(t) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\alpha, \beta).$$

□

11.6 Definizione. *Se una funzione f ammette derivate parziali seconde in un aperto A e queste sono continue in A, si dice che f è di* classe C^2 *in A e si scrive $f \in C^2(A)$.*

11.7 Esercizio. Sia $|x| := \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}^{1/2}$. Calcolare per $x \neq 0$ le derivate parziali prime e seconde di $|x|$, e di $|x|^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

11.8 Esercizio. Sia A una matrice in $M_{n,n}$. Calcolare le derivate parziali prime e seconde della forma quadratica $Ax \bullet x$.

Un semplice corollario del teorema di Schwarz è

11.9 Corollario. *Ogni funzione $f \in C^2(A)$ su un aperto A di $\mathbb{R}^n$ ha le derivate miste uguali, $D_{ij}f(x) = D_{ji}f(x)$ $\forall x \in A$, $\forall i,j = 1,\dots,n$. In altre parole la matrice $\mathbf{H}f(x)$ è simmetrica $\forall x \in A$.*

11.c Funzioni $C^k(A)$ e $C^\infty(A)$

Procedendo per induzione su k si definiscono le derivate parziali di ordine k. Si dice che una funzione $f : A \to \mathbb{R}$, ha *le derivate parziali di ordine* k, $k \geq 2$, in un punto x_0 interno ad A se f ha derivate parziali prime in tutto un intorno di x_0 e queste ultime hanno le derivate parziali di ordine $k-1$ in x_0. Le derivate parziali di ordine k di f sono l'insieme delle derivate parziali di ordine $k-1$ delle sue derivate prime. Richiamando all'interno della costruzione induttiva il teorema del differenziale totale, il fatto che le funzioni differenziabili sono continue e il teorema di Schwarz è facile convincersi che se f ha le derivate parziali di ordine k in x_0,

- f ha tutte le derivate parziali di ordine inferiore a k in un intorno di x_0 e che queste ultime sono tutte funzioni continue in x_0,
- le derivate di ordine maggiore o uguale a due e di ordine strettamente inferiore a k non dipendono dall'ordine con cui vengono eseguite.

Conviene poi porre

11.10 Definizione. *Se le componenti di una funzione $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, A aperto, ammettono derivate parziali di ordine k in ogni punto di A e se queste ultime sono funzioni continue in A, si dice che f è di* classe $C^k(A)$ *e si scrive $f \in C^k(A)$ o, ove fosse necessario, $f \in C^k(A, \mathbb{R}^m)$. Se f ammette in A derivate di qualunque ordine, si dice che f è di* classe C^∞ *e si scrive $f \in C^\infty(A)$ (o $f \in C^\infty(A, \mathbb{R}^m)$).*

Da quanto detto

$$C^\infty(A) \subset C^k(A) \subset C^{k-1}(A) \subset \cdots \subset C^2(A) \subset C^1(A) \subset C^0(A).$$

Applicando ancora una volta il teorema di Schwarz si ottiene

11.11 Corollario. *Sia A aperto in $\mathbb{R}^n$. Allora per ogni $f \in C^k(A)$ le derivate di f di ordine minore o uguale a k non dipendono dall'ordine con cui vengono eseguite.*

Di conseguenza per specificare una derivata di ordine k di una funzione di classe C^k, bastera' specificare il numero di derivate che si fanno rispetto a ciascuna variabile. Ad esempio, se $f \in C^6(\mathbb{R}^3)$, si parla della derivata sesta di f fatta 3 volte rispetto ad x, due volte rispetto a y e una volta rispetto a z in (x_0, y_0, z_0) e la si indica con

$$\frac{\partial^6 f}{\partial x^3 \partial^2 y \partial z}(x_0, y_0, z_0).$$

11.d Il teorema del valor medio per funzioni scalari

11.12 Teorema. *Sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione con tutte le derivate direzionali in tutti i punti interni ad A. Siano poi x_0, x due punti interni ad A tali che il segmento congiungente x con x_0 sia contenuto in A e sia $h := x - x_0$. Allora la funzione $g(t) := f(x_0 + th)$, $t \in [0,1]$, è ben definita e derivabile in $[0,1]$, e*

$$g'(t) = \frac{\partial f}{\partial h}(x_0 + th) \qquad \forall t \in [0,1]. \tag{11.3}$$

Inoltre si ha

(i) *(Teorema del valor medio) esiste $s \in]0,1[$ tale che*

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = \frac{\partial f}{\partial h}(x_0 + sh), \tag{11.4}$$

(ii) *(Teorema della media integrale) se $g'(t)$, $t \in [0,1]$, è continua, allora*

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial h}(x_0 + th)\, dt. \tag{11.5}$$

Dimostrazione. (i) Posto $z := x_0 + th$ si ha

$$g(t+\tau) - g(t) = f(x_0 + (t+\tau)h) - f(x_0 + th) = f(z + \tau h) - f(z)$$

e quindi

$$\frac{g(t+\tau) - g(t)}{\tau} = \frac{f(z + \tau h) - f(z)}{\tau} \to \frac{\partial f}{\partial h}(z) \qquad \text{per } \tau \to 0.$$

cioè g è derivabile e vale la (11.5). (i) e (ii) seguono applicando rispettivamente il teorema di Lagrange e il teorema fondamentale del calcolo alla funzione $g(t)$, $t \in [0,1]$. □

11.13 . Il teorema del valor medio si applica in particolare alle funzioni differenziabili in A, per le quali

$$\frac{\partial f}{\partial h}(x) = \mathbf{D}f(x)h = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i}(x)h^i$$

per ogni $h \in \mathbb{R}^n$. Segue che le (11.4) e (11.5) si riscrivono rispettivamente come

$$f(x) - f(x_0) = \mathbf{D}f(x_0 + s(x - x_0))(x - x_0) \tag{11.6}$$

$$\begin{aligned} f(x_0 + h) - f(x_0) &= \int_0^1 \mathbf{D}f(x_0 + s(x - x_0))(x - x_0)\, ds \qquad (11.7) \\ &= \sum_{i=1}^n \Big(\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0 + s(x - x_0))\, ds \Big)(x - x_0)^i. \end{aligned}$$

11.14 Esercizio. Una conseguenza del Teorema 11.12 è la seguente

Proposizione. *Sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione definita su un aperto A di $\mathbb{R}^n$ e dotata di tutte le derivate direzionali in tutti i punti di A. Se*

$$M := \sup_{x \in A, |v| \le 1} \Big| \frac{\partial f}{\partial v}(x) \Big| < +\infty,$$

allora f è continua in A. Piu' precisamente, se A è un aperto convesso, *allora f è lipschitziana in A e*

$$|f(y) - f(x)| \le M\, |y - x| \qquad \forall x, y \in A, \tag{11.8}$$

[*Sugg.* Osservare che, essendo la continuità una proprietà locale, la prima parte della tesi segue dalla seconda. Per provare la seconda parte della tesi, basta applicare il teorema del valor medio.]

11.15 Esercizio. Mostrare che su aperti non convessi la (11.8) dell'Esercizio 11.14 è in generale falsa.

11.16 Esercizio. Dimostrare il seguente corollario della proposizione in Esercizio 11.14

Corollario. *Sia A un aperto connesso in $\mathbb{R}^n$ e $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione con derivate direzionali in ogni direzione ed in ogni punto di A con $\frac{\partial f}{\partial v}(x) = 0$ $\forall v \in \mathbb{R}^n$ e $\forall x \in A$. Allora f è costante in A.*

11.e Il teorema della media integrale per mappe vettoriali

Per mappe $f : A \to \mathbb{R}^m$ vettoriali, $m > 1$, anche di classe $C^1(A)$, è facile convincersi che non è possibile avere un corrispondente diretto del teorema di Lagrange (11.4).

11.17 Esercizio. Dare un esempio che dimostri come il teorema di Lagrange non possa essere esteso alle curve.
Soluzione. Se $f(t) := (\cos t, \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$, si ha $0 = f(2\pi) - f(0)$ e $f'(s) \neq 0$ $\forall s \in [0, 2\pi]$ essendo $|\phi'(s)| = 1$.

Il teorema della media integrale (11.5) puo' invece estendersi al caso di mappe vettoriali. Per questo serve osservare che si puo' definire l'integrale per funzioni continue a valori in $\mathbb{R}^m$, integrando ogni componente, i.e., ponendo

$$\int_a^b f(s)\,ds := \left(\int_a^b f^1(s)\,ds, \int_a^b f^2(s)\,ds \ldots, \int_a^b f^n(s)\,ds\right)^T$$

per ogni $f := (f^1, f^2, \ldots, f^m)^T \in C^0([a, b], \mathbb{R}^m)$.

Se ora $|\ |$ è una norma su $\mathbb{R}^m$, $t_0 = a, t_1, \ldots, t_N = b$ è una suddivisione di $[a, b]$ e $\tau_i \in [t_i, t_{i+1}]$, dalla diseguaglianza triangolare segue che

$$\Big|\sum_{i=1}^N f(\tau_i)(t_{i+1} - t_i)\Big| \leq \sum_{i=1}^N |f(\tau_i)(t_{i+1} - t_i)| = \sum_{i=1}^N |f(\tau_i)|\,|t_{i+1} - t_i|.$$

Passando al limite al tendere dell'ampiezza della suddivisione a zero, si trova la diseguaglianza

$$\Big|\int_a^b f(t)\,dt\Big| \leq \int_a^b |f(t)|\,dt. \tag{11.9}$$

Applicando l'uguaglianza della media integrale per funzioni scalari cfr. (11.5) a ciascuna componente di una funzione vettoriale, si dimostra

11.18 Proposizione (media integrale). *Sia $f : B(x_0, r) \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una funzione di classe C^1. Per ogni $x, y \in B(x_0, r)$ vale la formula della* media integrale

$$f(x) - f(y) = \int_0^1 \mathbf{D}f(y + t(x - y))(x - y)\,dt$$

La formula della media è rilevante anche perche' fornisce una stima sugli incrementi finiti di una mappa, anche vettoriale, in termini della matrice jacobiana.

Se $\mathbf{L} \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ e

$$||\mathbf{L}|| := \sup\Big\{ \frac{|\mathbf{L}(h)|}{|h|} \,\Big|\, h \neq 0 \Big\},$$

è il coefficiente di massima dilatazione di $\mathbf{L}$ si ha

11.19 Proposizione. *Sia $f : B(x_0, r) \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una funzione dotata di tutte le derivate direzionali in tutti in punti di $B(x_0, r)$. Allora*

$$|f(x) - f(y)| \leq K\,|x - y| \tag{11.10}$$

dove

$$K := \sup\Big\{ ||\mathbf{D}f(z)|| \,\Big|\, z \in B(x_0, r) \Big\}.$$

Dimostrazione. Dalla definizione di K,

$$|\mathbf{D}f(z)h| \leq ||\mathbf{D}f(z)||\,|h| \leq K\,|h|$$

per ogni $h \in \mathbb{R}^n$ e $z \in B(x_0, r)$. Segue dalla formula della media integrale e da (11.9)

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &\leq \Big| \int_0^1 \mathbf{D}f(y + t(x-y))(x-y)\,dt \Big| \leq \int_0^1 |\mathbf{D}f(y + t(x-y))(x-y)|\,dt \\ &\leq \int_0^1 ||\mathbf{D}f(y + t(x-y))||\,dt\,|x-y| \leq K\,|x-y|. \end{aligned}$$

□

11.f Esercizi

11.20 Esercizio. Calcolare dove esistono, le derivate parziali, le derivate direzionali e il differenziale delle seguenti funzioni

$$(x \mid x_0), \qquad |x|,$$

$$|x|^2, \qquad xe^{x^2+y^2},$$

$$\frac{xy}{1+x^2}, \qquad x^{3/2}y,$$

$$e^{x^2+y} + \int_0^x \sin(yt^2)\,dt, \qquad \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{per } (x,y) \neq 0 \\ \lambda & \text{per } (x,y) = (0,0) \end{cases},$$

$$\begin{cases} \frac{x^2y}{x^2+y^2} & \text{per } (x,y) \neq 0 \\ 0 & \text{per } (x,y) = (0,0) \end{cases}, \qquad \begin{cases} \frac{x^3y}{x^2+y^2} & \text{per } (x,y) \neq 0 \\ 0 & \text{per } (x,y) = (0,0) \end{cases},$$

$$\begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4} & \text{per } (x,y) \neq 0 \\ 0 & \text{per } (x,y) = (0,0) \end{cases}, \qquad \begin{cases} \frac{y\sin(x^2)}{x^2+y^2} & \text{per } (x,y) \neq 0 \\ 0 & \text{per } (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

11.21 Esercizio. Scrivere il piano tangente in $(0, 0)$ al grafico delle seguenti funzioni

$$xy, \qquad e^{xy}, \qquad (x^2 + y^2)\log(x^2 + y^2).$$

11.22 Esercizio. Determinare i punti della superficie $z = x^4 - 4xy^3 + 6y^2 - 2$ nei quali la superficie ha piano tangente orizzontale.

11.23 Esercizio. Scrivere $\dfrac{\partial}{\partial v}\dfrac{\partial f}{\partial v}$ in termini delle componenti di v e delle derivate parziali seconde di f.

11.24 Esercizio. Mostrare che $\mathbf{H}|x| = \dfrac{1}{|x|}\Big(Id - \dfrac{xx^T}{|x|^2}\Big)$, i.e.,

$$\frac{\partial^2 |x|}{\partial x^i \partial x^j}(x) = \frac{1}{|x|}\Big(\delta_{ij} - \frac{x^i x^j}{|x|^2}\Big)$$

per ogni $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$.

11.25 Esercizio. Mostrare che per ogni matrice $\mathbf{A} \in M_{m,n}$ si ha $|\mathbf{A}x| = O(|x|)$ per $x \to 0$.

11.26 Esercizio. Siano $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto, $f \in C^1(\Omega)$ e $K \subset \Omega$ compatto. Mostrare che f è lipschitziana su K.

11.27 Esercizio (Peano). Sia $\varphi(t,x) = (t^2 - x^2)/(t^2 + x^2)$ e $f(t,x) := xt\varphi(x,t)$. Mostrare che

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t}(0,0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial x}(0,0).$$

11.28 Esercizio (Funzioni omogenee e formula di Eulero). Sia α un numero reale. Una funzione f si dice *omogenea di grado* α se

$$f(tx) = t^\alpha f(x) \qquad \forall\ x \neq 0 \text{ e } t > 0.$$

Ovviamente l'insieme di definizione di una funzione omogenea è un *cono* con vertice l'origine che può o no far parte dell'insieme di definizione. Convincersi che

(i) la funzione $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$, $f(x,y) := \frac{2xy}{x^2+y^2}$ è omogenea di grado 0,

(ii) la funzione $f : \mathbb{R}^3 \setminus \{yz - y^2 = 0\} \to \mathbb{R}$ $f(x,y,z) := \frac{x+y-z}{yz-y^2}$ è omogenea di grado -1,

(iii) ogni forma quadratica $Q(x) = Ax \bullet x = \sum_{i,j=1}^n A_{ij}x^i x^j$ è omogenea di grado 2 e quindi la funzione $f(x) := Q(x)^{\alpha/2}$ è omogenea di grado α.

Provare

Teorema (di Eulero). *Sia f di classe C^1 in $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. f è omogenea di grado α se e solo se*

$$\nabla f(x) \bullet x = \alpha f(x) \qquad \forall x \neq 0.$$