

# 17. Funzioni implicite

## 17.a Funzioni definite implicitamente

Sia data l'equazione lineare implicita in  $\mathbb{R}^2$

$$ax + by = 0.$$

Se  $b \neq 0$ , si può ricavare la variabile  $y$  in funzione della  $x$  come  $y = (-a/b)x$ . Equivalentemente possiamo dire che le soluzioni  $(x, y)$  dell'equazione implicita  $ax + by = 0$  sono il grafico della funzione di una variabile  $y = -(a/b)x$ .

Se si passa a equazioni non lineari, ad esempio

$$\phi(x, y) = x^2 + y^2 - 1,$$

la situazione è più complicata. Ad esempio l'insieme delle soluzioni di  $x^2 + y^2 - 1 = 0$  è il cerchio unitario di  $\mathbb{R}^2$ : globalmente non è un grafico, tuttavia a pezzi è il grafico di opportune funzioni o della variabile  $x$  o della variabile  $y$  definite su intervalli, cfr. Figura 17.1.

Un teorema dovuto a Ulisse Dini (1845–1918) assicura questo tipo di comportamento per una generica equazione non lineare in  $n$  variabili sulla base di una informazione qualitativa sulla equazione. Sia data una equazione non lineare

$$\phi(x) = 0, \quad x = (x^1, x^2, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n$$

con  $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  di classe  $C^1$  ed una sua soluzione  $x_0$ . Se  $\mathbf{D}\phi(x_0) \neq 0$ , allora le soluzioni dell'equazione  $\phi(x^1, x^2, \dots, x^n) = 0$  vicino a  $x_0$  sono i punti del grafico di una funzione di classe  $C^1$  di  $(n-1)$  variabili definita su un aperto di  $\mathbb{R}^{n-1}$ . Ne segue che l'insieme delle soluzioni, i.e., la *linea di livello* nulla di  $\phi$ ,

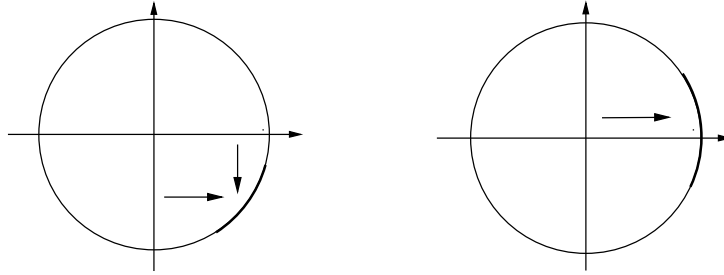
$$\Gamma := \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \phi(x) = 0 \right\}$$

è vicino a  $x_0$  una sottovarietà di dimensione  $(n-1)$ . Inoltre, lo spazio tangente in  $x_0$  a  $\Gamma$  è dato da

$$\text{Tan}_{x_0}\Gamma = \ker \mathbf{D}\phi(x_0) = \nabla\phi(x_0)^\perp.$$

Il teorema del Dini si estende anche a sistemi di equazioni implicite

$$\begin{cases} \phi^1(x^1, \dots, x^n) = 0, \\ \dots \\ \phi^m(x^1, \dots, x^n) = 0 \end{cases} \quad (17.1)$$



**Figura 17.1.** (a)  $y = -\sqrt{1-x^2}$  o  $x = \sqrt{1-y^2}$ . (b)  $x = \sqrt{1-y^2}$ .

ed è noto come *teorema delle funzioni implicite*. Ancora una volta il caso lineare è illuminante. Supponiamo di avere una matrice  $C \in M_{m,n}(\mathbb{R})$  con  $m < n$  di rango massimo. Riordinando le variabili, supponiamo che

$$C = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \end{pmatrix}$$

con  $\mathbf{A} \in M_{m,n-m}(\mathbb{R})$  e  $\mathbf{B} \in M_{m,m}(\mathbb{R})$  con  $\det \mathbf{B} \neq 0$ . Indicando con  $z = (x, y)$ ,  $x \in \mathbb{R}^{n-m}$ ,  $y \in \mathbb{R}^m$ , le coordinate in  $\mathbb{R}^n$ , il sistema  $Cz = 0$  si riscrive come

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathbf{A}x + \mathbf{B}y = 0.$$

Essendo  $\det \mathbf{B} \neq 0$ , si ricavano dall'ultima equazione le  $m$  variabili  $y$  in funzione delle  $n - m$  variabili  $x$ ,

$$y = -\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}x.$$

Abbiamo provato che, se  $C$  ha rango massimo  $m$ , le soluzioni di  $Cz = 0$  sono il grafico della funzione (in questo caso lineare) delle  $n - m$  variabili  $x$  data da  $y = -\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}x$ .

Il teorema delle funzioni implicite estende la precedente affermazione al caso di un sistema di equazioni non lineari.

### 17.b Il teorema delle funzioni implicite

Sia  $\phi : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $m < n$ ,  $\phi = (\phi^1, \dots, \phi^m)$  di classe  $C^k$ ,  $k \geq 1$ , e consideriamo il sistema (17.1), o con notazione più compatta

$$\phi(x^1, x^2, \dots, x^n) = 0. \tag{17.2}$$

Come nel caso lineare dividiamo le variabili in due gruppi  $x = (x^1, \dots, x^r) \in \mathbb{R}^r$  e  $y = (x^{r+1}, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^m$ ,  $r + m = n$ . Indichiamo con

$$\frac{\partial \phi}{\partial x}(x, y) \in M_{m,r}(\mathbb{R}) \quad \text{e} \quad \frac{\partial \phi}{\partial y}(x, y) \in M_{m,m}(\mathbb{R})$$

rispettivamente le matrici  $m \times r$  delle prime  $r$  colonne e  $m \times m$  delle ultime  $m$  colonne di  $\mathbf{D}\phi$  in  $(x, y)$ ,

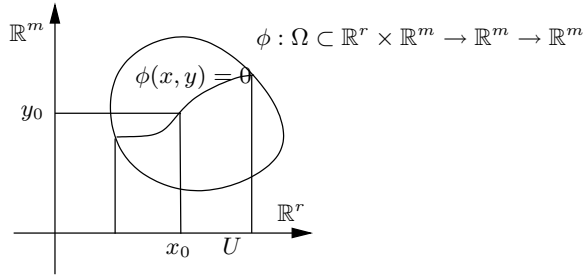


Figura 17.2. Il teorema delle funzioni implicite.

$$D\phi = \left( \begin{array}{c|c} \frac{\partial \phi}{\partial x} & \frac{\partial \phi}{\partial y} \end{array} \right).$$

**17.1 Teorema (delle funzioni implicite).** Sia  $\phi : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  una applicazione di classe  $C^k(\Omega)$ ,  $k \geq 1$ , e sia  $n > m$ . Se in  $(x_0, y_0) \in \Omega$

$$\phi(x_0, y_0) = 0, \quad \det \frac{\partial \phi}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0,$$

allora esistono un intorno aperto  $W$  di  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^m$ , un intorno aperto  $U$  di  $x_0$  in  $\mathbb{R}^r$  e una funzione  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^{n-m}$  tali che

- (i)  $\phi : W \rightarrow \mathbb{R}^m$  è aperta,
- (ii)  $\varphi$  è di classe  $C^1$ ,
- (iii) si ha

$$\begin{cases} (x, y) \in W, \\ \phi(x, y) = 0, \end{cases} \quad \text{se e solo se} \quad \begin{cases} x \in U, \\ y = \varphi(x). \end{cases}$$

*Dimostrazione.* Sia  $r := n - m$ . La funzione  $f(x, y) := (x, \phi(x, y))$ ,  $(x, y) \in \Omega$ , è di classe  $C^1$  e

$$Df = \left( \begin{array}{c|c} \text{Id}_r & \mathbf{0} \\ \hline \frac{\partial \phi}{\partial x} & \frac{\partial \phi}{\partial y} \end{array} \right)$$

quindi  $\det Df(x_0, y_0) = \det \frac{\partial \phi}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$ . Per il teorema di invertibilità locale, Teorema 12.2, esiste un intorno  $V$  di  $(x_0, y_0)$  tale che  $Z := f(V)$  è aperto e  $f|_V$  è un diffeomorfismo da  $V$  in  $Z$ . Si può dunque scegliere un intorno aperto connesso  $U$  di  $x_0$  in  $\mathbb{R}^r$  e una palla  $B(0, \delta)$  in  $\mathbb{R}^m$  in modo che  $U \times B(0, \delta) \subset Z$ . Se  $W := f^{-1}(U \times B(0, \delta))$ , allora  $f$  è un diffeomorfismo di classe  $C^1$  da  $W$  su  $U \times B(0, \delta)$ . In particolare  $f|_W$  è aperta e quindi  $\phi|_W$  è aperta quale composizione di  $f$  con la proiezione ortogonale sul secondo fattore. (i) è quindi dimostrata.

Sia  $g : U \times B(0, \delta) \rightarrow W$  l'inversa di  $f|_W$  che sappiamo essere di classe  $C^1$ . Scriviamo  $g$  come  $g =: (\alpha, \beta)$  con

$$\alpha := (g^1, g^2, \dots, g^r), \quad \text{e} \quad \beta := (g^{r+1}, \dots, g^{r+m}).$$

$\alpha, \beta$  sono ovviamente di classe  $C^1(U \times B(0, \delta))$ . Essendo  $g : U \times B(0, \delta)$  l'inversa di  $f|_W$ , si ha

$$\begin{cases} z = x, \\ w = \phi(x, y), \\ (x, y) \in W \end{cases} \quad \text{se e solo se} \quad \begin{cases} x = \alpha(z, w) = z, \\ y = \beta(z, w), \\ z \in U, \\ w \in B(0, \delta) \end{cases}$$

in particolare

$$\begin{cases} z = x, \\ 0 = \phi(x, y), \\ (x, y) \in W \end{cases} \quad \text{se e solo se} \quad \begin{cases} x = \alpha(z, w) = z \in U, \\ y = \beta(z, 0), \end{cases}$$

La funzione  $\varphi(x) := \beta(x, 0)$ ,  $x \in U$ , verifica dunque le (ii) e (iii). □

**17.2 Corollario.** *Nelle ipotesi e con le notazioni del Teorema 17.1 si ha*

(i)  $\Gamma \cap W$  è il grafico della funzione  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^{n-m}$ ,

$$\Gamma \cap W = \left\{ (x, y) \in W \mid \phi(x, y) = 0 \right\} = \left\{ (x, y) \mid x \in U, y = \varphi(x) \right\},$$

(ii)  $\phi(x, \varphi(x)) = 0 \forall x \in U$ , e differenziando

$$\mathbf{D}\varphi(x) = -\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^{-1}(x, \varphi(x))\frac{\partial\phi}{\partial y}(x, \varphi(x)) \quad \forall x \in U, \quad (17.3)$$

(iii) il pezzo di linea di livello  $\Gamma \cap W$  è diffeomorfo ad  $U$ , in particolare  $\Gamma \cap W$  è una  $(n - m)$ -sottovarietà di  $\mathbb{R}^n$  con

$$\text{Tan}_z \Gamma = \ker \mathbf{D}\phi(z) \quad \forall z \in \Gamma \cap W \quad (17.4)$$

o, equivalentemente,

$$\text{Tan}_z \Gamma^\perp = \text{Span} \left\{ \nabla\phi^1(z), \dots, \nabla\phi^m(z) \right\} \quad \forall z \in \Gamma \cap W. \quad (17.5)$$

*Dimostrazione.* (i) è la riscrittura della tesi del teorema delle funzioni implicite.

(ii) Da (i) segue che  $\phi(x, \varphi(x)) = 0 \forall x \in U$ . Differenziando in  $x$  con la regola della catena segue

$$\mathbf{D}\phi(x, \varphi(x)) \begin{pmatrix} \text{Id} \\ \mathbf{D}\varphi(x) \end{pmatrix} = 0, \quad (17.6)$$

o anche

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}(x, \varphi(x)) + \frac{\partial\phi}{\partial y}(x, \varphi(x))\mathbf{D}\varphi(x) = 0,$$

o ancora la (17.3).

(iii) Per (i)  $\Gamma \cap W$  è il grafico della funzione di classe  $C^1 \varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^{n-m}$  e dunque è diffeomorfo ad  $U$ . Lo spazio tangente a  $\Gamma \cap W$  in  $(x, \varphi(x))$  è dunque lo spazio tangente al grafico di  $\varphi$

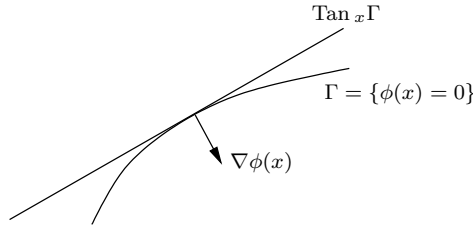


Figura 17.3. Piano tangente e piano normale.

in  $(x, \varphi(x))$ . Le colonne della matrice a destra nella (17.6) generano lo spazio tangente a  $\Gamma$  in  $(x, \varphi(x))$  e quindi

$$\text{Tan}_{(x, \varphi(x))} \Gamma \subset \ker \mathbf{D}\phi(x, \varphi(x));$$

segue la (17.4) avendo  $\text{Tan}_{(x, \varphi(x))} \Gamma$  e  $\ker \mathbf{D}\phi(x, \varphi(x))$  la stessa dimensione  $n - m$ .

La (17.5) segue infine perché

$$\ker \mathbf{D}\phi(z) = \text{Span} \left\{ \nabla \phi^1(z), \dots, \nabla \phi^m(z) \right\}^\perp \quad \forall z \in \Gamma \cap W.$$

□

**17.3 Corollario (delle funzioni implicite, II).** Sia  $\Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  una funzione di classe  $C^1$ , sia

$$\Gamma = \left\{ x \in \Omega \mid \phi(x) = 0 \right\}$$

Se la matrice jacobiana  $\mathbf{D}\phi(x)$  ha rango  $n$  in ogni punto  $x \in \Gamma$ , allora  $\Gamma$  è una  $(n - m)$ -sottovarietà di  $\mathbb{R}^n$  e  $\text{Tan}_x \Gamma = \ker \mathbf{D}\phi(x) \forall x \in \Gamma$ .

**17.c Esercizi**

**17.4 Esercizio.** Consideriamo anzitutto una situazione ben definita, ad esempio quella del cerchio unitario,

$$\phi(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^2,$$

e sia  $(x_0, y_0) = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ . Chiaramente  $(x - x_0) + (y - y_0) = 1$  è l'equazione della retta tangente al cerchio in  $(x_0, y_0)$ . Si ritrovi la stessa retta tangente al cerchio con la tesi del teorema delle funzioni implicite.

*Soluzione.* Si ha  $\mathbf{D}\phi(x, y) = (2x, 2y)$ , quindi  $\mathbf{D}\phi(x_0, y_0) = \sqrt{2}(1, 1)$ . Pertanto il cerchio unitario è nell'intorno di  $(x_0, y_0)$  sia il grafico di una funzione  $y = \varphi(x)$  che di una funzione  $x = \psi(y)$  entrambe di classe  $C^\infty$ . Inoltre lo spazio tangente al cerchio unitario è l'insieme dei vettori  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  tali che

$$0 = \sqrt{2}(1, 1) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x + y,$$

in accordo con l'intuizione.

Per calcolare lo spazio tangente, si può procedere in modo leggermente diverso: dal teorema delle funzioni implicite  $y = \varphi(x)$ ; si ha quindi

$$x^2 + \varphi^2(x) = 1 \quad \text{per } x \text{ vicino a } 1/\sqrt{2}.$$

Derivando in  $x$  si trova  $2x + 2\varphi(x)\varphi'(x) = 0$ , e quindi  $\varphi'(x_0) = -1$ . Il vettore  $(1, \varphi'(x_0))$  è il vettore velocità della curva  $x \rightarrow \varphi(x)$ , dunque  $(1, -1)$  genera lo spazio tangente al cerchio in  $(x_0, y_0)$ , in accordo con l'intuizione e con quanto provato prima.

**17.5 Esercizio.** Si consideri l'insieme  $\Gamma$  di  $\mathbb{R}^3$  delle soluzioni di

$$\begin{cases} x + \log y + 2z - 2 = 0, \\ 2x + y^2 + e^z - 1 - e = 0 \end{cases}$$

Descrivere  $\Gamma$  nell'intorno di  $(0, 1, 1) \in \Gamma$  usando il teorema delle funzioni implicite.

*Soluzione.* Sia  $\phi(x, y, z) := (x + \log y + 2z - 2, 2x + y^2 + e^z - 1 - e)$ . Si ha

$$\mathbf{D}\phi(0, 1, 1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & e \end{pmatrix}$$

e, essendo  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & e \end{pmatrix} = e - 4 \neq 0$ , segue dal teorema delle funzioni implicite che esiste un intorno aperto  $W \subset \mathbb{R}^3$  di  $(0, 1, 1)$  tale che

$$\Gamma \cap W = \{(x, y, z) \mid y = \alpha(x), z = \beta(x)\}$$

con  $\varphi := (\alpha, \beta)$  di classe  $C^\infty$ . In altre parole  $\Gamma \cap W$  è la traiettoria della curva parametrizzata dalla  $x$ ,  $x \rightarrow (x, \alpha(x), \beta(x))$ . Sempre dal teorema delle funzioni implicite, segue che lo spazio tangente (i.e., la retta tangente traslata nell'origine) alla curva  $\Gamma \cap W$  è il nucleo di  $\mathbf{D}\phi(0, 1, 1)$ , vale a dire le soluzioni  $(x, y, z)$  del sistema lineare

$$\begin{cases} x + 2y = 0, \\ 2x + 2y + ez = 0. \end{cases}$$

Si noti che queste soluzioni sono perpendicolari ai due vettori indipendenti fra loro  $(1, 1, 2)$  e  $(2, 2, e)$ .

Per calcolare lo spazio tangente alla curva  $\Gamma$  in  $(0, 1, 1)$ , si può procedere anche nel seguente modo: sempre dal teorema delle funzioni implicite segue che  $y = \alpha(x)$ ,  $z = \beta(x)$ , con  $\alpha, \beta$  regolari. Sostituendo nella equazione implicita di  $\Gamma$  si trova

$$\begin{cases} x + \log \alpha(x) + 2\beta(x) - 2 = 0, \\ 2x + \alpha^2(x) + e^{\beta(x)} - 1 - e = 0 \end{cases}$$

in un intorno di zero. Derivando in  $x$  si ottiene, ricordando che  $\alpha(0) = \beta(0) = 1$ ,

$$\begin{cases} 2 + 2\alpha'(0) + 4\beta'(0) = 0, \\ 2 + 2\alpha'(0) + e\beta'(0) = 0, \end{cases}$$

vale a dire  $\alpha'(0) = -1$ ,  $\beta'(0) = 0$ . Essendo  $(1, \alpha'(0), \beta'(0))$  il vettore velocità della curva  $x \rightarrow (x, \alpha(x), \beta(x))$ , si conclude che la retta tangente a  $\Gamma$  in  $(0, 1, 1)$  ha equazione parametrica

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Si noti che  $(1, -1, 0)$  è davvero perpendicolare a  $(1, 1, 2)$  e a  $(2, 2, e)$ .

Infine si noti che la retta tangente a  $\Gamma$  è l'intersezione dei due piani tangenti alle due superfici di equazione rispettivamente le due righe di  $\phi$ .

**17.6 Esercizio.** Mostrare che l'insieme di livello  $xe^y + ye^x = 1$  è nell'intorno di  $(1, 0)$  il grafico di una funzione regolare  $y = \varphi(x)$ . Calcolare  $\varphi''(0)$ .

**17.7 Esercizio.** Mostrare che l'insieme di livello in  $\mathbb{R}^3$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1, \\ xe^y + y \cos z + xz = 1 \end{cases}$$

è nell'intorno del punto  $(1, 0, 0)$  il grafico di una curva  $x = x(z), y = y(z)$ . Calcolare l'accelerazione della curva in  $(1, 0, 0)$ .

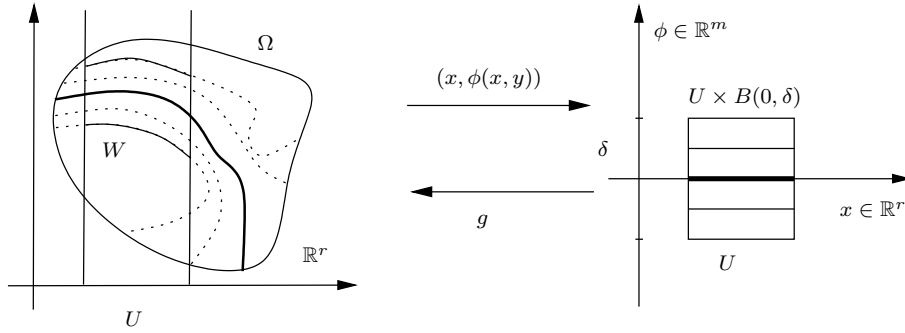


Figura 17.4. Illustrazione del teorema delle funzioni implicite.

**17.8 Esercizio (Foliazioni).** Sia  $\phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$  una funzione di classe  $C^1$  definita su un aperto  $\Omega \subset \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^m$ . Per ogni  $c \in \mathbb{R}^m$  chiamiamo *linea di livello  $c$*  di  $\phi$  l'insieme

$$\Gamma_c := \{(x, y) \in \Omega \mid \phi(x, y) = c\},$$

con una evidente analogia con le linee di livello di una carta geografica in cui  $\phi$  modella l'altezza sul livello del mare.

Il teorema delle funzioni implicite afferma in particolare che, se

$$\phi(x_0, y_0) = 0 \quad \text{e} \quad \det \frac{\partial \phi}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0,$$

allora la linea di livello zero è, vicino a  $(x_0, y_0)$ , il grafico di una funzione  $y = \varphi(x)$  di classe  $C^1$ . Ma cosa dire delle linee di livello vicine,

$$\Gamma_c := \{(x, y) \mid \phi(x, y) = c\}, \quad c \in \mathbb{R}^m, \quad |c| \text{ piccolo?}$$

Naturalmente, essendo  $\phi$  di classe  $C^1$ ,  $\det \frac{\partial \phi}{\partial y}(x, y) \neq 0$  in tutti i punti  $(x, y)$  vicini a  $(x_0, y_0)$ . Il teorema delle funzioni implicite si applica perciò alle linee di livello vicine alla linea di livello nulla. Si prova immediatamente applicando il teorema delle funzioni implicite alla funzione

$$\psi(x, y, c) := \phi(x, y) - c = 0$$

che esiste un'unica funzione  $(x, c) \rightarrow \varphi(x, c)$  di classe  $C^1$  tale che per ogni  $c$  vicino a zero, la linea di livello  $c$  è, vicino a  $(x_0, y_0)$ , il grafico di  $x \rightarrow \varphi(x, c)$ , cfr. la Figura 17.4, in particolare

$$\phi(x, g(x, c)) - c = 0$$

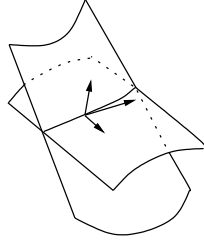
vicino a  $x_0$ .

**17.9 Esercizio.** Convincersi che le ipotesi del Teorema 17.1 sono solo sufficienti per ottenere la tesi.

*Soluzione.* Se  $\varphi : U \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  è una funzione di classe  $C^1$ , la funzione  $\phi : U \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definita da  $\phi(x, y) := y - \varphi(x)$ , ha  $\det \frac{\partial \phi}{\partial y}(x, y) = 1$  e come luogo di zeri il grafico di  $\varphi$ . Invece la funzione  $\phi^2$  non verifica le ipotesi del teorema in un punto  $(x_0, y_0)$  in cui  $\phi(x_0, y_0) = 0$  pur avendo  $\phi$  e  $\phi^2$  lo stesso luogo di zeri.

**17.10 Esercizio.** Le sfere di  $\mathbb{R}^3$ ,  $S^2 := \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = r^2\}$  sono gli insiemi di livello della funzione  $\phi(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$  da  $\mathbb{R}^3$  in  $\mathbb{R}$ .

L'intersezione fra due superfici due dimensionali di  $\mathbb{R}^3$  è un insieme di livello, questa volta di una funzione a valori in  $\mathbb{R}^2$ . Ad esempio la curva intersezione tra la sfera unitaria di  $\mathbb{R}^3$ ,  $\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$  e il piano  $z = 1/\sqrt{2}$  è il cerchio dello spazio dato dai punti  $(x, y, z)$  soluzioni del sistema



**Figura 17.5.** Intersezione di due superfici trasverse.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1, \\ z = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

e quindi è l'insieme di livello  $(1, 1/\sqrt{2})$  della funzione da  $\mathbb{R}^3$  in  $\mathbb{R}^2$  data da  $\phi(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2, z)$ .

**17.11 Esercizio.** Fare una dimostrazione del Teorema 17.1 nel caso  $m = 1$  e  $n = 2$  sviluppando i passi seguenti che fanno uso di nozioni del calcolo in una variabile. Nella letteratura italiana questo caso è chiamato *teorema del Dini*.

- (i) Mostrare che esiste  $\epsilon > 0$  tale che  $\phi(x_0, y) < 0$  se  $y_0 - \epsilon \leq y < y_0$ , e  $\phi(x_0, y) > 0$  se  $y_0 < y \leq y_0 + \epsilon$ .
- (ii) Mostrare che esiste  $\delta > 0$  tale che  $\phi(x, y_0 - \epsilon) < 0$  e  $\phi(x, y_0 + \epsilon) > 0$  se  $|x - x_0| < \delta$ .
- (iii) Posto  $R := \{(x, y) \mid |x - x_0| < \delta, |y - y_0| < \epsilon\}$ , osservare che si possono scegliere  $\epsilon$  e  $\delta$  in modo che valga anche  $\phi_y(x, y) > 0 \forall (x, y) \in R$ , e mostrare che, se  $|x_1 - x_0| < \delta$ , l'equazione  $\phi(x_1, y) = 0$  ha esattamente una soluzione  $y_1$  con  $(x_1, y_1) \in R$ ; questo definisce una funzione  $y = \varphi(x)$ ,  $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  con  $\phi(x, \varphi(x)) = 0$ .
- (d) Mostrare infine che  $\varphi$  è di classe  $C^1$  e che

$$\phi_x(x, \varphi(x)) + \phi_y(x, \varphi(x))\varphi'(x) = 0.$$

Estendere la dimostrazione precedente al caso  $m = 1$ ,  $n \geq 2$ .

**17.12 Esercizio.** Supponendo vero il teorema delle funzioni implicite, dedurre il teorema di invertibilità locale Teorema 12.2, Capitolo 9. Vista la dimostrazione del Teorema 17.1, si conclude che i Teoremi 17.1 e 12.2 Capitolo 9 sono dunque enunciati equivalenti. [Sugg. Si consideri l'equazione  $y - \varphi(x) = 0$ .]

**17.13 Esercizio (Intersezioni di sottovarietà).** Siano  $M$  ed  $N$  due 2-sottovarietà in  $\mathbb{R}^3$  con  $N \cap M \neq \emptyset$ . Mostrare che se i piani tangenti ad  $M$  ed  $N$  nei punti di  $M \cap N$  non coincidono, allora  $M \cap N$  è una curva.

Più in generale mostrare che se  $M$  una  $r$ -sottovarietà,  $N$  una  $s$ -sottovarietà,  $r + s > n$ ,  $x_0 \in M \cap N$  e  $\text{Tan}_{x_0} M \cap \text{Tan}_{x_0} N$  ha dimensione  $r + s > n$ , allora  $M \cap N$  è una  $r + s - n$  sottovarietà in un intorno di  $x_0$ . [Sugg. Esprimere localmente  $M$  e  $N$  come insiemi di livello e applicare il teorema delle funzioni implicite.]

**17.14 Esercizio.** Sia  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  di classe  $C^1$  e  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \Omega$  tale che  $\gamma(t) \in \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) = t\} \forall t \in \Omega$ . Calcolare la componente di  $\gamma'(t)$  nella direzione perpendicolare alla superficie  $\{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) = t\}$ . [Sugg.  $f(\gamma(t)) = t \forall t \in [0, 1]$ .]