24. Misura e area

Oltre al problema di calcolare volumi in $\mathbb{R}^n$, c'è anche la questione di calcolare l'area di "superfici" k-dimensionali in $\mathbb{R}^n$, si pensi ad esempio all'area del grafico di una funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

Questa questione può essere affrontata a vari livelli di difficoltà, ad esempio trovando formule valide per classi più o meno vaste di oggetti, oppure utilizzando la teoria della misura per definire la "misura k-dimensionale" per sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$, $k \leq n$.

In contrasto infatti con la misura di n-dimensionale, che è essenzialmente unica, (si può dimostrare che la misura di Lebesgue $\mathcal{L}^n$ è l'unica misura invariante per rotazioni e traslazioni, omogenea di grado n e tale che la misura del cubo unitario vale 1), vi sono più misure differenti adatte a misurare sottoinsiemi k dimensionali in $\mathbb{R}^n$, $k < n$, misure che però coincidono sulle superfici regolari. Fra tutte, la *misura di Hausdorff k-dimensionale in* $\mathbb{R}^n$ si è rivelata adatta ad un ampio numero di situazioni. Conviene dare senso alla misura k dimensionale anche quando k è un numero reale non negativo.

24.a Misure di Hausdorff

Per $s \in \mathbb{R}$, $s \geq 0$, poniamo

$$\omega_s := \frac{\pi^{s/2}}{\Gamma(1 + s/2)}$$

ricordando che per s intero $\omega_s = \mathcal{L}^s(B(0,1))$, essendo $B(0,1) \subset \mathbb{R}^s$ la palla s-dimensionale di $\mathbb{R}^s$. Per ogni $E \subset \mathbb{R}^n$ e $\delta > 0$, definiamo

$$\mathcal{H}^s_\delta(E) := \inf\Big\{\omega_s \sum_{j=1}^{\infty} \Big(\frac{\operatorname{diam} E_j}{2}\Big)^s \,\Big|\, E \subset \cup_j E_j,\ \operatorname{diam}(E_j) \leq \delta\Big\}$$

e, essendo $\mathcal{H}^s_\delta$ crescente in $\delta > 0$, poniamo

$$\mathcal{H}^s(E) := \lim_{\delta \to 0} \mathcal{H}^s_\delta(E),$$

La funzione d'insieme $\mathcal{H}^s : \mathcal{P}(X) \to \overline{\mathbb{R}}_+$ è la *misura* (esterna) *di Hausdorff s-dimensionale*. I meccanismi della teoria della misura permettono di dimostrare che

(i) gli aperti (e quindi i chiusi) di $\mathbb{R}^n$ sono misurabili,
(ii) in $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{H}^n$ e la misura di Lebesgue $\mathcal{L}^n$ coincidono.

Inoltre si vede facilmente che

(i) $\mathcal{H}^s_\delta(E)$ è una misura esterna.
(ii) $\mathcal{H}^s_\delta(E) < +\infty$, $\delta > 0$, per ogni insieme E limitato.
(iii) $\mathcal{H}^s$ non è finita sui compatti. Ad esempio se $E \subset \mathbb{R}^n$ ha parte interna e $s < n$, allora $\mathcal{H}^s(E) = +\infty$.
(iv) Poiché nella definizione di $\mathcal{H}^s_\delta(E)$ intervengono solo i diametri di un possibile ricoprimento di E, ci si può limitare a considerare nella definizione di $\mathcal{H}^s_\delta$ solo insiemi chiusi o anche chiusi e convessi e, essendo un chiuso intersezione di aperti di diametro leggermente più grande, ci si può limitare anche a considerare solo ricoprimenti aperti.
(v) $\mathcal{H}^0$ è la misura che conta i punti.
(vi) $\mathcal{H}^s$ è invariante per trasformazioni ortogonali. Se $E \subset \mathbb{R}^n$ e $\mathbf{R}^T\mathbf{R} = \mathrm{Id}$, allora $\mathcal{H}^s(\mathbf{R}(E)) = \mathcal{H}^s(E)$.
(vii) $\mathcal{H}^s$ è positivamente omogenea di grado s, i.e., per ogni $\lambda > 0$ e $E \subset \mathbb{R}^n$, $\mathcal{H}^s(\lambda E) = \lambda^s \mathcal{H}^s(E)$.
(viii) $\mathcal{H}^s = 0$ se $k > n$.
(ix) Se $0 \leq t < s \leq n$ allora $\mathcal{H}^s \leq \mathcal{H}^t$, e $\mathcal{H}^s(E) > 0$ implica $\mathcal{H}^t(E) = +\infty$ e $\mathcal{H}^t(E) < \infty$ implica $\mathcal{H}^s(E) = 0$.
(x) Se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ è lipschitziana, allora $\mathcal{H}^s(f(E)) \leq (\mathrm{Lip}\, f)^s\, \mathcal{H}^s(E)$ $\forall 0 \leq s \leq n$.

24.1 Osservazione. (i) La (ix) implica che se $E \subset \mathbb{R}^n$, $\mathcal{H}^s(E)$ è finito e diverso da zero al più per un solo valore di s, $0 \leq s \leq n$, detto la *dimensione di Hausdorff di E*, definita in generale come

$$\begin{aligned}\dim_{\mathcal{H}}(E) :&= \sup\Big\{s \,|\, \mathcal{H}^s(E) > 0\Big\} = \sup\Big\{s \,|\, \mathcal{H}^s(E) = +\infty\Big\}\\ &= \inf\Big\{s \,|\, \mathcal{H}^s(E) < \infty\Big\} = \inf\Big\{s \,|\, \mathcal{H}^s(E) = 0\Big\}.\end{aligned}$$

Le uguaglianze nella formula precedente seguono tutte dalla (ix).

(ii) La (x) torna utile nel dare stime per difetto della misura di Hausdorff di un insieme. Per una stima per eccesso, si usa di solito la definizione di $\mathcal{H}^s_\delta$, procedendo quindi con stime per eccesso di $\mathcal{H}^s_\delta(E)$ con l'utilizzo di un ricoprimento di E con insiemi di diametro inferiore a δ.

24.b La formula dell'area

Nel definire la lunghezza di una curva continua di $\mathbb{R}^n$, non vi è stato bisogno di ricorrere alla teoria della misura. Se $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$, per ogni suddivisione $\sigma := \{t_j\}$, $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = b$, di $[0, 1]$ si calcola

$$\sum_{i=1}^N |\gamma(t_{i-1}) - \gamma(t_i)|$$

e si definisce la lunghezza di γ come

$$L(\gamma) := \sup\Big\{\sum_{i=1}^n |\gamma(t_{i-1}) - \gamma(t_i)| \,\Big|\, a = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = b\Big\}$$

al variare della suddivisione.

Volendo mimare la definizione di lunghezza, per definire l'area due dimensionale dell'immagine C^1 di un aperto di $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^3$, si può pensare di suddividere con una triangolazione lo spazio dei parametri e di considerare il poliedro di $\mathbb{R}^3$ con facce triangolari i cui vertici appartengono a S e corrispondono ai vertici della suddivisione nello spazio dei parametri. Si può allora calcolare l'area del poliedro approssimante e si vorrebbe definire l'area come l'estremo superiore, al variare della suddivisione, delle aree dei poliedri iscritti ad S. Il seguente esempio dovuto a Hermann Schwarz (1843–1921) mostra come sia illusorio arrivare ad una definizione di area per questa via.

24.2 Esercizio (Schwarz). Si consideri la mappa $\varphi : [0, 2\pi[\times[0, 1]$ $\varphi(\theta, z) := (\cos\theta, \sin\theta, z)$ che mappa il quadrato $[0, 2\pi[\times[0, 1]$ uno a uno sul pezzo di superficie cilindrica $S := \{(x, y, z) \,|\, x^2+y^2 = 1, 0 \le z \le 1\}$. Chiaramente l'area elementare di S vale $A(S) = 2\pi$.

Se suddividiamo i lati del quadrato $[0, 2\pi] \times [0, 1]$ rispettivamente in n e m parti e successivamente suddividiamo ciascun rettangolo in quattro triangoli tirando le diagonali, abbiamo una triangolazione di $[0, 2\pi] \times [0, 1]$ in $4nm$ triangoli congruenti. Se ora usiamo le immagini dei vertici di questi triangoli come i vertici di un poliedro a facce triangolari inscritto al cilindro e calcoliamo l'area di ciascun triangolo del poliedro, si trova che l'area del poliedro inscritto nel cilindro vale

$$A_{mn} = 2n \sin\frac{\pi}{2n} + \left[\frac{1}{4} + \frac{4m^2}{n^4}\Big(n \sin\frac{\pi}{2n}\Big)^4\right]^{1/2} \cdot 2n \sin\frac{\pi}{n}.$$

Se ora si sceglie $m = n$, allora $A_{mn} \to 2\pi$ come suggerito dall'intuizione; ma se $m = n^3$, allora $A_{mn} \to +\infty$. Il sup delle aree di tutti i poliedri inscritti ottenuti da una triangolazione dello spazio dei parametri è dunque $+\infty$ e non l'area di S! La ragione intuitiva di questo comportamento sta nel fatto che se m, il numero di suddivisioni dell'asse z, è alto rispetto al numero n delle suddivisioni dell'angolo, i triangoli del poliedro iscritto al cilindro tendono a mettersi sempre più ortogonali alla superficie del cilindro, e l'area del poliedro di conseguenza aumenta rispetto all'area del cilindro.

Questo esempio ha fatto fiorire una esplosione di possibili definizioni (e, conseguentemente, di trattati) per discutere l'area due dimensionale di sottoinsiemi di $\mathbb{R}^3$. Tra queste, le definizioni derivanti dalla teoria della misura, quale la misura di Hausdorff $\mathcal{H}^2$, si sono rivelate più efficienti, almeno per gli scopi più elementari.

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e $\phi : \Omega \to \mathbb{R}^N$, $n \le N$, una mappa di classe C^1. Per A misurabile in $\mathbb{R}^n$, si dice anche che l'immagine $\phi(A) \subset \mathbb{R}^N$ *è parametrizzata da* ϕ. C'è una notevole formula che permette il calcolo, a volte esplicito, della misura di Hausdorff k-dimensionale di $\phi(A)$.

24.3 Teorema. *Siano $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto e $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$, $N \ge n$. Se $A \subset \Omega$ è misurabile e f è iniettiva su A, allora $f(A)$ è $\mathcal{H}^n$-misurabile e*

$$\int_A J(\mathbf{D}f(x))\,dx = \mathcal{H}^n(f(A)).$$

Qui $J_f(x) := J(\mathbf{D}f(x)) = \sqrt{\det \mathbf{D}f^T(x)\mathbf{D}f(x)}$ è *lo* jacobiano di f.

24.4 Osservazione. Si osservi che:

(i) Se $n = 1$, allora $\mathbf{D}f = f'$ e $J(\mathbf{D}f) = |f'|$. La formula dell'area si riduce alla formula usuale per il calcolo della lunghezza di una curva.

(ii) La formula implica nel caso in cui f sia lineare, $f(x) = \mathbf{L}x$, che

$$\mathcal{H}^n(\mathbf{L}(A)) = J(\mathbf{L})\mathcal{L}^n(A),$$

uguaglianza che può dedursi dalla invarianza per rotazioni della misura di Hausdorff. Infatti, per la formula di decomposizione polare $\mathbf{L} = \mathbf{US}$ con $\mathbf{S} \in M_{n,n}$ simmetrica e $\mathbf{U}$ ortogonale. Se si identifica $\mathbb{R}^n$ ad esempio con l'n-piano coordinato determinato dalle prime n coordinate, $\mathbf{U}$ si estende ad una trasformazione ortogonale di $\mathbf{R}^N$ in sé. L'invarianza della misura di Hausdorff e la formula di cambiamento di variabile per $\mathcal{L}^n$ danno allora

$$\mathcal{H}^n(\mathbf{US}(A)) = \mathcal{H}^n(\mathbf{S}(A)) = \mathcal{L}^n(\mathbf{S}(A)) = |\det \mathbf{S}|\mathcal{L}^n(A) = J(\mathbf{L})\mathcal{L}^n(A).$$

(iii) La formula dell'area implica che *l'immagine dei punti su cui l'applicazione lineare tangente non è di rango massimo ha misura $\mathcal{H}^n$ nulla.* Infatti per ogni matrice $\mathbf{T} \in M_{N,n}$ $N \geq n$, $\ker \mathbf{T} \neq \{0\}$ se e solo se $J(\mathbf{T}) = 0$ e quindi $\mathcal{H}^n(f(A)) = 0$ se

$$A := \Big\{ x \in \Omega \,\Big|\, \ker \mathbf{D}f(x) \neq 0 \Big\} = \Big\{ x \in \Omega \,\Big|\, J(\mathbf{D}f(x)) = 0 \Big\}.$$

(iv) Segue immediatamente che, *se $\phi : \Omega \to \mathbb{R}^N$ è di classe C^1, $A \subset \Omega$ e ϕ iniettiva su A, se $\psi : \Delta \to \mathbb{R}^N$ è di classe C^1, $B \subset \Delta$ e ψ iniettiva su B e se $\phi(A) = \psi(B)$, si ha*

$$\int_A J(\mathbf{D}\phi(x))\, dx = \int_B J(\mathbf{D}\psi(y))\, dy.$$

(v) Per $n = N$ la formula dell'area si riduce alla formula di cambiamento di variabili.

La formula dell'area si presta a varie generalizzazioni. Per prima cosa è possibile eliminare la condizione di iniettività, introducendo la *funzione molteplicità* o *indicatrice di Banach*

$$y \to N(f, A, y) := \mathcal{H}^0(A \cap f^{-1}(y))$$

che conta i punti della controimmagine di y appartenenti ad A. Si ottiene allora nella sola ipotesi $f \in C^1(\Omega)$ che la funzione molteplicità $y \to N(f, A, y)$ è $\mathcal{H}^n$-misurabile e

$$\int_A J(\mathbf{D}f)\, dx = \int_{\mathbb{R}^N} N(f, A, y)\, d\mathcal{H}^n(y).$$

Infine, la formula dell'area vale anche per funzioni $f : A \to \mathbb{R}^N$ lipschitziane.

Un'altra semplice conseguenza, ottenuta approssimando u con funzioni semplici e passando al limite con il teorema della convergenza monotona di Beppo Levi è il seguente

24.5 Teorema (Formula di cambiamento delle variabili). *Siano $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^N$, Ω aperto, $n \leq N$, una funzione di classe $C^1(\Omega)$ (o anche solo localmente lipschitziana) e $u : \Omega \to \mathbb{R}$ tale che o u è $\mathcal{L}^n$-misurabile e non negativa oppure $|u|\, J(\mathbf{D}f)$ è $\mathcal{L}^n$-sommabile. Allora*

$$y \to \sum_{x \in f^{-1}(y)} u(x)$$

è $\mathcal{H}^n$-misurabile e

$$\int_{\mathbb{R}^n} u(x)\, J(\mathbf{D}f)(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^N} \Big(\sum_{x \in f^{-1}(y)} u(x) \Big)\, d\mathcal{H}^n(y). \tag{24.1}$$

In particolare, se $v : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ è $\mathcal{H}^n$-misurabile e non negativa, allora

$$\int_A v(f(x))\, J(\mathbf{D}f)(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^N} v(y)\, N(f, A, y)\, d\mathcal{H}^n(y)\ . \tag{24.2}$$

24.c Il calcolo delle aree di superfici

Volendo calcolare l'area di una linea, o più in generale di una superficie k-dimensionale in $\mathbb{R}^n$, è opportuno trovare una parametrizzazione e utilizzare la formula dell'area, o, quantomeno una decomposizione in pezzi parametrizzati da mappe di classe C^1 le cui aree si possano calcolare con la formula dell'area. Seguendo questa procedura, diventa necessario calcolare lo jacobiano della matrice jacobiana della parametrizzazione. Le seguenti informazioni sono utili.

(i) Sia $\mathbf{A} \in M_{N,n}$. Dal teorema dell'alternativa,

$$\operatorname{Rank} \mathbf{A}^T\mathbf{A} = \operatorname{Rank} \mathbf{A} = \operatorname{Rank} \mathbf{A}^T = \operatorname{Rank} \mathbf{A}\mathbf{A}^T \le \min(N, n). \tag{24.3}$$

Segue che se $N > n$ allora $\det \mathbf{A}\mathbf{A}^T = 0$.

(ii) Sia $\mathbf{T} \in M_{N,n}$. Allora $\det \mathbf{T}^T\mathbf{T} = 0$ se e solo $\operatorname{Rank} \mathbf{T} < \min(n, N)$. Infatti, se $N \ge n$, allora $\det \mathbf{T}^T\mathbf{T} = 0$ se e solo se $\ker \mathbf{T} \ne \{0\}$ e quindi $\operatorname{Rank} \mathbf{T} < n$. Se invece $N \le n$, allora $\det(\mathbf{T}^T\mathbf{T}) = \det(\mathbf{T}\mathbf{T}^T) = 0$ se e solo $\ker \mathbf{T}^T \ne 0$, e per il teorema dell'alternativa $\operatorname{Rank} \mathbf{T} < N$.

(iii) (Area e tensore metrico) Siano $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ le colonne di $\mathbf{A}$, $\mathbf{A} = [A_1|A_2|\dots|A_n]$. Allora

$$\mathbf{A}^T\mathbf{A} = \mathbf{G}, \qquad \mathbf{G} = (g_{ij}),\ g_{ij} :=\ A_i \bullet A_j$$

Pertanto, se $f : \Omega \to \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^N$, $N \ge n$, è di classe C^1, allora

$$J(\mathbf{D}f) = \sqrt{\det \mathbf{G}}, \qquad \mathbf{G} = (g_{ij}),\ g_{ij}\ =\ f_{x^i} \bullet f_{x^j}\ ,$$

e la formula dell'area si riscrive come

$$\mathcal{H}^n(f(\Omega)) = \int_\Omega \sqrt{g(x)}\, dx, \qquad g(x) := \det \mathbf{G}(x).$$

(iv) (Formula di Cauchy–Binet) Sia $\mathbf{A} \in M_{N,n}$, $N \ge n$. Per ogni multiindice $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, $1 \le \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n$, sia $\mathbf{A}^\alpha$ la sottomatrice $n \times n$ di $\mathbf{A}$ costituita dalle righe $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ di $\mathbf{A}$. Vale allora la *formula di Cauchy–Binet*

$$J(\mathbf{A})^2 = \sum_{\alpha \in I(n,N)} (\det(\mathbf{A}^\alpha))^2.$$

24.6 Esercizio (Superfici parametrizzate due dimensionali in $\mathbb{R}^3$). Esplicitare la formula dell'area di una superfice 2 dimensionale in $\mathbb{R}^3$.
Soluzione. Sia $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ di classe C^1. In questo caso

$$\mathbf{D}f(x,y) := \begin{pmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{pmatrix}$$

le colonne di $\mathbf{D}f$ sono i vettori delle derivate parziali rispetto a x e y, rispettivamente $f_x := (a,b,c)^T$ e $f_y := (d,e,f)^T$. Posto

$$E := |f_x|^2, \qquad F := f_x \bullet f_y\,, \qquad G := |f_y|^2,$$

si ha

$$\mathbf{D}f^T\mathbf{D}f = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$$

e

$$\mathcal{H}^n(f(\Omega)) = \int_\Omega J(\mathbf{D}f(x))\,dxdy = \int_\Omega \sqrt{EG - F^2}\,dxdy.$$

Un altro modo ancora per calcolare $J(\mathbf{D}f)$, e quindi l'area di $u(\Omega)$, è la formula di Cauchy–Binet. Se

$$\mathbf{A}^{12} := \begin{pmatrix} a & d \\ b & e \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{A}^{23} := \begin{pmatrix} b & e \\ c & f \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{A}^{13} := \begin{pmatrix} a & d \\ c & f \end{pmatrix},$$

allora

$$J(\mathbf{D}f)^2 = (ae - bd)^2 + (bf - ec)^2 + (af - dc)^2.$$

Si noti che i tre numeri $(ae-bd, -(bf-ec), af-dc)$ sono le tre componenti del *prodotto vettore*,

$$f_x \times f_y$$

delle colonne di $\mathbf{D}f$ e quindi

$$\mathcal{H}^n(f(\Omega)) = \int_\Omega |f_x \times f_y|\,dxdy.$$

24.7 Esercizio (Grafici di codimensione 1). Esplicitare la formula dell'area per il grafico di una funzione $u : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.
Soluzione. Sia $u : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ di classe C^1 e

$$\mathcal{G}_{u,\Omega} := \Big\{(x,y) \in \Omega \times \mathbb{R} \,\Big|\, y = u(x)\Big\}$$

il suo grafico. $\Gamma_{u,\Omega}$ può essere visto come l'immagine della mappa iniettiva $f(x) = (x, u(x))$ da Ω in $\mathbb{R}^{n+1}$. In un punto generico $x \in \Omega$ la matrice jacobiana di f è data da

$$\mathbf{D}\phi(x) = \begin{pmatrix} \boxed{\quad \mathrm{Id} \quad} \\ \mathbf{D}u(x) \end{pmatrix}.$$

Segue dalla formula di Cauchy–Binet che $J(\mathbf{D}f(x)) = \sqrt{1 + |\mathbf{D}u(x)|^2}$ e quindi la misura del grafico di u vale

$$\mathcal{H}^n(\mathcal{G}_{u,\Omega}) = \int_\Omega \sqrt{1 + |\mathbf{D}u(x)|^2}\,dx.$$

24.8 Esercizio (Ipersuperfici parametrizzate). Esplicitare la formula dell'area per una superficie paramatrizzata di codimensione 1,
Soluzione. Sia $u : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ una applicazione di classe C^1 iniettiva. La matrice jacobiana di u è una matrice a $n+1$ righe e n colonne e le sottomatrici $n \times n$ di $\mathbf{D}u$ si possono indicizzare sulla riga che viene tolta. Se indichiamo con

$$\frac{\partial(u^1, \dots, u^{i-1}, u^{i+1}, \dots, u^n)}{\partial(x^1, x^2, \dots, x^n)}$$

il determinante della sottomatrice della matrice jacobiana ottenuta togliendo la riga i, la formula di Cauchy–Binet e la formula dell'area danno

$$\mathcal{H}^n(u(\Omega)) = \int_\Omega \Big(\sum_{i=1}^n \Big(\frac{\partial(u^1, \dots, u^{i-1}, u^{i+1}, \dots, u^n)}{\partial(x^1, x^2, \dots, x^n)} \Big)^2 \Big)^{1/2} dx.$$

24.9 Esercizio (Superfici di rotazione). Esplicitare la formula dell'area per una superficie di rotazione in $\mathbb{R}^3$.

Soluzione. Una superficie di rotazione attorno ad un asse è ben descritta dalle sue sezioni perpendicolari all'asse: sono cerchi. I punti di una superficie di rotazione si possono allora descrivere con l'uso di due parametri liberi, la posizione di un punto P lungo l'asse, che fissa il raggio del cerchio sulla sezione sul piano perpendicolare all'asse per P e un parametro ulteriore per descrivere i punti sulla stessa sezione. Supponiamo che S sia una superficie di rotazione attorno all'asse delle z. In questo caso, S è l'immagine uno a uno di

$$A := [a, b] \times [0, 2\pi[$$

tramite la mappa $\phi : [a, b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$

$$\phi(z, \theta) := \begin{cases} x = \rho(z) \cos\theta, \\ y = \rho(z) \sin\theta, \\ z = z \end{cases}$$

dove $\rho(z)$ è il raggio della sezione della superficie al livello z. Supponendo $\rho(z) \in C^1([a, b])$,

$$\mathbf{D}\phi(z, \theta) := \begin{pmatrix} \rho' \cos\theta & -\rho \sin\theta \\ \rho' \sin t & -\rho \cos\theta \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad (z, t) \in A := [a, b] \times [0, 2\pi[.$$

e quindi, con la formula di Cauchy–Binet,

$$J(\mathbf{D}\phi)(z, \theta) = \rho(z) \sqrt{1 + \rho'^2(z)},$$

perciò

$$\mathcal{H}^2(S) = \mathcal{H}^2(\phi(A)) = \int_0^{2\pi} \int_a^b \rho(z) \sqrt{1 + (\rho'(z))^2} \, dz = 2\pi \int_a^b \rho(z) \sqrt{1 + (\rho'(z))^2} \, dz.$$

24.d La formula di coarea

Si consideri una funzione $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^N$, $N \le n$ e per ogni $y \in \mathbb{R}^N$, sia $f^{-1}(y)$ la controimmagine di y. Al variare di y i sottoinsiemi $\{f^{-1}(y)\}$ sono una "foliazione" di $\mathbb{R}^n$, si pensi ad esempio a $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^2 + y^2$, per cui $f^{-1}(t) := \{(x, y) = x^2 + y^2 = t\}$. Anzi, come vedremo al Capitolo 16, se $\mathbf{D}f(x)$ ha rango massimo N, per ogni $y \in \mathbb{R}^n$ il "foglio" $f^{-1}(y)$ è una *sottovarietà* $(n - N)$-dimensionale di $\mathbb{R}^n$. Se $A \subset \mathbb{R}^n$, è essenzialmente possibile integrare su A integrando prima su ciascun foglio $f^{-1}(y)$ e successivamente integrando in y, come nel teorema di Fubini. Si ha

24.10 Teorema (formula di coarea). *Let $f : \Omega \to \mathbb{R}^N$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto, $N \le n$, una funzione di classe $C^1(\Omega)$, e sia $A \subset \Omega$ $\mathcal{L}^n$-misurabile. Allora per $\mathcal{L}^N$-q.o. y, l'insieme $A \cap f^{-1}(y)$ è $\mathcal{H}^{n-N}$-misurabile, la funzione $y \to \mathcal{H}^{n-N}(A \cap f^{-1}(y))$ è $\mathcal{L}^N$-misurabile e*

$$\int_A J(\mathbf{D}f(x))\, d\mathcal{L}^n(x) = \int_{\mathbb{R}^N} \mathcal{H}^{n-N}(A \cap f^{-1}(y))\, d\mathcal{L}^N(y). \tag{24.4}$$

Qui

$$J_f(x) := J(\mathbf{D}f(x)) = \sqrt{\det(\mathbf{D}f(x)^T\mathbf{D}f(x))} = \sqrt{\det(\mathbf{D}f(x)\mathbf{D}f(x)^T)}.$$

è lo jacobiano di f.

In realtà la formula di coarea vale per $f : A \to \mathbb{R}^N$ localmente lipschitziana. Infine, approssimando u con funzioni semplici, si ha

24.11 Teorema. *Sia $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^N$, Ω aperto, $N \leq n$, una mappa di classe $C^1(\Omega)$ (o anche solo localmente lipschitziana), e sia $u : \Omega \to \mathbb{R}$ una mappa o $\mathcal{L}^n$-misurabile e non negativa, oppure tale che $|u|\, J(\mathbf{D}f)$ è $\mathcal{L}^n$-sommabile. Allora*

$$\int_{\mathbb{R}^n} u(x)\, J(\mathbf{D}f)(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^N} \left(\int_{f^{-1}(y)} u(x)\, d\mathcal{H}^{n-N}(x) \right) d\mathcal{L}^N(y). \tag{24.5}$$

24.12 Osservazione. Osserviamo

(i) Se si decompone $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n-N} \times \mathbb{R}^N$ e si indicano con (x, y), $x \in \mathbb{R}^{n-N}$, $y \in \mathbb{R}^N$ le coordinate in $\mathbb{R}^n$ e si sceglie $f(x, y) = y$, allora $J(\mathbf{D}f)(x, y) = |\mathbf{D}f(x, y)| = 1$, $A \cap f^{-1}(y) = \{(x, z) \in A \,|\, z = y\}$ e il Teorema 24.10 si riduce al teorema di Fubini. La formula di coarea è in effetti una versione "curvilinea" del teorema di Fubini.

(ii) Sia $\mathbf{A} \in M_{1,n}$. Poiché, cfr. la (24.3) $J(\mathbf{A}) = \det \mathbf{A}^T\mathbf{A} = \det(\mathbf{A}\mathbf{A}^T)$, si ha

$$J(\mathbf{D}f) = \sqrt{\det(\mathbf{D}f)(\mathbf{D}f)^T} = |\mathbf{D}f|,$$

quindi, se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,

$$\int_A |Df| dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{H}^{n-1}(A \cap f^{-1}(t))\, dt$$

e

$$\int_A g(x)|Df(x)| dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{A \cap f^{-1}(t)} g(z)\, d\mathcal{H}^{n-1}(z) \right) dt$$

per ogni $A \subset \mathbb{R}^n$ misurabile e $g : A \to \mathbb{R}$ misurabile non negativa o sommabile.

24.13 Esercizio (Area della sfera $(n-1)$-dimensionale in $\mathbb{R}^n$). Calcolare il volume della sfera $(n-1)$-dimensionale in $\mathbb{R}^n$.

Soluzione. Se $\omega_n = |B(0, 1)|$, $B(0, 1) \subset \mathbb{R}^n$, il volume della palla $B(0, r)$ è $\omega_n r^n$. Se $f(x) = |x|$, $J(\mathbf{D}f(x)) = |\mathbf{D}f(x)| = 1$ e dalla formula di coarea

$$\int_{B(0,r+h)\setminus B(0,r)} dx = \int_r^{r+h} \mathcal{H}^{n-1}(\partial B(0, t))\, dt$$

e quindi, dal teorema fondamentale del calcolo,

$$\mathcal{H}^{n-1}(\partial B(0, r)) = \frac{d\mathcal{L}^n(B(0, r))}{dr} = n\omega_n r^{n-1}.$$

24.14 Esercizio. Discutere la formula di integrazione in coordinate polari.

Scegliendo $f(x) := |x|$, si ha $f^{-1}(y) = \partial B(0, y)$ e la formula di coarea, Teorema 24.11, dà la formula di integrazione in cooordinate polari

$$\int_{\{s<|x|<t\}} u\, dx = \int_s^t d\rho = \int_r^s \left(\int_{\partial B(0,\rho)} u(y)\, d\mathcal{H}^{n-1}(y) \right) d\rho.$$

In particolare, per $h \neq 0$ si ha

$$\frac{1}{h}\int_{\{r<|x|<r+h\}} u\,dx = \frac{1}{h}\int_r^{r+h}\Big(\int_{\partial B(0,\rho)} u(y)\,d\mathcal{H}^{n-1}(y)\Big)d\rho$$

e quindi, per il teorema di differenziazione dell'integrale, per $\mathcal{L}^1$-a.e. r (per ogni r se u è continua),

$$\frac{d}{dr}\Big(\int_{B(0,r)} u\,dx\Big) = \int_{\partial B(0,r)} u\,d\mathcal{H}^{n-1}.$$

Per $u = 1$ si ritrova evidentemente

$$\mathcal{H}^{n-1}(\partial B(0,r)) = \frac{d}{dr}(\omega_n r^n) = n\omega_n r^{n-1}.$$

24.15 Esercizio (Volume della palla n-dimensionale in $\mathbb{R}^n$). Con la formula di coarea, si può calcolare in un altro modo $\omega_n := |B(0,1)|$. Qui $B(0,1)$ denota la palla di raggio 1 in $\mathbb{R}^n$. Consideriamo la funzione $e^{-|x|^2}$, $x \in \mathbb{R}^n$. Dal teorema di Fubini, se $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-|x|^2}\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x_1^2}\,dx_1 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x_2^2}\,dx_2 \dots \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x_n^2}\,dx_n = \pi^{n/2}.$$

D'altra parte dalla formula di coarea,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-|x|^2}\,dx &= \int_0^{+\infty}\Big(\int_{\partial B(0,t)} e^{-t^2}\,d\mathcal{H}^{n-1}(t)\Big)\,dt = n\,|B(0,1)|\int_0^{+\infty} e^{-t^2}t^{n-1}\,dt \\ &= n\,|B(0,1)|\int_0^{+\infty} s^{\frac{n}{2}-1}e^{-s}\,ds = n\,|B(0,1)|\Gamma\Big(\frac{n}{2}\Big).\end{aligned}$$

Segue che

$$|B(0,1)| = \frac{2}{n}\frac{\pi^{n/2}}{\Gamma\big(\frac{n}{2}\big)} = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma\big(\frac{n+1}{2}\big)}.$$

24.16 Esercizio. Calcolare la misura $(n-1)$-dimensionale di una linea di livello.
Soluzione. Se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ è di classe C^1, la formula di coarea dà per $h > 0$

$$\begin{aligned}\frac{1}{h}\int_{\{t<f<t+h\}} |Df|\,dx &= \frac{1}{h}\int_t^{t+h} \mathcal{H}^{n-1}(\{f=t\})\,dt \\ \frac{1}{h}\int_{\{t-h<f<t\}} |Df|\,dx &= \frac{1}{h}\int_{t-h}^{t} \mathcal{H}^{n-1}(\{f=t\})\,dt\end{aligned}$$

e quindi dal teorema di differenziazione dell'integrale, per $\mathcal{L}^1$-q.o. t,

$$\frac{d}{dt}\int_{\{f<t\}} |Df|\,dx = -\frac{d}{dt}\int_{\{f>t\}} |Df|\,dx = \mathcal{H}^{n-1}(\{f=t\}).$$