16. Superfici e immersioni

Un passo essenziale per lo sviluppo dell'analisi e della geometria è la realizzazione dell'idea intuitiva di superficie regolare. Una sfera, un cilindro sono superfici regolari in $\mathbb{R}^3$, un cono no (non vicino al vertice). La nozione su cui questa idea si sviluppa è quella di *diffeomorfismo*, e l'analisi delle proprietà relative fa un uso essenziale del teorema di locale invertibilità.

16.a Diffeomorfismi

16.1 Definizione. *Siano $X \subset \mathbb{R}^r$ e $Y \subset \mathbb{R}^n$. Una mappa $\varphi : X \to \mathbb{R}^n$ si dice un* diffeomorfismo da X su Y *se*

(i) *φ è una bigezione tra X e Y,*
(ii) *φ ha una estensione di classe C^1 ad un aperto $\Omega \supset X$ di $\mathbb{R}^r$,*
(iii) *φ^{-1} ha una estensione di classe C^1 ad un aperto $\Delta \supset Y$ di $\mathbb{R}^n$.*

Ovviamente φ è un diffeomorfismo da X a Y se e solo se φ^{-1} è un diffeomorfismo da Y su X. Si dice che X e Y sono *diffeomorfi* se esiste un diffeomorfismo tra X e Y.

16.2 Esercizio. Ogni diffeomorfismo $\varphi : X \to \mathbb{R}^n$ è una applicazione aperta da X su $\varphi(X)$, i.e., manda aperti di X in aperti di $\mathbb{R}^n$, quindi un omeomorfismo tra X e $\varphi(X)$.

Se $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}^n$ è un diffeomorfismo da un *aperto* $\Omega \subset \mathbb{R}^r$, l'immagine $Y := \varphi(\Omega) \subset \mathbb{R}^n$ si dice una *superficie parametrizzata di dimensione* r di $\mathbb{R}^n$ e la mappa φ una *parametrizzazione regolare* di Y. In questo caso, i.e, $\varphi \in C^1(\Omega)$ ed esiste una funzione $\psi : W \supset \varphi(\Omega) \to \mathbb{R}^r$ di classe $C^1(W)$ definita su un aperto $W \supset \varphi(\Omega)$ tale che $\psi(\varphi(x)) = x$ per ogni $x \in \Omega$, derivando l'ultima identità con la regola della catena, si ottiene

$$\mathbf{D}\psi(\varphi(x))\mathbf{D}\varphi(x) = \mathrm{Id} \qquad \text{per ogni } x \in \Omega;$$

perciò $\mathbf{D}\varphi(x) : \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}^n$ è iniettiva. Si è provato

16.3 Proposizione. *Se $\varphi : \Omega \subset \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}^n$ è un diffeomorfismo* da un aperto Ω *di $\mathbb{R}^r$ in $\mathbb{R}^n$, allora $r \le n$ e per ogni $x \in \Omega$ $\mathbf{D}\varphi(x)$ è iniettiva,* $\ker \mathbf{D}\varphi(x) = \{0\}$ *o, equivalentemente, $\mathbf{D}\varphi(x)$ ha rango massimo ($= r$).*

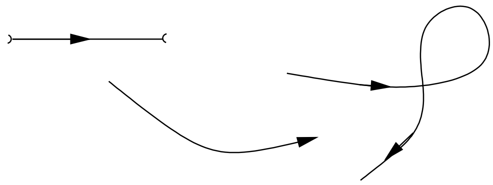

Figura 16.1. Un'applicazione regolare non iniettiva.

16.b Vettori tangenti

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^r$ aperto e $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}^n$ un diffeomorfismo. Per $y_0 \in \varphi(\Omega)$, sia $x_0 \in \Omega$ l'unico punto tale che $\varphi(x_0) = y_0$.

16.4 Definizione. *Si chiama* spazio tangente *alla r-superficie parametrizzata $\varphi(\Omega)$ in $y_0 \in \varphi(\Omega)$ il sottospazio lineare di $\mathbb{R}^n$ immagine dell'applicazione lineare tangente a φ in x_0,*

$$\mathrm{Tan}_{y_0}\varphi(\Omega) := \mathrm{Im}\,(\mathbf{D}\varphi(x_0)).$$

Il piano tangente a $\varphi(\Omega)$ in y_0 è quindi il traslato di $\mathrm{Tan}_{y_0}\varphi(\Omega)$ *dato dall'immagine della applicazione $x \to y_0 + \mathbf{D}\varphi(x_0)(x - x_0)$.*

Essendo φ un diffeomorfismo, $\mathbf{D}\varphi(x_0)$ ha rango massimo ($= r$), dunque $\mathrm{Tan}_{y_0}\varphi(\Omega)$ *ha dimensione r.*

Si deve osservare che lo spazio tangente a $\varphi(\Omega)$ in un suo punto, per come è stato definito, dipende a priori dalla immersione φ, e non solo dalla immagine $\varphi(\Omega)$. Potrebbe cioè esistere un'altra immersione $\psi : \Delta \to \mathbb{R}^n$ da un aperto Δ di $\mathbb{R}^s$ con $\psi(\Delta) = \varphi(\Omega)$ tale che si abbia $\psi(u_0) = y_0 = \varphi(x_0)$ e $\mathrm{Im}\,(\mathbf{D}\psi(x_0)) \neq \mathrm{Im}\,(\mathbf{D}\varphi(u_0))$. Questo non accade perché dalla Proposizione 16.5 seguente si ha $r = s$ e $\psi = \varphi \circ h$, per un opportuno diffeomorfismo $h : \Delta \to \Omega$. Perciò

$$\mathbf{D}\psi(u_0) = \mathbf{D}\varphi(x_0)\mathbf{D}h(u_0).$$

Essendo h non singolare, si conclude $\mathrm{Im}\,(\mathbf{D}\psi(u_0)) = \mathrm{Im}\,(\mathbf{D}\varphi(x_0))$. Questo prova tra l'altro che la dimensione di una r-superficie immersa dipende solo dalla superficie e non dalla particolare immersione utilizzata per parametrizzarla.

16.5 Proposizione. *Siano Ω aperto in $\mathbb{R}^r$, Δ aperto in $\mathbb{R}^s$ e $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}^n$, $\psi : \Delta \to \mathbb{R}^n$ due diffeomorfismi di classe C^1. Se $\varphi(\Omega) = \psi(\Delta)$ allora esiste un diffeomorfismo $h : \Delta \to \Omega$ di classe C^1 tale che $\psi = \varphi \circ h$. In particolare $r = s$.*

Dimostrazione. Ovviamente deve essere $h := \varphi^{-1} \circ \psi$ e h è biunivoca. Basterà provare che h e h^{-1} sono di classe C^1. Esistono allora un aperto $W \supset \varphi(\Omega)$ e una mappa $f : W \to \Omega$ che estende φ^{-1}. Pertanto $h(z) = \varphi^{-1} \circ \psi(z) = f(\psi(z))$ per ogni $z \in \psi^{-1}(W)$. h è dunque composizione di funzioni C^1 e quindi è di classe C^1. In modo analogo scambiando φ con ψ si prova che $h^{-1} \in C^1$. In definitiva h è un diffeomorfismo tra Δ e Ω. In particolare $r = s$, cfr. la Proposizione 16.3. □

Un caso tipico di diffeomorfismo e per un certo aspetto l'unico (si veda il Teorema 16.7), è il caso dei grafici di funzioni di classe C^1.

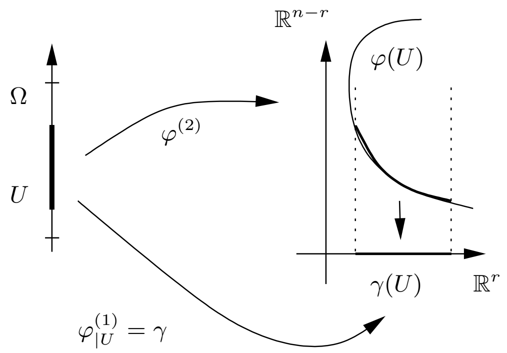

Figura 16.2. Illustrazione della dimostrazione del Teorema 16.7.

16.6 Proposizione. *Sia* $\Omega \subset \mathbb{R}^r$ *aperto e* $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ *una mappa di classe* C^1. *Allora la mappa* $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ *data da* $\varphi(x) := (x, f(x))$ *è un diffeomorfismo di* Ω *sul* grafico di f

$$G_f := \Big\{(x, y) \in \Omega \times \mathbb{R}^m \,|\, y = f(x)\Big\}.$$

Dimostrazione. Infatti $\varphi(x) = (x, f(x))$ $x \in \Omega$, ha immagine il grafico di f, è iniettiva e l'inversa $\varphi^{-1} : G_f \to \Omega$ ha una estensione di classe C^∞, la *proiezione ortogonale sul primo fattore* $\Omega \times \mathbb{R}^m \to \Omega$ data da $(x, y) \to x$. □

In particolare, con le notazioni della Proposizione 16.6, $\mathrm{Tan}_{(x_0, f(x_0))} G_f = \mathrm{Im}\,\mathbf{A}$ dove $\mathbf{A}$ è la matrice $(n+m) \times n$ data da

$$\mathbf{A} = \left(\begin{array}{|c|} \hline \\ \mathrm{Id} \\ \\ \hline \mathbf{D}f(x_0) \\ \hline \end{array}\right)$$

Abbiamo già osservato, cfr. Proposizione 16.3, che, se f è un diffeomorfismo locale, allora $r \leq n$ e $\mathbf{D}f(x)$ ha rango massimo. Il seguente teorema da una condizione necessaria e sufficiente affinche' una mappa sia *localmente* un diffeomorfismo.

16.7 Teorema (di invertibilità locale). *Sia* $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}^n$ *una funzione di classe* C^1 *definita su un aperto* $\Omega \subset \mathbb{R}^r$, $r < n$. *Se* $\mathbf{D}\varphi(u_0)$ *ha rango massimo allora esiste un intorno* U *di* u_0 *in* $\mathbb{R}^r$ *tale che* $\varphi_{|U}$ *è un diffeomorfismo e* $\varphi(U)$ *è un grafico rispetto ad un* r*-piano coordinato di* $\mathbb{R}^n$.

Dimostrazione. Non è restrittivo operare una permutazione delle coordinate in $\mathbb{R}^n$ e supporre che le prime r righe di $\mathbf{D}\varphi(u_0)$ siano indipendenti, i.e.,

$$\det \frac{\partial(\varphi^1, \dots, \varphi^r)}{\partial u}(u_0) \neq 0.$$

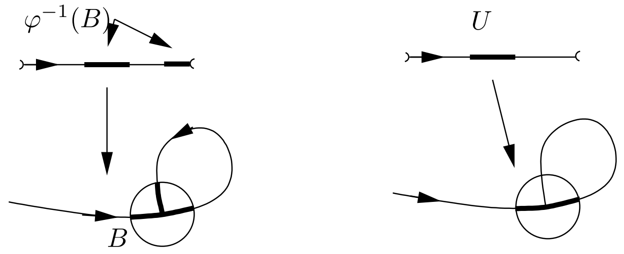

Figura 16.3. (a) L'immersione nel disegno non è un omeomorfismo: $\varphi(\Omega)\cap B$ è connessa, mentre la sua controimmagine $\varphi^{-1}(B)$ non lo è. (b) Tuttavia $\varphi_{|U}$ è un diffeomorfismo.

Decomponiamo quindi $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^{n-r}$, e indichiamo con (x, y), $x \in \mathbb{R}^r$, $y \in \mathbb{R}^{n-r}$, le coordinate in $\mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^{n-r}$ e con $\varphi^{(1)} := (\varphi^1, \varphi^2, \dots, \varphi^r)$, $\varphi^{(2)} := (\varphi^{r+1}, \dots, \varphi^n)$ le varie componenti di φ. La mappa $\varphi^{(1)} : \Omega \to \mathbb{R}^r$ ha perciò jacobiano non nullo in u_0. Segue dal teorema di invertibilità locale l'esistenza di un intorno aperto $U \subset \mathbb{R}^r$ di u_0 in modo che la restrizione $\gamma := \varphi^{(1)}_{|U} : U \to \mathbb{R}^r$ è aperta ed ha un'inversa $h : g(U) \to U$ di classe C^1. Pertanto

$$\begin{cases} x = \varphi^{(1)}(u), \\ y = \varphi^{(2)}(u) \end{cases}, \quad u \in U \qquad \text{se e solo se} \qquad \begin{cases} u = h(x), \\ y = \varphi^{(2)}(h(x)), \end{cases}, \quad x \in g(U).$$

In altri termini, la mappa $\psi : g(U) \times \mathbb{R}^{n-r} \to U$, $\psi(x, y) = h(x)$, è di classe C^1 e inverte $\varphi_{|U}$ e $\varphi(U)$ è il grafico della funzione $k(x) := \varphi^{(2)}(h(x))$, $x \in g(U)$. □

16.c Sottovarietà

L'immagine di un diffeomorfismo $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}^n$, Ω aperto di $\mathbb{R}^k$, $k < n$, realizza in parte l'idea intuitiva di "superficie" parametrizzata con la parametrizzazione φ perche' molte sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$ che vorremmo fossere superfici di dimensione k non sono parametrizzabili su un aperto di $\mathbb{R}^k$ mediante un diffeomorfismo. Ad esempio, il cerchio $S^1 = \{x^2 + y^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^2$ non è diffeomorfo ad alcun intervallo di $\mathbb{R}$. Se lo fosse, S^1 sarebbe in particolare omeomorfo ad un intervallo, cosa che abbiamo visto essere falsa. Diamo qundi la seguente

16.8 Definizione. *Sia $S \subset \mathbb{R}^n$. Si dice che*

(i) S *è localmente* un grafico C^1 r-dimensionale *se per ogni $x \in S$ esiste un aperto $\Omega_x \subset \mathbb{R}^n$ tale che $\Omega_x \cap S$ è un grafico C^1 rispetto ad un r-piano coordinato,*
(ii) S *è una* r-sottovarietà C^1 *di $\mathbb{R}^n$ se per ogni $x \in S$ esiste un aperto $\Omega_x \subset \mathbb{R}^n$ tale che $\Omega_x \cap S$ è diffeomorfo ad un aperto $U \subset \mathbb{R}^r$. r è la* dimensione *della sottovairetà S.*

Segue immediatamente dalla Proposizione 16.6 e dal Teorema 16.7, cfr. la Proposizione 16.3

16.9 Teorema. *$S \subset \mathbb{R}^n$ è una r-sottovarietà C^1 se e solo se S è localmente un grafico C^1 r-dimensionale.*

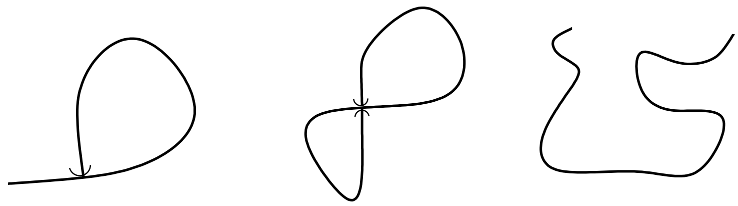

Figura 16.4. (i),(ii) Due esempi di 1-superfici immerse in $\mathbb{R}^2$. (iii) Una 1-sottovarietà in $\mathbb{R}^2$.

Ovviamente una r-sottovarietà M ha in ogni punto x uno spazio tangente $\mathrm{Tan}_x M$. Lo si puo calcolare scelgliento una arbitraria paramaterizzazione regolare di un intorno di x $\varphi : \Omega \subset \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}^n$ e calcolando

$$\mathrm{Tan}_x M = \mathrm{Im}\, \mathbf{D}\varphi(u), \qquad \varphi(u) = x.$$

16.10 Esercizio. S^1 è localmente un grafico di una funzione C^1 definita su un intervallo e quindi una 1-sottovarietà.

16.11 Esercizio. Mostrare che:
(i) In $\mathbb{R}^2$ l'iperbole $x^2 - y^2 = 1$, la parabola $y = x^2$, l'ellisse $x^2 + 2y^2 = 1$ definiscono 1-sottovarietà di classe C^∞.
(ii) La sfera standard di $\mathbb{R}^n$
$$S^{n-1} := \Big\{ x \in \mathbb{R}^n \,\Big|\, |x|^2 = 1 \Big\}$$
è una $(n-1)$-sottovarietà di $\mathbb{R}^n$ di classe C^∞.
(iii) L'insieme $\{(x, y) \mid x^2 = y^2\}$ non è una sottovarietà di $\mathbb{R}^n$.

16.d Superfici immerse

Una genereralizzazione differente dell'immagine di un diffeomorfismo è la seguente.

16.12 Definizione. *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^r$ e $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}^n$ di classe C^1. Si dice che φ è una* immersione *se φ è iniettiva e per ogni $u \in \Omega$ esiste $\delta > 0$ tale che la restrizione di φ a $B(u, \delta)$ è un diffeomorfismo. L'immagine $\varphi(\Omega)$ di una immersione φ si chiama una r-*superficie immersa[1] *di $\mathbb{R}^n$. Il numero r è la* dimensione *della r-superficie immersa $\varphi(\Omega)$.*

Questa volta la genereralizzazione della nozione di diffeomorfismo è fatta operando una localizzazione nello spazio dei parametri.

È facile convincersi che la 1-superficie immersa della Figura 16.4 non è, neppure localmente, il grafico di una mappa C^1. In particolare, in generale le k-superfici immerse non sono k-sottovairetà. Viceversa, il cerchio $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ non è una 1-superfice immersa e dunque le k-sottovarietà non sono in generale k-superfici immmerse. Tuttavia, *se $S \subset \mathbb{R}^n$ è una r-sottovarietà, S è localmente una r-superficie immersa essendo S localmente diffeomorfa ad un* aperto *di $\mathbb{R}^r$.*

In generale, una immersione $\varphi : \Omega \subset \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}^n$ pur essendo iniettiva, non sempre è un diffeomorfismo sull'immagine. Di più, non è in generale possibile

[1] immersed-submanifold in inglese.

estendere la mappa inversa $\varphi^{-1} : \varphi(\Omega) \to \Omega$ di una immersione ad una funzione $h : W \to U$ di classe C^1 definita su un aperto W che contenga $\varphi(\Omega)$. Non è neanche detto che φ^{-1} si possa estendere ad una funzione continua, neanche in intorni arbitrariamente piccoli di punti dell'immagine $\varphi(\Omega)$, cfr. gli esempi in Figura 16.3.