20. L'integrale di Lebesgue: un breve riassunto, II

20.a Il teorema di Fubini e le formule di riduzione

Per integrare funzioni di due variabili, l'idea intuitiva è integrare prima in una variabile e poi nell'altra. Indichiamo ad esempio con (x, y) le coordinate di $\mathbb{R}^2$ e sia $E \subset \mathbb{R}^2$. Per ogni $x \in \mathbb{R}$ sia $E_x := \{y \in \mathbb{R} \,|\, (x, y) \in E\}$ la "fetta di E sopra x". Nel caso di un intervallo $]a, b] \times]c, d]$ si ha

$$E_x := \begin{cases}]c, d] & \text{se } x \in]a, b], \\ \emptyset & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Dunque $|E_x|$ vale 0 se $x \notin]a, b]$ e $d - c$ se $x \in]a, b]$ e quindi

$$\mathcal{L}^2(]a, b]) \times]c, d]) = (b - a)(d - c) = \int_a^b \left(\int_c^d 1 \, dy \right) dx = \int_a^b |E_x| \, dx.$$

Il teorema di Fubini estende l'idea precedente a situazioni del tutto generali: insiemi misurabili arbitrari in spazi euclidei di ogni dimensione. Dividiamo le variabili in due gruppi, indicando con x e y i punti rispettivamente in $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^k$, $n, k \geq 1$, e con (x, y) le coordinate nello spazio prodotto $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$ in cui stiamo lavorando. Sia E un insieme in $\mathbb{R}^{n+k}$ e, per ogni $x \in \mathbb{R}^n$, sia

$$E_x := \left\{ y \in \mathbb{R}^k \,\middle|\, (x, y) \in E \right\}$$

la *fetta di E sopra x* riportata nel piano coordinato $\mathbb{R}^k$, cfr. la Figura 20.1. Si ha

20.1 Teorema (Fubini). *Sia E un insieme $\mathcal{L}^{n+k}$-misurabile in $\mathbb{R}^{n+k}$. Allora*

(i) *per quasi ogni x l'insieme $E_x \subset \mathbb{R}^k$ è $\mathcal{L}^k$- misurabile,*
(ii) *la funzione $x \to \mathcal{L}^k(E_x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, è misurabile su $\mathbb{R}^n$,*
(iii) *vale*
$$\mathcal{L}^{n+k}(E) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{L}^k(E_x) \, dx.$$

L'unica ipotesi richiesta è una proprietà qualitativa, la misurabilità di E in $\mathbb{R}^{n+k}$, facile da verificare. Non vi sono ipotesi di finitezza e la tesi (iii) è una uguaglianza: ciascun lato dell'uguaglianza può essere usato per calcolare l'altro.

Una utile variante del teorema di Fubini è data dalla

20.2 Teorema (Formula di riduzione). *Sia $f : E \subset \mathbb{R}^{n+k} \to \overline{\mathbb{R}}$ integrabile. Allora*

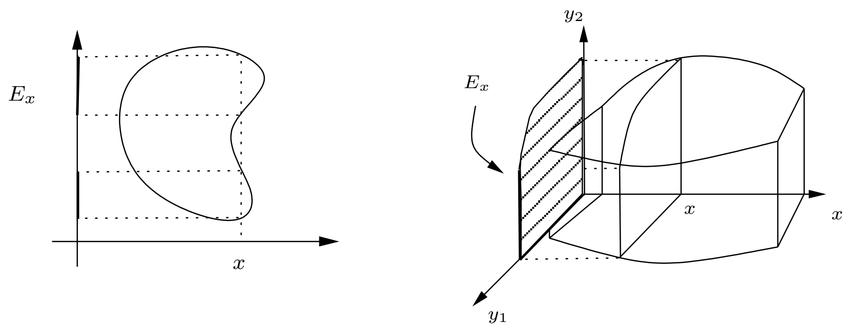

Figura 20.1. La "fetta" E_x di E sopra x.

(i) *per quasi ogni* x *la funzione* $\varphi_x(y) := f(x, y)$, $y \in E_x$, *è* $\mathcal{L}^k$*-misurabile su* E_x,
(ii) *la funzione* $x \to \int_{E_x} f(x, y)\, dy$, $x \in \mathbb{R}^n$, *è* $\mathcal{L}^n$*-misurabile,*
(iii) *si ha*

$$\int_E f(x, y)\, dx\, dy = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{E_x} f(x, y)\, dy \right) dx.$$

Si noti che l'unica ipotesi è l'integrabilità di f. Ricordiamo che l'integrabilità di f su E è garantita ad esempio nei seguenti casi

(i) f misurabile su E e di segno costante,
(ii) f sommabile su E,
(iii) f misurabile su E, $|f|$ limitata e $|E| < +\infty$.

In altri casi è sufficiente la misurabilità e l'applicazione della stessa formula a $|f|$ o a f_+ e f_- (che sono funzioni non negative) per decidere della integrabilità di f.

La formula di riduzione riconduce il calcolo degli integrali *doppi*, i.e., degli integrali di funzioni di due variabili indipendenti, al calcolo in successione di due integrali in una variabile. L'ordine di integrazione non è rilevante perché si hanno le due formule

$$\iint_E f(x, y)\, dx\, dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{E_x} f(x, y)\, dy \right) dx$$
$$\iint_E f(x, y)\, dx\, dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{E_y} f(x, y)\, dx \right) dy$$

dove $E_x = \{y \,|\, (x, y) \in E\}$, $E_y = \{x \,|\, (x, y) \in E\}$. In altre parole

20.3 Teorema (Tonelli). *Sia* $f : E \subset \mathbb{R}^2 \to \overline{\mathbb{R}}$ *una funzione integrabile su* E. *Allora i tre integrali*

$$\iint_E f(x, y)\, dx\, dy, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{E_x} f(x, y)\, dy \right) dx, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{E_y} f(x, y)\, dx \right) dy$$

esistono tutti e sono uguali.

20.b Formula di cambiamento di variabili

Per $n \geq 2$ si prova che la misura esterna di Lebesgue $\mathcal{L}^{n*}$ è *invariante per trasformazioni lineari ortogonali*, e anzi, se T è una applicazione lineare da $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^n$, allora T *manda misurabili in misurabili e*

$$\mathcal{L}^{n*}(T(E)) = |\det T|\,\mathcal{L}^{n*}(E) \qquad \forall E \subset \mathbb{R}^n. \tag{20.1}$$

Non sono solo le funzioni lineari a mandare misurabili in misurabili e insiemi di misura nulla in insiemi di misura nulla. Anche le funzioni localmente lipschitziane, e quindi le funzioni C^1 hanno la stessa proprietà. Esistono però funzioni continue che *non* hanno questa proprietà.

La formula in (20.1) si estende ai diffeomorfismi, i.e., trasformazioni biunivoche di classe C^1 con inversa di classe C^1. Si ha

20.4 Teorema (Formula di cambiamento di variabile). *Sia A un aperto di $\mathbb{R}^n$ e $\varphi : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una mappa di classe C^1. Allora φ manda insiemi di misura nulla in insiemi di misura nulla e misurabili in misurabili. Inoltre, se $E \subset A$ è misurabile e φ è iniettiva su E,*

(i) *si ha*

$$\mathcal{L}^n(\varphi(E)) = \int_E |\det \mathbf{D}\varphi(x)|\,dx,$$

(ii) *e, se $f : \varphi(E) \to \mathbb{R}$ è una funzione, $f \circ \varphi(x)\,|\det \mathbf{D}\varphi(x)|$ è integrabile su E se e solo se f è integrabile su $\varphi(E)$ e*

$$\int_E f(\varphi(x))|\det \mathbf{D}\varphi(x)|\,dx = \int_{\varphi(E)} f(y)\,dy.$$

Anche la formula del cambiamento di variabile è un'uguaglianza, se si può calcolare uno dei due termini, si può calcolare l'altro e sono uguali. Infine, notiamo esplicitamente che non c'è alcun bisogno di supporre che $\det \mathbf{D}\varphi \neq 0$.

20.c Derivazione dell'integrale

Siano $f, g : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ funzioni sommabili non negative. Si vede subito che $\int_A f(x)\,dx = \int_A g(x)\,dx\ \forall A \subset \mathbb{R}^n$ se e solo se $f(x) = g(x)$ quasi-ovunque, ma come caratterizzare $f(x)$ in termini dell'integrale, i.e., della mappa $A \to \int_A f(x)\,dx$? La *teoria della differenziazione* risponde a questa domanda che è centrale nella teoria della misura. Ovviamente, se f è continua in x, allora il teorema della media integrale dà

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)} f(y)\,dy = f(x) \quad \forall x.$$

In generale si ha il seguente teorema di derivazione

20.5 Teorema (Lebesgue). *Sia $E \subset \mathbb{R}^n$ misurabile e $f : E \to \mathbb{R}$ con $\int_E |f|^p\,dx < +\infty$, $1 \le p < +\infty$. Allora per quasi ogni $x \in E$ si ha*

$$\frac{1}{|B(x,r)|}\int_{E\cap B(x,r)} |f(y)-f(x)|^p\,dy \to 0 \qquad \text{per } r \to 0^+.$$

In particolare per q.o. $x \in \mathbb{R}^n$ il limite per $r \to 0^+$

$$\lim_{r\to 0}\frac{1}{|B(x,r)|}\int_{E\cap B(x,r)} f(y)\,dy$$

esiste finito e vale $f(x)$.

20.6 Esercizio. Sia f sommabile in $]-1,1[$. Mostrare che per quasi ogni $x \in]-1,1[$,

$$\lim_{r\to 0^+}\frac{1}{2r}\int_{x-r}^{x+r} f(y)\,dy = f(x).$$

20.7 Definizione. *Sia $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una funzione sommabile su E. Si chiamano* punti di Lebesgue di f

$$\mathcal{L}_f := \Big\{x \in E \in \mathbb{R}^n \,\Big|\, \exists \lambda \in \mathbb{R} \text{ tale che } \frac{1}{|B(x,r)|}\int_{E\cap B(x,r)} |f(y)-\lambda|\,dy \to 0\Big\}$$

e per ogni $x \in \mathcal{L}_f$ si chiama rappresentante di Lebesgue *di f la funzione $\lambda_f : \mathcal{L}_f \to \mathbb{R}$ data da*

$$\lambda_f(x) := \lim_{r\to 0}\frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)} f(y)\,dy.$$

Segue immediatamente dal teorema di differenziazione

20.8 Teorema. $|\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{L}_f| = 0$, *$\lambda_f$ è definita e finita su $\mathcal{L}_f$ e $f = \lambda_f$ quasi ovunque.*

Il teorema di differenziazione può estendersi ad oggetti più generali che le palle centrate. Si possono usare cubi centrati nel punto, o oggetti differenti. Ad esempio, sia A un insieme di misura positiva limitato, per fissare le idee supponiamo che

$$A \subset B(0,100) \subset \mathbb{R}^n, \qquad |A| = c\,|B_1|.$$

Per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ e $r > 0$ sia $A_{x,r} := x + r\,A$. Evidentemente $A_{x,r} \subset B(x, 100\,r)$ e $|A_{x,r}| = r^n\,|A| = c\,r^n\,|B_1| = c\,|B(x,r)|$. Si ha ancora

20.9 Teorema. *Sia $\int_E |f|^p\,dx < +\infty$, $E \subset \mathbb{R}^n$ misurabile. Allora per quasi ogni $x \in E$ si ha*

$$\frac{1}{|A_{x,r}|}\int_{E\cap A_{x,r}} |f(y)-f(x)|^p\,dy \to 0 \qquad \text{per } r \to 0^+.$$

20.10 Esercizio. Sia $f \in L^1(\mathbb{R})$. Mostrare che per quasi ogni $x \in \mathbb{R}$

$$\lim_{r\to 0^+}\frac{1}{r}\int_0^r f(x+t)\,dt = \lim_{r\to 0^+}\frac{1}{r}\int_{-r}^0 f(x+t)\,dt = f(x)$$

e anche

$$\lim_{r\to 0^+}\frac{1}{r}\int_r^{2r} f(x+t)\,dt = f(x)$$

Concludiamo raccogliendo alcune conseguenze notevoli del teorema di derivazione.

20.11 Teorema (Vitali). *Ogni funzione $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monotona è derivabile per quasi ogni $x \in \mathbb{R}$. $h' \in \mathcal{L}^1((a,b))$ $\forall a, b \in \mathbb{R}$, h' è non negativa se h è non decrescente e*

$$0 \leq \int_x^y h'(t)\, dt \leq h(y) - h(x) \qquad \forall x < y.$$

Una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si dice *assolutamente continua* se per ogni $\epsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che se $\{x_k\}$, $\{y_k\}$ sono tali che $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k - y_k| < \delta$ allora $\sum_{k=1}^{\infty} |f(x_k) - f(y_k)| < \epsilon$.

20.12 Teorema (Vitali). *Una funzione $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ è assolutamente continua su $[a,b]$ se e solo se f è derivabile per quasi ogni $x \in [a,b]$, $f'(x) \in \mathcal{L}^1([a,b])$ e*

$$f(y) - f(x) = \int_x^y f'(s)\, ds \qquad \forall x, y \in [a,b],\ x < y.$$

Essendo evidentemente le funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ lipschitziane assolutamente continue, segue dal Teorema 20.12 che le funzioni lipschitziane di una variabile sono derivabili quasi ovunque. Si prova anche

20.13 Teorema (Rademacher). *Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una funzione lipschitziana. Allora f è differenziabile in quasi ogni punto $x \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{D}f(x)$ è misurabile e $|\mathbf{D}f(x)| \leq Lip(f)$ per quasi ogni $x \in \mathbb{R}^n$.*