19. L'integrale di Lebesgue: un breve riassunto, I

Il problema di caratterizzare la classe delle funzioni integrabili secondo Riemann e di capire per quali funzioni vale il teorema fondamentale del calcolo, come pure l'esigenza di integrare nuove funzioni portano ad una nuova e più generale definizione di integrale dovuta a Henri Lebesgue (1875–1941). Sebbene le idee fondanti della teoria dell'integrazione di Lebesgue possano farsi risalire all'inizio del novecento a Henri Lebesgue (1875–1941) e a Giuseppe Vitali (1875–1932), applicazioni e successive generalizzazioni ed estensioni si sono susseguite per tutto il secolo scorso, al punto che oggi la teoria della misura e dell'integrazione ha un ruolo fondante nell'Analisi Matematica.

Qui e nel capitolo seguente, ci limiteremo ad illustrare alcuni aspetti di base della teoria senza dimostrazioni.

19.a Costruzione e proprietà dell'integrale: un breve riassunto

L'area del sottografico di una funzione non negativa può calcolarsi, cfr. la Figura 19.1, in due modi diversi, passando al limite sulle suddivisioni dell'asse x per l'integrale di Riemann o anche passando al limite sulle suddivisioni dell'asse y. Questa seconda alternativa definisce l'integrale come

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2^N} \sum_{k=1}^{\infty} |E_{f,k\,2^{-N}}|, \tag{19.1}$$

dove si è indicato con

$$E_{f,t} := \Big\{x \,|\, f(x) > t\Big\}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

il sopralivello t di f e con $|E_{f,t}|$ la sua "misura". Tenendo conto che $t \to |E_{f,t}|$ è non decrescente, la (19.1) definisce l'integrale con la *formula di Cavalieri*

$$\text{Lebesgue} \int_a^b f(x)\,dx = \text{Riemann} \int_0^\infty |E_{f,t}|\,dt \tag{19.2}$$

Da questo punto di vista la teoria dell'integrazione necessita perciò di una "buona" teoria della "misura" su $\mathbb{R}^n$, in grado di misurare insiemi eventualmente molto irregolari (si pensi ad esempio ai sopralivelli di funzioni oscillanti). È il ruolo della *misura di Lebesgue*.

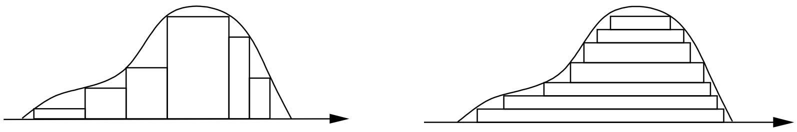

Figura 19.1. Il calcolo dell'integrale. A sinistra il metodo di Riemann, a destra quello di Lebesgue.

19.b Misura di Lebesgue

Un *intervallo* I di $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, è il prodotto di n intervalli $I = \prod_{i=1}^n]a_i, b_i]$ e il suo *volume* elementare è dato da $|I| := \prod_{i=1}^n (b_i - a_i)$. Se E è un sottoinsieme arbitrario di $\mathbb{R}^n$, la *misura esterna di* E è definita da

$$\mathcal{L}^{n*}(E) := \inf\Big\{\sum_{k=1}^\infty |I_k| \,\Big|\, I_k \text{ intervalli}, E \subset \bigcup_{k=1}^\infty I_k\Big\}; \tag{19.3}$$

è facile provare che $\mathcal{L}^{n*}$ è una estensione del volume elementare, nel senso che $\mathcal{L}^{n*}(I) = |I|$ per ogni intervallo I. Intuitivamente si ottiene $\mathcal{L}^{n*}(E)$ ricoprendo E con intervalli $\{I_k\}$ disposti in modo "ottimale" e calcolando la somma della serie delle misure degli intervalli $\{I_k\}$. Si noti che $\mathcal{L}^{n*} : \mathcal{P}(X) \to \overline{\mathbb{R}}_+$.

A questo punto si sarebbe finito se non fosse che la misura esterna $\mathcal{L}^{n*}$ *non è additiva*: esistono infatti sottoinsiemi E, F di $\mathbb{R}^n$ disgiunti fra loro e tali che $\mathcal{L}^{n*}(E \cup F) < \mathcal{L}^{n*}(E) + \mathcal{L}^{n*}(F)$.[1] Per evitare la difficoltà, si seleziona una classe di sottoinsiemi che ha particolari proprietà, la *classe* $\mathcal{M}$ *degli insiemi misurabili secondo Lebesgue*, e la *misura di Lebesgue* $\mathcal{L}^n$ è la restrizione di $\mathcal{L}^{n*}$ agli insiemi misurabili.

19.1 Definizione. *Un insieme $E \subset \mathbb{R}^n$ si dice* misurabile *se per ogni $\epsilon > 0$ esiste una unione al più numerabile di intervalli, che indichiamo con P, con*

$$P \supset E \qquad e \qquad \mathcal{L}^{n*}(P \setminus E) < \epsilon.$$

La misura esterna di un insieme misurabile E si chiama anche misura *(di Lebesgue) di E e si indica con $\mathcal{L}^n(E)$ o anche con $|E|$.*

Quest'ultima posizione è giustificata dal fatto che per gli intervalli I si ha $\mathcal{L}^{n*}(I) = |I|$.

Gli intervalli e le loro unioni numerabili sono in $\mathcal{M}$ per definizione. Con poca fatica, è facile controllare che le parti interne e le chiusure degli intervalli, così come le loro unioni numerabili sono ancora insiemi misurabili. Inoltre, se da una parte si prova che esistono insiemi non misurabili, dall'altra si prova che la classe $\mathcal{M}$ ha le seguenti *proprietà di chiusura* e che la misura esterna ha un buon comportamento sui misurabili.

19.2 Teorema. *Si ha*

---

[1] *Paradosso di Banach*: È possibile suddividere una palla in due parti di misura esterna ciascuna uguale alla misura della sfera iniziale.

(i) $\mathcal{M}$ *è una* σ-algebra, *i.e., se* $E, F \subset \mathbb{R}^n$ *sono insiemi misurabili, allora gli insiemi* $E \cup F$, $E \setminus F$, $E \cap F$ *sono misurabili e, se* $\{E_k\}$ *è una successione di insiemi misurabili di* $\mathbb{R}^n$*, allora* $\cup_k E_k$ *e* $\cap_k E_k$ *sono misurabili.*
(ii) $\mathcal{L}^n$ *è* σ-additiva, *i.e., se* $E, F \subset \mathbb{R}^n$ *sono misurabili allora* $|E \cup F| + |E \cap F| = |E| + |F|$ *e, se* $\{E_k\}$ *è una successione di insiemi misurabili di* $\mathbb{R}^n$ *a due a due disgiunti, allora*

$$\Big|\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\Big| = \sum_{k=1}^{\infty} |E_k|.$$

(iii) $\mathcal{L}^n$ *è continua sulle successioni crescenti di misurabili, i.e., se* $\{E_k\}$ *è una successione di sottoinsiemi misurabili di* $\mathbb{R}^n$ *con* $E_k \subset E_{k+1}$ $\forall k$*, allora* $|E_k| \to |\cup_k E_k|$ *per* $k \to \infty$.
(iv) $\mathcal{L}^n$ *è continua sulle successioni decrescenti di misurabili di misura finita, i.e., se* $\{E_k\}$ *è una successione di insiemi misurabili di* $\mathbb{R}^n$ *con* $E_k \supset E_{k+1}$ $\forall k$ *e se* $|E_1| < +\infty$*, allora* $|E_k| \to |\cap_k E_k|$ *per* $k \to \infty$.

Per successioni $\{E_k\}$ di insiemi, anche non misurabili, si ha comunque

(i) $\mathcal{L}^{n*}(\cup_k E_k) \le \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{L}^{n*}(E_k)$,
(ii) se $E_k \subset E_{k+1}$ $\forall k$, allora $\mathcal{L}^{n*}(E_k) \to \mathcal{L}^{n*}(\cup_k E_k)$.

Segue in particolare da (ii) del Teorema 19.2 che gli insiemi di misura nulla sono misurabili. Inoltre, poiché *ogni aperto si decompone in una unione numerabile di intervalli disgiunti*, tutti gli aperti sono misurabili. Perciò anche i chiusi sono misurabili. Si prova infine che un misurabile è sia una intersezione numerabile di aperti da cui si toglie un insieme di misura nulla o una unione numerabile di chiusi a cui si aggiunge un insieme di misura nulla.

19.3 Esercizio. Sia $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continua. Si mostri che il grafico di f ha misura di Lebesgue $\mathcal{L}^2$ nulla.

19.4 Esercizio. Sia $E \subset \mathbb{R}^n$. Provare che E è misurabile se $\mathcal{L}^n(\partial E) = 0$.

19.c Funzioni misurabili

A partire dalla misura di Lebesgue in $\mathbb{R}^n$ e dalla classe dei suoi insiemi misurabili $\mathcal{M}$, è possibile costruire una teoria dell'integrazione per funzioni $f : E \subset \mathbb{R}^n \to [-\infty, +\infty] = \overline{\mathbb{R}}$, con E misurabile.

Selezioniamo anzitutto una classe di funzioni, anch'essa denotata con $\mathcal{M}$, di funzioni $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ corrispondenti agli insiemi misurabili. Una funzione $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ si dice *misurabile* se per ogni t finito il *sopralivello*

$$E_{f,t} := f^{-1}(]t, +\infty[) = \Big\{x \in \mathbb{R}^n \,\Big|\, f(x) > t\Big\}$$

è misurabile. Una funzione $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ si dice *misurabile su* E se E è misurabile e la sua estensione con $-\infty$ fuori di E è misurabile.

Si vede che *le funzioni continue su* $\mathbb{R}^n$ *sono misurabili*, che *le funzioni continue su un sottoinsieme* $E \subset \mathbb{R}^n$ *misurabile sono misurabili su* E.

Si possono costruire funzioni *non misurabili.* Tuttavia si verifica che *tutte le operazioni algebriche su funzioni misurabili e i limiti puntuali di successioni di funzioni misurabili producono funzioni misurabili.* Queste proprietà della classe delle funzioni misurabili dipendono dal fatto che gli insiemi misurabili costituiscono una σ-algebra.

Infine l'approssimazione dei misurabili dall'interno con chiusi e dall'esterno con gli aperti si traduce sulle funzioni nella seguente caratterizzazione delle funzioni misurabili.

19.5 Teorema (Lusin). *Sia $f : E \to \mathbb{R}$ definita su un insieme misurabile $E \subset \mathbb{R}^n$. Allora f è misurabile se e solo se per ogni $\epsilon > 0$ esiste un chiuso F_ϵ tale che la restrizione di f su F_ϵ è continua e $|E \setminus F_\epsilon| < \epsilon$.*

19.d Definizione di integrale

Si potrebbe definire l'integrale di Lebesgue di una funzione non negativa misurabile tramite l'integrale di Riemann e la misura di Lebesgue via la formula di Cavalieri (19.2)

$$\int_E f(x)\,dx := \int_0^\infty \mathcal{L}^n(\{x \,|\, f(x) > t\})\,dt.$$

Un approccio più diretto è il seguente.

Ricordiamo che, se X è un insieme e $A \subset X$, la *funzione caratteristica* di A è definita da

$$\chi_A(x) := \begin{cases} 1 & \text{se } x \in A, \\ 0 & \text{se } x \in X \setminus A. \end{cases}$$

Una *funzione semplice* è una funzione misurabile con un numero finito di valori distinti. La classe delle funzioni semplici si indica con $\mathcal{S}$. Se $a_1, a_2, \dots, a_k$ sono i valori distinti di una funzione semplice φ, φ si scrive come

$$\varphi(x) = \sum_{j=1}^k a_j \chi_{E_j}(x), \qquad E_j := \Big\{x \,|\, \varphi(x) = a_j\Big\}.$$

Si noti che gli E_j sono misurabili e a due a due disgiunti. Se $\varphi \in \mathcal{S}$ è non negativa, l'*integrale di* φ è allora, come suggerito anche dall'intuizione,

$$I(\varphi) := \sum_{j=1}^k a_j |E_j|$$

con la convenzione che se $a_j = 0$ e $|E_j| = +\infty$, allora $a_j|E_j| = 0$. Una volta definito l'integrale di funzioni semplici non negative, si definisce prima l'*integrale di Lebesgue* per funzioni $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ misurabili su E *non negative* come

$$\int_E f(x)\,dx := \sup\Big\{I(\varphi) \,\Big|\, \varphi \in \mathcal{S}, \varphi(x) \le f(x)\ \forall x \in E,\ \varphi(x) = 0\ \forall x \in E^c\Big\}. \tag{19.4}$$

Infine, per funzioni $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ misurabili, si decompone f in parte positiva e parte negativa,

$$f(x) = f_+(x) - f_-(x), \qquad f_+(x) := \max(f(x), 0), \qquad f_-(x) := \max(-f(x), 0)$$

e si pone

19.6 Definizione. *Sia $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ misurabile su E. Si dice che f è* integrabile *su E se uno almeno dei due integrali $\int_E f_+(x)\,dx$ e $\int_E f_-(x)\,dx$ è finito. Se f è integrabile,* l'integrale di Lebesgue *di f è allora*

$$\int_E f(x)\,dx := \int_E f_+(x)\,dx - \int_E f_-(x)\,dx.$$

Si dice poi che f è sommabile *se entrambi gli integrali di f_+ e f_- sono finiti. La classe delle funzioni sommabili su E si indica con $\mathcal{L}^1(E)$.*

Si osservi che la differenza nelle teorie della integrazione di Riemann e di Lebesgue è nella scelta delle funzioni semplici: combinazioni finite di funzioni caratteristiche di *insiemi misurabili* nella teoria di Lebesgue, combinazioni finite di funzioni caratteristiche di *intervalli* nella teoria di Riemann.

19.e Proprietà dell'integrale di Lebesgue

Le proprietà dell'integrale di Lebesgue si deducono dalle proprietà dell'integrale di funzioni semplici attraverso l'uso della additività numerabile della misura e il seguente lemma di approssimazione

19.7 Lemma. *Sia $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}_+$ una funzione misurabile non negativa. Esiste una successione crescente di funzioni semplici $\{\psi_k\}$ tali che*

$$\psi_k(x) \to f(x) \text{ puntualmente} \qquad \text{e} \qquad \int \psi_k(x)\,dx \to \int f(x)\,dx.$$

Si prova così

19.8 Teorema. *Si ha*

(i) (MONOTONIA) *se f, g sono integrabili su E e $f \leq g$, allora*

$$\int_E f(x)\,dx \leq \int_E g(x)\,dx.$$

(ii) (LINEARITÀ) *$\mathcal{L}^1(E)$ è uno spazio vettoriale e l'integrale sulle funzioni sommabili è un operatore lineare,*

$$\int_E (\alpha f(x) + \beta g(x))\,dx = \alpha \int_E f(x)\,dx + \beta \int_E g(x)\,dx$$

per ogni $f, g \in \mathcal{L}^1(E)$ e ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

(iii) (CONTINUITÀ) *Se f è integrabile, allora*

$$\left| \int_E f(x)\,dx \right| \leq \int_E |f(x)|\,dx.$$

(iv) (Teorema di Beppo Levi) *Siano E misurabile e $f_k : E \subset \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ una successione crescente di funzioni non negative misurabili su E. Detto $f(x) := \lim_{k\to\infty} f_k(x)$, finito o infinito, il limite puntuale delle $\{f_k\}$, si ha*

$$\int_E f(x)\,dx = \lim_{k\to\infty} \int_E f_k(x)\,dx.$$

A proposito della (iv) si noti che l'unica ipotesi è la misurabilità delle approssimanti f_k. In particolare la misurabilità del limite f è automatica, non c'è alcuna ipotesi di finitezza e infine la tesi è una uguaglianza: si può usare uno dei lati dell'uguaglianza per calcolare l'altro, nei due sensi.

Concludiamo con alcune semplici conseguenze:

(i) *se f è integrabile su E e $|f(x)| \leq M$ per ogni $x \in E$ e $|E| < +\infty$, allora f è sommabile su E e $\int_E |f|\,dx \leq M\,|E|$,*

(ii) *$f \in \mathcal{L}^1(E)$ se e solo se f è misurabile e $\int_E |f|\,dx < +\infty$,*

(iii) *se $E, F \subset \mathbb{R}^n$ sono misurabili e $f : E \cup F \to \overline{\mathbb{R}}$ è integrabile su $E \cup F$, allora*

$$\int_F f(x)\,dx + \int_G f(x)\,dx = \int_{F\cup G} f(x)\,dx + \int_{F\cap G} f(x)\,dx.$$

19.f Integrale e area del sottografico

L'integrale di Lebesgue rispetta l'idea intuitiva di area del sottografico. Si ha infatti

19.9 Teorema. *Sia $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ non negativa. f è misurabile su E se e solo se il suo sottografico*

$$SG_{f,E} := \Big\{(x,t)\,\Big|\, x \in E,\ 0 < t < f(x)\Big\}$$

è un sottoinsieme misurabile in $\mathbb{R}^{n+1}$, inoltre vale

$$\int_E f(x)\,dx = \mathcal{L}^{n+1}(SG_{f,E}). \tag{19.5}$$

19.10 Teorema (formula di Cavalieri). *Sia $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ una funzione misurabile su E e non negativa. Allora*

$$\int_E f(x)\,dx = \int_0^\infty \mathcal{L}^n(\{x \in E\,|\, f(x) > t\})\,dt.$$

19.g Diseguaglianza di Chebychev

Se $f : E \subset X \to \mathbb{R}$ una funzione $\mathcal{L}^n$-misurabile non negativa e $E_{f,t} := \{x \in E\,|\, f(x > t)\}$, dalla monotonia dell'integrale si deduce la *diseguaglianza*

$$|E_{f,t}| \leq \frac{1}{t}\int_{E_{f,t}} f(x)\,dx \qquad \forall t > 0 \tag{19.6}$$

a cui ci si riferisce con vari nomi: *stima debole*, *disuguaglianza di Markov*, *disuguaglianza di Chebychev*. La funzione monotona non decrescente $t \to |E_{f,t}|$ si chiama anche *funzione di ripartizione* di f.

19.h Insiemi trascurabili e integrale

Si dice che un predicato $p(x)$, $x \in E \subset \mathbb{R}^n$, è vero *per quasi ogni* $x \in E$ se l'insieme

$$\Big\{x \in E \,\Big|\, p(x) \text{ è falso}\Big\}$$

ha misura nulla. In particolare, se $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ è una funzione, si dice che "$f = 0$ quasi ovunque", o anche "$f(x) = 0$ per q.o. $x \in E$", se l'insieme $\{x \in E \,|\, f(x) \neq 0\}$ ha misura nulla, e si dice che "$|f| < \infty$ quasi ovunque", o anche "$|f(x)| < +\infty$ per q.o. $x \in E$", se l'insieme $\{x \in E \,|\, |f(x| = +\infty\}$ ha misura nulla. Dalla numerabile additività della misura segue

19.11 Proposizione. *Si ha*

(i) *se f è una funzione misurabile su E con $\int_E |f(x)|\,dx < \infty$. Allora $f(x) < +\infty$ quasi ovunque,*
(ii) *se f è una funzione misurabile non negativa su E, allora $\int_E f(x)\,dx = 0$ se e solo se $f(x) = 0$ per quasi ogni $x \in E$.*

Se $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ è misurabile, si chiama *sup essenziale* di f il numero (eventualmente ∞) definito da

$$\operatorname*{esssup}_E f := \inf\Big\{t \in \mathbb{R} \,\Big|\, f(x) < t \text{ per q.o. } x \in E\Big\}$$

e si pone

$$||f||_{\infty,E} := \operatorname*{esssup}_E |f| := \inf\Big\{t \in \mathbb{R} \,\Big|\, |f(x)| < t \text{ per q.o. } x \in E\Big\}. \tag{19.7}$$

Evidentemente $||f||_{\infty,E} = \sup_{x\in E} |f(x)|$ se $f \in C^0(E)$ e

$$\int_E |f|\,dx \leq ||f||_{\infty,E}\,|E| \qquad \forall f \in \mathcal{L}^1(E).$$

19.i Integrale di Riemann e integrale di Lebesgue

Come calcolare gli integrali secondo Lebesgue? Per funzioni regolari di una variabile, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ci si può appoggiare all'integrazione (generalizzata) secondo Riemann. Infatti, *le funzioni integrabili secondo Riemann e le funzioni integrabili in senso generalizzato sono integrabili secondo Lebesgue e l'integrale di Lebesgue e quello classico, alla Riemann o generalizzato, coincidono.* Quindi ad esempio

$$\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx = +\infty, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \pi, \qquad \text{ecc.}$$

Giuseppe Vitali (1875–1932) ha caratterizzato in termini di misura di Lebesgue le funzioni integrabili secondo Riemann, un annoso problema alla fine dell'ottocento: *$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ limitata è integrabile secondo Riemann se e solo se f è continua quasi ovunque.*