2. Serie numeriche, I

I processi di *somma infinita* compaiono fin dall'antichità. Aristotele nella *Fisica* è cosciente del fatto che la *serie* geometrica

$$1 + q + q^2 + q^3 + \dots$$

ha somma finita se $|q| < 1$ e François Viète (1540–1603) calcola nel 1593

$$1 + q + q^2 + q^3 + \dots = \frac{1}{1-q}.$$

Nel medioevo Nicole d' Oresme (1323–1382) dimostra che la *serie armonica*

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$$

è divergente. Ma è con la nascita del Calcolo ad opera di Sir Isaac Newton (1643–1727) e Gottfried von Leibniz (1646–1716) che le serie infinite diventano parte integrante del calcolo differenziale e integrale.

In questo capitolo illustriamo alcuni metodi per lo studio della convergenza dei processi di somma infinita o *serie*, discutendo vari esempi.

Il processo di somma

Data una successione $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$, si puo' costruire una nuova successione $\{s_n\}$ sommando via via i termini della successione $\{a_n\}$, i.e., ponendo

$$\begin{cases} s_0 = a_0, \\ s_{n+1} = s_n + a_{n+1}, \quad \forall n \geq 0, \end{cases} \tag{2.1}$$

cioè

$$s_n := a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{j=0}^{n} a_j.$$

La successione $\{s_n\}$ si chiama la *successione delle somme parziali di a_n* o anche serie della successione a_n e si usa indicarla con il simbolo

$$\sum_{j=0}^{\infty} a_j.$$

Insomma la frase *si consideri la serie $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$,* è sinonimo di *si consideri la successione delle somme parziali $\sum_{j=0}^{n} a_j$, $n \geq 0$ della successione a_n.*

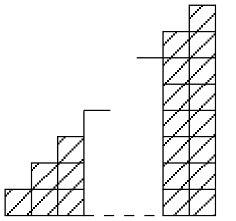

Figura 2.1. $\sum_{j=1}^{n} j = n(n+1)/2$.

2.1 Esercizio (Somma dei primi n naturali). Per ogni naturale n, c'è una *formula chiusa*, i.e. una formula algebrica con un numero di operazioni da effettuare indipendente da n per la somma dei primi n naturali. Dimostrare che

$$S_1(n) := 1 + 2 + \cdots + n = \sum_{j=0}^{n} j = \frac{n(n+1)}{2}. \tag{2.2}$$

Soluzione. Se ne possono dare varie dimostrazioni.

(i) Sembra che la seguente dimostrazione sia stata data da Gauss all'età di sette anni. Si scrive

$$\begin{array}{ccccccccccc} S_1(n) & = & 1 & + & 2 & + & \dots & + & (n-1) & + & n \\ S_1(n) & = & n & + & (n-1) & + & \dots & + & 2 & + & 1, \end{array}$$

e sommando le due eguaglianze si ottiene

$$2S_1(n) = (n+1) + (n+1) + \cdots + (n+1) = n(n+1).$$

(ii) Disponendo quadrati di lato 1 come in Figura 2.1, l'area totale dei quadrati tratteggiati è

$$S_1(n) = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}.$$

(iii) La successione $x_n := n(n+1)/2$, $n \geq 0$, soddisfa le

$$\begin{cases} x_0 = 0, \\ x_{n+1} = x_n + (n+1), \quad \forall n \geq 0. \end{cases}$$

che definiscono appunto $S_1(n)$.

2.2 Esercizio (Somma dei termini di una progressione geometrica). Sia $x \in \mathbb{R}$. La serie

$$\sum_{j=0}^{\infty} x^j$$

si chiama serie geometrica di ragione x. C'è una formula chiusa per le somme parziali della progressione geometrica. Dimostrare che

Proposizione. *Si ha*

$$\sum_{j=0}^{n} x^j = \begin{cases} \dfrac{q^{n+1}-1}{q-1} & \text{se } x \neq 1, \\ n+1 & \text{se } x = 1. \end{cases} \tag{2.3}$$

Soluzione. Se $q = 1$ ovviamente $\sum_{j=0}^{n} q^j = n + 1$. Se invece $q \neq 1$, si puo' procedere in vari modi. Ad esempio si puo' osservare che

$$1 - x^{n+1} = (1 - x)(1 + x + x^2 + \cdots + x^n) \qquad \forall n$$

oppure mostrare per sostituzione che la successione

$$x_n := \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}, \qquad n \geq 0,$$

verifica le ricorrenze del processo di somma,

$$\begin{cases} x_0 = 1, \\ x_{n+1} = x_n + q^{n+1}, & \forall n \geq 0. \end{cases}$$

2.3 Esercizio (Serie telescopiche). Siano $\{b_n\}$ una successione e sia $\{a_n\}$ definita da

$$a_0 = 0, \qquad a_n = b_{n-1} - b_n, \quad \forall n \geq 1.$$

Osservare che

$$\sum_{j=0}^{n} a_j = \sum_{j=1}^{n} a_j == (b_0 - b_1) + (b_1 - b_2) + \cdots + +(b_{n-2} - b_{n-1}) + (b_{n-1} - b_n) = b_0 - b_n.$$

Un esempio è la serie $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j(j+1)}$ di Pietro Mengoli (1626–1686). Infatti $\frac{1}{j(j+1)} = \frac{1}{j} - \frac{1}{j+1}$, $\forall j \geq 1$ e dunque

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j(j+1)} = 1 - \frac{1}{n+1} \qquad \forall n \geq 1.$$

Il trucco precedente permette di riscrivere una successione come la somma dei suoi incrementi successivi.

In generale pero' non esistono formule chiuse per la somma dei primi n-termini di una successione.

Somma di una serie

2.a Serie convergenti, divergenti, indeterminate

Sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $a_n \in \mathbb{R}$, una serie numerica.

2.4 Definizione. *Si chiama* somma della serie *il limite, se esiste, delle somme parziali della serie. In questo caso la somma si indica con il simbolo* $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$,

$$\sum_{j=0}^{\infty} a_j := \lim_{n \to \infty} \sum_{j=0}^{n} a_j.$$

Si possono verificare tre situazioni tra loro esclusive.

(i) Il $\lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n} a_j$ non esiste: si dice che *la serie è indeterminata*.
(ii) $\lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n} a_j = L \in \mathbb{R}$: si dice che *la serie converge ad* L,
(iii) $\lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n} a_j = +\infty$ (risp. $-\infty$): si dice che *la serie diverge a* $+\infty$ *(*risp. $-\infty$*)*.

2.b Serie e integrali impropri

Il concetto di somma di una serie può essere interpretato come un caso particolare di integrale improprio. Infatti, se ad una successione $\{a_n\}$ di numeri reali associamo la funzione costante a tratti $\varphi : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ definita da

$$\varphi(x) = a_n \qquad \text{se } n-1 \leq x < n,$$

evidentemente φ è misurabile e per ogni $n \geq 0$ si ha

$$\sum_{j=1}^{n} a_j = \int_0^n \varphi(x)\, dx. \tag{2.4}$$

2.5 Proposizione. $\lim_{x\to+\infty} \int_0^x \varphi(x)\, dx$ *esiste se e solo se esiste il limite di successione* $\lim_{n\to\infty} \int_0^n \varphi(x)\, dx$. *In questo caso i due limiti sono uguali. In particolare la serie* $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ *converge se e solo se* φ *è integrabile in senso improprio su* $[0, \infty[$.

Dimostrazione. Sia $F(x) := \int_0^x \varphi(s)\, ds$. Se esiste il limite di $F(x)$ per $x \to \infty$, segue dal teorema di collegamento, Teorema 1.9, che $F(n)$ ha limite per $n \to \infty$ e i due limiti coincidono. Supponiamo ora che la successione $\{F(n)\}$ abbia limite L per $n \to \infty$. Per ogni $x \geq 0$, indichiamo con $[x]$ la parte intera di x e osserviamo che si ha

$$F(x) = F([x]) + a_{[x]}(x - [x])$$

da cui

$$\begin{cases} F([x]) \leq F(x) \leq F([x]+1) & \text{se } a_{[x]} \geq 0 \\ F([x]+1) \leq F(x) \leq F([x]) & \text{se } a_{[x]} \leq 0. \end{cases} \tag{2.5}$$

In ogni caso

$$\min(F([x]), F([x]+1)) \leq F(x) \leq \max(F([x]), F([x]+1))$$

e quindi per il criterio del confronto $F(x)$ ha limite L per $x \to +\infty$. □

Concludiamo questa sezione con una condiziine necessaria per la convergenza di una serie.

2.6 Proposizione. *Sia* $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ *una serie convergente. Allora* $a_j \to 0$.

Dimostrazione. Evidentemente per ogni $n \geq 0$ si ha

$$a_n = \sum_{j=0}^{n} a_j - \sum_{j=0}^{n-1} a_j.$$

Se $\sum_{j=0}^{n} a_j \to L \in \mathbb{R}$, usando la regola per il calcolo dei limite della somma si trova che a_n ha limite $L - L = 0$. □

Attenzione, la condizione $a_n \to 0$ *non* implica in generale che la serie $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ converge, cfr. ad esempio la serie armonica in Paragrafo 2.d.

Alcuni esempi

2.c La serie geometrica

Dalla (2.3) segue immediatamente

2.7 Proposizione (Serie geometrica). *La serie geometrica di ragione* $x \in \mathbb{R}$

- *converge se* $|x| < 1$ *a* $\frac{1}{1-x}$,
- *diverge a* $+\infty$ *se* $x \geq 1$,
- *è indeterminata se* $x < -1$.

2.d La serie armonica

La serie armonica è data da

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots .$$

Non è nota una forma chiusa per le sue somme parziali. Pero' con i metodi del calcolo, è facile ottenere stime per difetto e per eccesso delle somme parziali

$$H_n := \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j}.$$

Sia $\varphi : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ la funzione

$$\varphi(x) = \frac{1}{j} \qquad \text{se } j - 1 \leq x < j.$$

Dalla (2.4) si ha $\sum_{j=k}^{n} 1/j = \int_{k-1}^{n} \varphi(x)\, dx$. D'altra parte

$$\frac{1}{x+1} \leq \varphi(x) \leq \frac{1}{x} \qquad \forall x > 0,$$

e dunque

$$\int_0^n \frac{1}{1+x}\, dx \leq H_n = 1 + \sum_{j=2}^{n} \frac{1}{j} \leq 1 + \int_1^n \frac{1}{x}\, dx.$$

Abbiamo provato

2.8 Proposizione. *Le somme parziali* $\{H_n\}$ *della serie armonica soddisfano le stime*

$$\log(1 + n) \leq H_n \leq 1 + \log n. \tag{2.6}$$

H_n è dunque asintotica a $\log n$, $H_n / \log n \to 1$. In particolare la serie armonica diverge a $+\infty$, anche se le sue somme parziali aumentano in modo esasperatamente lento, cfr. Figura 2.2.

n	H_n	$H_n/\log n - 1$	$H_n - \log n$
10	2.92896825396825	2.7e-01	0.626383160974208
30	3.99498713092039	1.7e-01	0.593789749258235
100	5.18737751763962	1.3e-01	0.582207331651529
300	6.2826638802995	1.0e-01	0.578881405643301
1000	7.48547086055034	8.4e-02	0.577715581568206
3000	8.58374988995917	7.2e-02	0.577382322308925
10000	9.78760603604434	6.3e-02	0.577265664068161
30000	10.8861849921199	5.6e-02	0.577232331475626
100000	12.0901461298633	5.0e-02	0.577220664893053

Figura 2.2. $H_n = \sum_{j=1}^n 1/j$, $H_n/\log n - 1$ e $H_n - \log n$.

2.9 Costante di Eulero-Mascheroni. Posto ora $\gamma_n := H_n - \log n$, dalla (2.6) segue che $0 < \gamma_n < 1$. Inoltre

$$\gamma_n = 1 + \int_1^n \Big(\varphi(x) - \frac{1}{x}\Big)\, dx.$$

Essendo appunto $\varphi(x) \leq 1/x$ $\forall x$, γ_n è decrescente. D'altra parte essendo $1/x$ convessa, per $x \in [j-1, j]$ si ha

$$\frac{1}{x} \leq \Big(\frac{1}{j} - \frac{1}{j-1}\Big)\Big(x - \frac{1}{j}\Big) + \frac{1}{j}$$

e dunque

$$\frac{1}{x} - \varphi(x) \leq \Big(\frac{1}{j} - \frac{1}{j-1}\Big)\Big(x - \frac{1}{j}\Big).$$

Integrando

$$\gamma_n = 1 + \int_1^n \Big(\varphi(x) - \frac{1}{x}\Big)\, dx \geq 1 - \frac{1}{2}\sum_{j=2}^n \Big(\frac{1}{j-1} - \frac{1}{j}\Big) = 1 - \frac{1}{2}\Big(1 - \frac{1}{n}\Big) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}.$$

In conclusione

Proposizione. *Le somme parziali H_n della serie armonica sono una successione asintotica a $\log n$. Inoltre $H_n - \log n$ è decrescente e ha un limite γ in $[1/2, 1[$. γ si chiama la* costante di Eulero-Mascheroni. *Con la notazione di Landau,*

$$H_n = \log n + \gamma + o(1) \qquad \text{per } n \to \infty.$$

Una valore approssimato di γ è 0.57721566.... Si ha anche

$$\frac{H_n}{\log n} = 1 + \frac{\gamma}{\log n} + o\Big(\frac{1}{\log n}\Big)$$

È così spiegata la lentezza nella convergenza $H_n/\log n \to 1$ che si riscontra nella Figura 2.2.

2.e I numeri con la virgola

Per ogni $x \geq 0$ si costruisce la sua *rappresentazione decimale* $x = q_0, q_1 q_2 q_3 \dots$ calcolando iterativamente

$$x_0 := x, \quad q_0 := [x_0], \qquad \begin{cases} x_{j+1} := x_j - \frac{q_j}{10^j}, \\ q_{j+1} := [10^{j+1} x_{j+1}] \end{cases} \quad \forall j \geq 0.$$

Ricordiamo che $[x]$ indica il più grande intero minore o uguale a x. Per induzione si prova che per ogni $j > 0$ $q_j \in \{0, \dots, 9\}$ e $0 \leq x_j < 10^{-j+1}$. Infatti è chiaro che da $x_1 = x_0 - [x_0] < 1$ e da $0 \le x_j < 10^{-j+1}$ segue dall'iterazione che $q_{j+1} \in \{0, 1, \dots, 9\}$ e che

$$0 \le x_{j+1} = \frac{10^j x_j - [10^j x_j]}{10^j} < \frac{1}{10^j}.$$

In particolare $x_j \to 0$ per $j \to \infty$. Inoltre

$$q_0 + \sum_{j=1}^{N} \frac{q_j}{10^j} = q_0 + \sum_{j=1}^{N} (x_j - x_{j+1}) = q_0 + x_1 - x_{N+1} = x - x_{N+1}$$

e dunque per $N \to \infty$

$$x = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{q_j}{10^j} = q_0 + \frac{q_1}{10} + \frac{q_2}{100} + \frac{q_3}{1000} + \dots$$

o, come si usa scrivere, $x = q_0, q_1 q_2 q_3 \dots$.

Viceversa ogni *allineamento decimale* i.e. ogni serie del tipo $\sum_{j=0}^{\infty} q_i/10^i$, $q_i \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$, $\forall i \ge 1$ è convergente a un numero non negativo. Evidentemente la serie ha limite perché è a termini positivi, e converge perché

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{q_j}{10^j} \le \sum_{j=1}^{\infty} \frac{9}{10^j} = \frac{9}{10} \frac{1}{1 - 1/10} = 1.$$

L'algoritmo per la costruzione dell'allineamento decimale può non terminare o terminare dopo N passi, i.e. $x_j = q_j = 0$ $\forall j > N$. Quest'ultima eventualità accade se e solo se $x = \frac{k}{10^N}$, $k \in \{0, \dots, 10^N - 1\}$. In particolare esistono numeri razionali con allineamento decimale infinito: ad esempio $1/3 = 0,333333\dots$. Inoltre si ha

2.10 Proposizione. *Due allineamenti decimali $q_0, q_1 q_2 \dots$ e $h_0, h_1 h_2 \dots$ distinti hanno la stessa somma se e solo se esiste un intero N tale che o*

$$q_N = 1 + h_N \quad \text{e} \quad q_i = 0,\ h_i = 9\ \forall i > N,$$

oppure

$$h_N = q_N + 1 \quad \text{e} \quad q_i = 9,\ h_i = 0\ \forall i > N.$$

Dimostrazione. Supponiamo che $q_0 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{q_j}{10^j} = h_0 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{h_j}{10^j}$ i.e.

$$q_0 - h_0 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{q_j - h_j}{10^j} = 0.$$

Se non è $q_j = h_j$ $\forall j$, sia N il primo indice per cui $q_N \ne h_N$. Dovrà allora essere

$$\frac{q_N - h_N}{10^N} = -\sum_{j=N+1}^{\infty} \frac{q_j - h_j}{10^j} =: -R_N$$

e poiché $|R_N| \le 10^{-N}$ necessariamente $|q_N - h_N| = 1$. Se ad esempio $q_N = 1 + h_N$ allora

$$-R_N = -\sum_{j=N+1}^{\infty} \frac{q_j - h_j}{10^j} = 1,$$

e $q_j - h_j = -9$ $\forall j > N$, i.e. $q_j = 0$ e $h_j = 9$ $\forall j \ge 1$. □

2.11 Esercizio. Convincersi che 0.234765799999... e 0.2347658 sono lo stesso numero razionale.

2.f Altri esempi

2.12 Esercizio (Serie telescopiche). Dall'Esercizio 2.3

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j(j+1)} = 1 - \frac{1}{n+1},$$

e quindi mandando n all'infinito

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j(j+1)} = 1.$$

Più in generale, se $\{a_n\}$ è una successione, si ha

$$\sum_{j=0}^{n} (a_j - a_{j+1}) = a_0 - a_{n+1}.$$

Mostrare che la serie $\sum_{j=0}^{\infty}(a_j - a_{j+1})$ converge, diverge o è indeterminata rispettivamente se la successione $\{a_n\}$ converge, diverge o non ha limite. Nei primi due casi

$$\sum_{j=0}^{\infty} (a_j - a_{j+1}) = a_0 - \lim_{n\to\infty} a_n.$$

2.13 Esercizio (Serie armonica generalizzata $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$, $\alpha \neq 1$). Ripetendo la procedura seguita per la serie armonica, provare la

Proposizione. *Le somme parziali*

$$S_n := \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j^\alpha}, \qquad \alpha \neq 1,$$

soddisfano le stime

$$\frac{1}{\alpha - 1}\Big(1 - \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}}\Big) \le S_n \le 1 + \frac{1}{\alpha - 1}\Big(1 - \frac{1}{n^{\alpha-1}}\Big). \tag{2.7}$$

In particolare la serie armonica generalizzata
- ◦ *diverge a $+\infty$ se $\alpha < 1$,*
- ◦ *converge se $\alpha > 1$ e in questo caso*

$$\frac{1}{\alpha - 1} \le \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^\alpha} \le 1 + \frac{1}{\alpha - 1}.$$

2.14 Esercizio. Studiare la serie $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2}$, cioè la serie armonica generalizzata con $\alpha = 2$. La serie converge e anzi

$$1 \le \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2} \le 2.$$

In alternativa possiamo osservare che per ogni $j \ge 2$

$$\frac{1}{j^2} \le \frac{1}{j(j-1)}$$

e quindi

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2} = 1 + \sum_{j=2}^{\infty} \frac{1}{j^2} \le 1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j(j+1)} = 2.$$

Si dimostra in realtà che $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

2.g Esercizi

2.15 Esercizio. Calcolare le somme parziali delle seguenti serie telescopiche

$$\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\sqrt{j+1}-\sqrt{j}}{\sqrt{j^2+j}},\quad \sum_{j=1}^{\infty}\frac{j+1/2}{j^2(j+1)^2},\quad \sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j(j+1)(j+2)},\quad \sum_{j=2}^{\infty}\frac{1}{j^2-1}.$$

2.16 Esercizio. n rette si dicono essere in posizione generica se a due a due si incontrano in uno e un solo punto. Calcolare il numero di regioni piane individuate da n rette in posizione generica.

2.17 Esercizio. Facciamo cadere una pallina da ping-pong da un'altezza h sopra un tavolo di legno duro. La pallina rimbalzerà infinite volte prima di fermarsi perdendo quota ad ogni rimbalzo. Supponiamo che ad ogni rimbalzo la pallina arrivi al 75% della quota raggiunta al rimbalzo precedente. Si calcoli il tempo che la pallina da ping-pong impiega a fermarsi.

2.18 Esercizio (Curva di von Koch). Partendo da un triangolo equilatero di lato uno, si incolli al centro di ogni lato un triangolo equilatero di lato 1/3 in modo da ottenere una stella. Al centro di ogni lato della stella si incolli un triangolo equilatero di lato 1/9. Iterando il procedimento si genera per induzione una curva chiusa detta curva di von Koch.

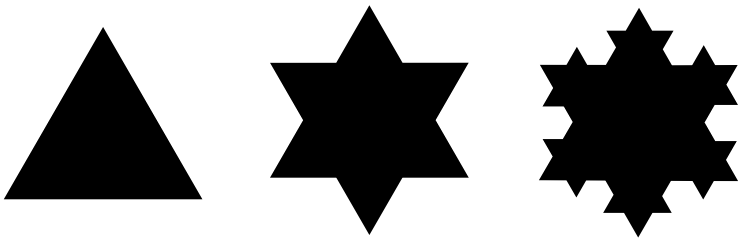

Figura 2.3. La costruzione della curva di von Koch.

Provare che la figura risultante ha area finita e che la curva di von Koch ha lunghezza infinita.

2.19 Esercizio (Insieme di Cantor). Un quadrato di lato unitario viene diviso in 9 quadrati di lato 1/3 e quello centrale viene colorato di nero. I rimanenti 8 quadrati di lato 1/3 vengono divisi allo stesso modo (in quadrati di lato 1/9) e quelli centrali vengono similmente colorati in nero. Si itera il procedimento per induzione e si chiede di calcolare l'area della parte colorata di nero. La parte non colorata del quadrato è noto come l'*insieme di Cantor* che si incontra spesso.

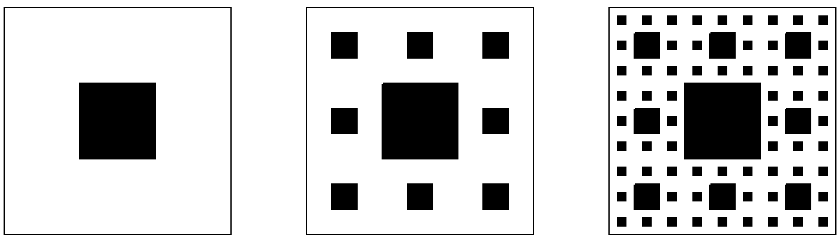

Figura 2.4. La costruzione dell'insieme di Cantor in dimensione 2.

2.20 Esercizio. Provare che $\sum_{j=0}^{n} q^j$ è dell'ordine di

$$\begin{cases} \frac{q^{n+1}}{q-1} & \text{se } q > 1 \\ n & \text{se } q = 1 \\ \frac{1}{1-q} & \text{se } 0 \leq q < 1. \end{cases}$$

2.21 Esercizio. Provare che $\sum_{j=0}^{n} jq^j$ è dell'ordine di

$$\begin{cases} \frac{nq^{n+2}}{(q-1)^2} & \text{se } q > 1 \\ \frac{n^2}{2} & \text{se } q = 1 \\ \frac{1}{1-q} & \text{se } 0 \leq q < 1. \end{cases}$$

2.22 Esercizio. Stimare l'errore che si commette sostituendo la somma della serie $\sum_{j=1}^{\infty} 1/j^2$ con una sua somma parziale.

2.23 Esercizio. Un bruco lento ma tenace cammina alla velocità di $10cm$ al minuto su una striscia di gomma che uno spiritello maligno allunga ogni minuto di 1 metro. Riuscirà il bruco ad arrivare alla fine della striscia?

2.24 Esercizio. Si faccia una pila di n monete uguali di diametro 1. Si disponga la pila in modo che le monete siano in equilibrio e formino una grondaia la più ampia possibile, cfr. la Figura 2.5. A che distanza si trovano i centri della prima e dell'ultima moneta?

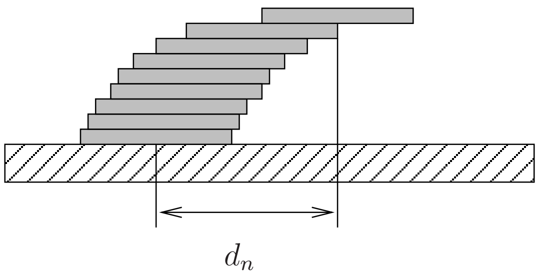

Figura 2.5. Il problema della pila di monete.