25. Le formule di Gauss–Green

Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un aperto limitato. Nel seguito diciamo che un punto $x \in \partial A$ è un *punto regolare* per ∂A se esistono un cubo U_x aperto con centro x e lati paralleli agli assi, che possiamo scrivere a meno di una permutazione degli assi come $Q \times]a, b[$, Q cubo in $\mathbb{R}^{n-1}$, e una funzione $\alpha : Q \to]a, b[$ di classe $C^1(Q)$ tale che

(i) $U_x \cap A = \{(x', x_n) \,|\, a < x_n < \alpha(x'),\ x' \in Q\}$,
(ii) $U_x \cap \partial A = \{(x', x_n) \,|\, x_n = \alpha(x'),\ x' \in Q\}$.

Indichiamo con $r(A)$ l'insieme dei punti regolari di A. Si noti che $r(A)$ è aperto relativamente a ∂A. Per ogni $x \in r(A)$, il *versore normale esterno* a ∂A in x è dato dal vettore $\nu = (\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n)$ definito da

$$\nu_i := \frac{-\alpha_{x^i}}{\sqrt{1 + |D\alpha(x')|^2}} \qquad \forall i = 1, \dots, n-1, \qquad \nu_n := \frac{1}{\sqrt{1 + |D\alpha(x')|^2}}.$$

È presto visto infatti che $|\nu| = 1$, ν è perpendicolare al piano tangente al grafico di α in x, e che $t \to x + t\nu(x) \in A$ per ogni $t > 0$ sufficientemente piccolo. Naturalmente né il cubo U_x né la funzione α sono univocamente definite da A, tuttavia è facile provare che il versore normale esterno è univocamente definito nei punti $x \in r(A)$. Inoltre si vede che $x \in \partial A$ è regolare se e solo se esistono un intorno aperto U_x di x e una funzione $\varphi : U_x \to \mathbb{R}$ di classe C^1 tale che

(i) $U_x \cap A = \{y \in U_x \,|\, \varphi(y) < 0\}$,
(ii) $U_x \cap \partial A = \{y \in U_x \,|\, \varphi(y) = 0\}$,
(iii) $\nabla\varphi \neq 0$ in $U_x \cap \partial A$.

In questo caso il versore normale esterno in $x \in r(A)$ vale

$$\nu(x) = \frac{\nabla\varphi(x)}{|\nabla\varphi(x)|}.$$

Senza voler eccedere in generalità, dimostriamo qui le *formule di Gauss–Green* per una classe di insiemi sufficientemente ampia per le applicazioni, anche se l'uso della teoria della misura potrebbe ampliare di gran lunga la classe dei domini in cui queste importanti formule sono valide.

25.1 Definizione. *Diremo che un aperto $A \subset \mathbb{R}^n$* è ammissibile *se A è limitato, $\mathcal{H}^{n-1}(\partial A) < +\infty$ e $\mathcal{H}^{n-1}(\partial A \setminus r(A)) = 0$.*

Ad esempio un aperto di $\mathbb{R}^2$ con frontiera costituita dalle traiettorie di un numero finito di curve C^1 a tratti chiuse disgiunte è un aperto ammissibile di $\mathbb{R}^2$. Più in generale si prova facilmente che A è ammissibile se ∂A è una unione disgiunta $\partial A = \cup_{i=0}^N \Gamma_i$ con Γ_0 chiuso, $\mathcal{H}^{n-1}(\Gamma_0) = 0$, e per ogni $i = 1, \dots, N$ Γ_i è una $(n-1)$-sottovarietà di $\mathbb{R}^n$, cfr. Capitolo 16.

25.2 Teorema (Formule di Gauss–Green). *Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un aperto ammissibile e $\nu : r(A) \to \mathbb{R}^n$ il versore normale esterno ad A definito $\mathcal{H}^{n-1}$ q.o. in ∂A sui punti regolari di ∂A. Allora per ogni funzione f di classe C^1 su un aperto contenente $\overline{A}$, o più generalmente per ogni funzione $f \in C^1(A) \cap C^0(\overline{A})$ con $|Df| \in \mathcal{L}^1(A)$, si ha*

$$\int_A D_i f(x)\, dx = \int_{\partial A} f \nu_i \, d\mathcal{H}^{n-1} \qquad \forall i = 1, \dots, n.$$

La dimostrazione consiste nel provare il teorema analiticamente in una situazione geometrica semplice, estendendolo successivamente al caso generale con una tecnica di ricoprimento.

25.3 Proposizione. *Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un aperto limitato e $f \in C^1_c(A)$. Allora*

$$\int_A D_i f(x)\, dx = 0 \qquad \forall i = 1, \dots, n.$$

Dimostrazione. Sia Q un cubo con i lati paralleli agli assi contenente A. Non è restrittivo supporre che $Q := \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x_i| < 1 \, \forall i\}$. Se si estende f con zero a tutto $\mathbb{R}^n$, si ottiene una funzione, che indichiamo ancora con f, di classe $C^1(\mathbb{R}^n)$. Poiché per ogni $x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n$ si ha

$$\int_{-1}^1 D_i f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n)\, dx_i$$
$$= f(x_1, \dots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_{i-1}, -1, x_{i+1}, \dots, x_n) = 0,$$

integrando termine a termine si ottiene che

$$\int_A D_i f(x)\, dx = \int_Q D_i f(x)\, dx = 0.$$

□

Decomponiamo $\mathbb{R}^n$ come $\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$ e siano $x = (x', x_n)$, $x' = (x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$, $x_n \in \mathbb{R}$, le coordinate in $\mathbb{R}^n$. Siano Q un aperto limitato in $\mathbb{R}^{n-1}$ e $\alpha : Q \to]a, b[$ una funzione di classe C^1 e sia

$$A := \left\{ x = (x', x_n) \in Q \times [a, b] \,\middle|\, a < x_n < \alpha(x') \right\}.$$

Poiché $(-\nabla\alpha(x'), 1)$ è perpendicolare allo spazio tangente al grafico di α in $(x', \alpha(x'))$, il versore normale esterno ad A ha componenti $\nu = (\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n)$ date da

$$\begin{cases} \nu_i := \dfrac{-\alpha_{x_i}}{\sqrt{1 + |D\alpha(x')|^2}} & \forall i = 1, \dots, n-1, \\ \nu_n := \dfrac{1}{\sqrt{1 + |D\alpha(x')|^2}}. \end{cases}$$

25.4 Proposizione. *Per ogni $f \in C^1(A) \cap C^0(\overline{A})$ con $|Df| \in \mathcal{L}^1(A)$ e nulla vicino a $\partial(Q \times [a,b]) \cap A$ e fuori da $Q \times [a,b]$, si ha*

$$\int_A D_i f(x)\, dx = \int_{\partial A} f \nu_i \mathcal{H}^{n-1}.$$

Dimostrazione. Essendo f nulla su $\partial(Q \times [a,b]) \cap A$ e fuori da $Q \times [a,b]$, si ha

$$\int_{\partial A} f \nu_i d\mathcal{H}^{n-1} = \int_{\mathcal{G}_{\alpha,Q}} f \nu_i d\mathcal{H}^{n-1}$$

e, essendo $d\mathcal{H}^{n-1} = \sqrt{1 + |D\alpha(x')|^2}\, dx'$ l'elemento d'area di $\mathcal{G}_{\alpha,Q}$,

$$\int_{\partial A} f \nu_i \mathcal{H}^{n-1} = \begin{cases} -\displaystyle\int_Q f(x', \alpha(x')) \frac{\partial \alpha}{\partial x_i}(x')\, dx' & \text{se } i = 1, \dots, n-1, \\ \displaystyle\int_Q f(x', \alpha(x'))\, dx' & \text{se } i = n. \end{cases} \tag{25.1}$$

Dal teorema fondamentale del calcolo e tenendo conto che $f = 0$ vicino a $\partial(Q \times [a,b]) \cap A$ e che $|Df| \in \mathcal{L}^1(A)$, si ottiene

$$\begin{aligned} \int_A D_n f(x', x_n)\, dx' dx_n &= \int_Q \int_a^{\alpha(x')} D_n f(x', x_n)\, dx' dx_n \\ &= \int_Q (f(x', \alpha(x')) - f(x', a))\, dx' = \int_Q f(x', \alpha(x'))\, dx'. \end{aligned} \tag{25.2}$$

Confrontando le (25.1) e (25.2) si ha la tesi per $i = n$.

Sia ora

$$F(x') := \int_a^{\alpha(x')} f(x', x_n)\, dx_n, \qquad x' \in Q.$$

Derivando sotto il segno di integrale $F(x')$ in x_i, $i = 1, \dots, n-1$, cfr. Corollario 21.18, si ottiene

$$D_i F(x') = \int_a^{\alpha(x')} D_i f(x', x_n)\, dx_n + f(x', \alpha(x')) D_i \alpha(x');$$

d'altra parte

$$\begin{aligned} \int_A D_i f(x', x_n)\, dx' dx_n &= \int_Q \left(\int_a^{\alpha(x')} D_i f(x', x_n)\, dx_n \right) dx' \\ &= \int_Q D_i F(x')\, dx' - \int_Q f(x', \alpha(x')) D_i \alpha(x')\, dx', \end{aligned} \tag{25.3}$$

ed essendo f nulla vicino a $\partial(Q \times [a,b]) \cap A$,

$$\begin{aligned} &\int_Q \frac{\partial F}{\partial x^i}(x')\, dx' \\ &\quad = F(x_1, \dots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \dots, x_n) - F(x_1, \dots, x_{i-1}, -1, x_{i+1}, \dots, x_n) = 0, \end{aligned} \tag{25.4}$$

per $i = 1, \dots, n-1$. Dal confronto tra le (25.3) e (25.1), si deduce la tesi per $i = 1, \dots, n-1$. □

25.5 Lemma. *Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ aperto e $K \subset A$ compatto. Esiste allora una funzione $\varphi \in C_c^\infty(A)$, tale che $0 \leq \varphi \leq 1$ e $\varphi = 1$ su K.*

Cenno di dimostrazione. La funzione $x \to d(x, A^c)$, $x \in K$, ha un minimo positivo δ essendo K compatto. Siano

$$A_1 := \Big\{x \in \mathbb{R}^n \,\Big|\, d(x, A^c) > \frac{\delta}{3}\Big\} \qquad\qquad K_1 := \Big\{x \in A \,\Big|\, d(x, K) \le \frac{\delta}{3}\Big\}$$

Allora $K \subset K_1 \subset A_1 \subset A$ e $\operatorname{dist}(K_1, A_1) = \frac{\delta}{3}$ e se

$$\psi(x) := \frac{d(x, A_1^c)}{d(x, A_1^c) + d(x, K_1)}, \qquad x \in \mathbb{R}^n,$$

allora $0 \le \psi \le 1$, $\psi = 1$ su K_1 e ψ è Lipschitziana. Una opportuna "regolarizzazione" di ψ è la funzione φ della tesi. □

25.6 Lemma. *Sia A un aperto regolare. Per ogni $\epsilon > 0$ esiste un aperto B con $\mathcal{L}^n(B) < \epsilon$, $\partial A \setminus B \subset r(A)$ e $\mathcal{H}^{n-1}(\partial A \cap B) < \epsilon$.*

Dimostrazione. Poiché $\mathcal{H}^{n-1}(\partial A \setminus r(A)) = 0$ esiste un ricoprimento aperto $\{B_i\}$ con $\operatorname{diam}(B_i) < 1$ e $\sum_{i=1}^\infty \operatorname{diam}^{n-1}(B_i) < \epsilon$. Se $B := \cup_{i=1}^\infty B_i$, B è aperto, $\mathcal{L}^n(B) \le C \sum_{i=1}^n \operatorname{diam}^n(B_i) < C\,\epsilon$, $\partial A \setminus B \subset r(A)$ e $\mathcal{H}^{n-1}(\partial A \cap B) < \epsilon$. □

Abbiamo ora bisogno del seguente teorema di ricoprimento

25.7 Lemma (Partizione dell'unità). *Sia $K \subset \mathbb{R}^n$ un compatto contenuto in una unione finita di aperti $\{V_i\}$, $K \subset \cup_{j=1}^N V_j$. Esistono allora per $j = 1, 2, \dots, N$ funzioni $\alpha_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ di classe C^∞, non negative e a supporto compatto in V_j tali che $\sum_{j=1}^N \alpha_j(x) = 1\ \forall x \in K$.*

Dimostrazione. Ogni punto z di K ha una palla a chiusura compatta B_z contenuta in V_i per qualche i. Perciò esistono $z_1, z_2, \dots, z_N \in K$ tali che $K \subset \cup_{i=1}^N V_i$. Sia H_i l'unione delle chiusure di quei B_{z^i} che sono contenuti in V_i. H_i è compatto e esistono funzioni g_i a supporto compatto in V_i tali che $\chi_{H_i}(z) \le g_i(z) \le \chi_{V_i(z)}$. Poniamo allora

$$\begin{aligned}
&\alpha_1 := g_1,\\
&\alpha_2 := (1 - \gamma_1) g_2,\\
&\dots\\
&\alpha_N := (1 - g_1)(1 - g_2)\dots(1 - g_{N-1}) g_N.
\end{aligned}$$

Si verifica subito che $\sum_{j=1}^N \alpha_j = 1 - (1 - g_1)(1 - g_2)\dots(1 - g_N)$ e, essendo $K \subset \cup_i H_i$, per ogni $z \in K$, almeno una tra le g_i vale 1 in z. □

Dimostrazione del Teorema 25.2. Per ogni $\epsilon > 0$ fissato, sia B aperto tale che $\mathcal{L}^n(B) < \epsilon$, $\mathcal{H}^{n-1}(\partial A \cap B) < \epsilon$, $\partial A \setminus B \subset r(A)$.

Per ogni $x \in \overline{A} \setminus B$ si sceglie un intorno U_x aperto di x in modo che

(i) se $x \in \operatorname{int} A$, $U_x \subset \operatorname{int} A$,
(ii) se x è un punto regolare, U_x è il cubo nella definizione di punto regolare.

Poiché $\overline{A} \setminus B$ è compatto, si può estrarre da $\{U_x\}$ un sottoricoprimento finito $\{U_i\}$, $i = 1, \dots, N$, di $\overline{A} \setminus B$, e quindi scegliere una partizione dell'unità $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N\}$ associata al ricoprimento tale che $\sum_{j=1}^N \alpha_j = 1$ su $\overline{A} \setminus B$. La funzione $f\alpha_j$ ha supporto in U_j, Sommando su $j = 1, \dots, N$ e tenendo conto che $\sum_{j=1}^N \alpha_j = 1$ in $\overline{A} \setminus B$, si ha

$$
\begin{aligned}
\int_{A\setminus B} D_i f\,dx &= \sum_{j=1}^{N}\int_{A\setminus B} D_i(f\alpha_j)\,dx = \sum_{j=1}^{N}\int_{(A\setminus B)\cap U_j} D_i(f\alpha_j)\,dx\\
&= \sum_{j=1}^{N}\int_{U_j\cap A} D_i(f\alpha_j)\,dx - \sum_{j=1}^{N}\int_{U_j\cap B} D_i(f\alpha_j)\,dx.
\end{aligned}
$$

Segue

$$
\Big|\int_A D_i f\,dx - \sum_{j=1}^{N}\int_{U_j\cap A} D_i(f\alpha_j)\,dx\Big| \to 0 \qquad \text{per } \epsilon\to 0 \tag{25.5}
$$

per l'assoluta continuità dell'integrale e l'ipotesi di sommabilità sulle derivate di f.

Poiché $f\alpha_j$ è nulla vicino al bordo di U_j, segue dalle Proposizioni 25.3 e 25.4 per ogni $j = 1,\dots,N$

$$
\int_{U_j\cap A} D_i(f\alpha_j)\,dx = \int_{\partial A\cap U_j} f\nu_i\,d\mathcal{H}^{n-1} = \int_{\partial A} f\alpha_j\nu_i\,d\mathcal{H}^{n-1}
$$

e quindi

$$
\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{N}\int_{U_j\cap A} D_i(f\alpha_j)\,dx &= \sum_{j=1}^{N}\int_{\partial A} f\alpha_j\nu_i\,d\mathcal{H}^{n-1} \qquad (25.6)\\
&= \int_{\partial A\setminus B} f\nu_i\,d\mathcal{H}^{n-1} + \sum_{j=1}^{N}\int_{\partial A\cap B} f\alpha_j\nu_i d\,\mathcal{H}^{n-1}.
\end{aligned}
$$

Poiché $\mathcal{H}^{n-1}(B) < \epsilon$ e $f \in C^0(\partial A)$,

$$
\Big|\sum_{j=1}^{N}\int_{\partial A\cap B} f\alpha_j\nu_i\,d\mathcal{H}^{n-1}\Big| \le C\,\epsilon
$$

per qualche $C > 0$ e la tesi segue per $\epsilon \to 0$ dalle (25.5) e (25.6). □

25.a Formula di integrazione per parti in $\mathbb{R}^n$

Le formule di Gauss–Green possono davvero etichettarsi come "teorema fondamentale del calcolo" per funzioni di più variabili. Infatti, applicando le formule di Gauss–Green al prodotto di due funzioni f e g, si ottengono le *formule di integrazione per parti* per funzioni di più variabili.

25.8 Proposizione. *Sia A un dominio ammissibile, e $\nu : \partial A \to \mathbb{R}^n$ il versore normale esterno ad A, $\nu = (\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n)$, e siano $f, g \in C^0(\overline{A}) \cap C^1(A)$ con gradienti sommabili in A. Allora*

$$
\int_A D_i f(x)g(x)\,dx = \int_{\partial A} f(y)g(y)\nu_i(y)\,d\mathcal{H}^{n-1}(y) - \int_A f(x)D_i g(x)\,dx \tag{25.7}
$$

per ogni $i = 1, 2, \dots, n$.

25.b Il teorema della divergenza

Sia A un dominio ammissibile e $E : \overline{A} \to \mathbb{R}^n$, $E = (E^1, E^2, \dots, E^n)$ un campo $C^0(\overline{A}) \cap C^1(A)$ con matrice jacobiana $\mathbf{D}E$ sommabile. Si chiama *divergenza del campo E* la funzione scalare

$$\operatorname{div} E(x) := \sum_{i=1}^n \frac{\partial E^i}{\partial x^i}(x) = \sum_{i=1}^n D_i E^i(x).$$

Se le funzioni $D_i E^i$, $i = 1, \dots, n$, sono tutte sommabili, applicando il teorema di Gauss–Green si trova

$$\int_A D_i E^i \, dx = \int_{\partial A} E^i \nu_i \, d\mathcal{H}^{n-1} \qquad \forall i = 1, \dots, n$$

e sommando su i, il *teorema della divergenza*

$$\int_A \operatorname{div} E(x) \, dx = \int_{\partial A} E \bullet \nu \; d\mathcal{H}^{n-1}. \tag{25.8}$$

La quantità

$$\phi(E, A) := \int_{\partial A} E \bullet \nu \; d\mathcal{H}^{n-1}$$

si chiama *flusso del campo E uscente da A*.

25.c Significato geometrico della divergenza

Sia $E : A \to \mathbb{R}^n$ un campo che supporremo di classe C^1 in un intorno di A. Per ogni palla $B(x, r) \subset A$ indichiamo con $\phi(E, r)$ il flusso del campo E uscente da $B(x, r)$,

$$\phi(E, r) := \int_{\partial B(x,t)} E \bullet \nu \; d\mathcal{H}^{n-1}, \qquad \nu(x) := x/|x|.$$

Dal teorema della divergenza

$$\phi(E, r) = \int_{B(x,r)} \operatorname{div} E(x) \, dx$$

e dunque dividendo per $|B(x, r)| = \omega_n r^n$ e mandando $r \to 0$, tenendo conto della continuità di $\operatorname{div} E(x)$,

$$\lim_{r \to 0} \frac{\phi(E, r)}{\omega_n r^n} = \lim_{r \to 0} \frac{1}{|B(x, r)|} \int_{B(x,r)} \operatorname{div} E(y) \, dy = \operatorname{div} E(x)$$

o

$$\phi(E, r) = \omega_n \operatorname{div} E(x) r^n + o(r^n) \qquad \text{per } r \to 0.$$

In altri termini, $\operatorname{div} E(x)$ *rappresenta il flusso (riscalato) uscente da una palla infinitesima centrata in x.*

25.9 Divergenza e trasporto di volume. Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ e $F : \mathbb{R} \times A \to \mathbb{R}^n$. Si chiama *linea di flusso*, o *linea integrale di* F una curva $\gamma(t) : I \to \Omega$ soddisfacente l'equazione differenziale $\gamma'(t) = F(t, \gamma(t))$, i.e., una curva $t \to (t, \gamma(t))$ che abbia come velocità $(1, F(t, \gamma(t)))$. Se F è regolare si dimostra nella teoria delle equazioni differenziali ordinarie che per ogni $x \in K$ esiste un'unica linea di flusso definita per $|t| < \epsilon_0(x)$ che al tempo $t = 0$ passi per x. Se denotiamo con $\phi(x, t)$ l'insieme di queste linee di flusso, i.e,,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}\phi(t,x) = F(t, \phi(t,x)), \\ \phi(0,x) = x, \end{cases}$$

e se si pone $\phi_t(x) := \phi(t, x)$, si ha allora $D\phi_0(x) = \mathrm{Id}$, e per ogni $K \subset\subset \Omega$, esiste ϵ_0 tale che $\phi(t, x)$ è definita su $] - \epsilon_0, \epsilon_0[\times K$ con $\det \mathbf{D}\phi_t(x) > 0$. Dalla (10.12) Capitolo 9 ponendo $A(t) := \mathbf{D}\phi_t(x)$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}[\det \mathbf{D}\phi_t(x)](t) &= \det \mathbf{D}\phi_t(x) \operatorname{tr} \Big(\mathbf{D}\phi_t(x)^{-1} \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{D}\phi_t(x)\Big) \\ &= \det \mathbf{D}\phi_t(x) \operatorname{tr} \Big(\mathbf{D}\phi_t(x)^{-1} \mathbf{D}\frac{\partial}{\partial t}\phi(t,x)\Big) \\ &= \det \mathbf{D}\phi_t(x) \operatorname{tr} \Big(\mathbf{D}\phi_t(x)^{-1}\, \mathbf{D}F(t, \phi(t,x))\, \mathbf{D}\phi_t(x)\Big) \\ &= \det \mathbf{D}\phi_t(x) \operatorname{tr} \mathbf{D}F(t, \phi(t,x)) \\ &= \det \mathbf{D}\phi_t(x) \operatorname{div} F(t, \phi(t,x)). \end{aligned}$$

Se ora $\Omega \subset\subset A$, e $\Omega_t := \phi_t(\Omega)$ è l'immagine di Ω "trasportata" dal flusso ϕ_t al tempo t, allora dalla formula dell'area

$$\mathcal{L}^n(\Omega_t) = \int_\Omega |\det \mathbf{D}\phi_t(x)| dx = \int_\Omega \det \mathbf{D}\phi_t(x) dx$$

e, derivando sotto il segno di integrale,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\mathcal{L}^n(\Omega_t) &= \int_\Omega \frac{\partial}{\partial t} \det \mathbf{D}\phi_t(x) dx \\ &= \int_\Omega \det \mathbf{D}\phi_t(x) \operatorname{div} F(t, \phi(t,x))\, dx = \int_{\Omega_t} \operatorname{div} F(t,x)\, dx. \end{aligned}$$

Per $F = F(x)$ e $t = 0$,

$$\frac{d}{dt} \log \mathcal{L}^n(\Omega_t)(0) = \frac{1}{\mathcal{L}^n(\Omega)} \int_\Omega \operatorname{div} F(x)\, dx.$$

i.e., $\operatorname{div} F(x)$ *è la variazione percentuale di volume infinitesimo trasportato dal flusso al tempo* $t = 0$.

25.d La formula di Stokes nel piano

Sia $A \subset \Omega \subset \mathbb{R}^2$ un insieme ammissibile, cfr. Definizione 25.1, Capitolo 19, ad esempio un aperto limitato del piano con frontiera costituita dalle traiettorie di un numero finito di curve chiuse disgiunte. Per ogni punto y regolare del bordo di A, è definito il vettore normale esterno $\mathbf{n}(y) = (n^1(y), n^2(y))$ ad A in y. Il versore

$$\mathbf{t}(y) := (-n^2(y), n^1(y))$$

è allora tangente a ∂A in y. Estendiamo allora la nozione di integrale di linea definendo per $\omega \in C^0(\partial A)$, il lavoro di ω lungo il *bordo orientato in senso antiorario di* A come

$$\int_{\partial^+ A} \omega := \int_{\partial^+ A} < \omega(y), \mathbf{t}(y) > \, d\mathcal{H}^1(y)$$

e osserviamo che, se $\gamma : [0,1]$ è una curva di classe C^1 a tratti semplice la cui traiettoria è il bordo di A con $\det[\gamma'(t)|\mathbf{n}(\gamma(t))] < 0$, allora $\int_{\partial^+ A} \omega = \mathcal{L}(\omega, \gamma)$. Con questa notazione le formule di Green si rileggono nel piano come *formula di Stokes*

25.10 Proposizione. *Sia A un aperto ammissibile in $\mathbb{R}^2$ e sia ω una forma differenziale, $\omega(x,y) = P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$ a coefficienti C^1 in un intorno di A. Allora*

$$\int_{\partial^+ A} \omega = \iint_A \Big(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\Big)\, dxdy. \tag{25.9}$$

Dimostrazione. Infatti, le formule di Gauss–Green danno

$$\begin{aligned}\int_{\partial^+ A} \omega &= \int_{\partial A} (P(y)t^1(y) + Q(y)t^2(y))\, d\mathcal{H}^1(y)\\ &= \int_{\partial A} (-P(y)n^2(y) + Q(y)n^1(y))\, d\mathcal{H}^1(y)\\ &= \iint_A \Big(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\Big)\, dxdy.\end{aligned}$$

□

La (25.9) ha una interessante applicazione al calcolo dell'area di una figura piana attraverso un integrale di bordo. Infatti scegliendo come forma differenziale ω una delle forme $x\,dy$, $-y\,dx$ o anche $\frac{1}{2}(x\,dy - y\,dx)$, si trova

$$\int_{\partial^+ A} \omega = \iint_A 1\, dxdy.$$

25.11 Esercizio. Calcolare l'area della cardioide

$$C := \Big\{(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) \,\Big|\, 0 \le \theta \le 2\pi, 0 \le \rho \le (1-\cos\theta)\Big\}.$$

La curva $\gamma(t) := ((1-\cos\theta)\cos\theta, (1-\cos\theta)\sin\theta)$, $t \in [0, 2\pi]$ percorre in senso antiorario ∂C. Perciò

$$\mathcal{L}^2(C) = \int_C 1\, dx\, dy = \frac{1}{2}\int_{\partial^+ C} (x\, dy - y\, dx) = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (1-\cos\theta)^2\, dt = \frac{3}{2}\pi.$$

25.12 Esercizio. Più in generale mostrare che, data una funzione $\varphi(\theta)$, $\theta \in [0, 2\pi]$, di classe C^1 a tratti e non negativa, l'area della figura data in coordinate polari da

$$A := \Big\{(\rho, \theta) \,\Big|\, 0 \le \rho < \varphi(\theta),\ \theta \in [0, 2\pi]\Big\}$$

è

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^2(A) &= \iint_A dx\,dy = \frac{1}{2}\int_{\partial^+ A} (x\,dy - y\,dx)\\ &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \Big(\varphi(\theta)\cos\theta(\varphi(\theta)\sin\theta)' - \varphi(\theta)\sin\theta(\varphi(\theta)\cos\theta)'\Big)\,d\theta\\ &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \varphi^2(\theta)\,d\theta.\end{aligned}$$

25.e Esercizi

25.13 Esercizio (Astroide). Calcolare area e lunghezza del bordo dell'astroide

$$A := \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\Big|\, x^{2/3} + y^{2/3} \le 1\Big\}.$$

25.14 Esercizio. Sia $S^2 := \{(x, y, z) \,|\, x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$. Calcolare

$$\int_{S^2} x^2\, d\mathcal{H}^2.$$

25.15 Esercizio. Sia T il triangolo di $\mathbb{R}^3$ di vertici $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$. Calcolare

$$\int_T x\, d\mathcal{H}^2.$$

25.16 Esercizio. Sia $G \subset \mathbb{R}^3$ il grafico della funzione $f : [0, 1] \times [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^2 + y$. Calcolare

$$\int_G x\, d\mathcal{H}^2.$$

25.17 Esercizio. Per $a, L > 0$ sia $C \subset \mathbb{R}^3$ il tronco di cono

$$C := \Big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,\Big|\, z^2 = a\,(x^2 + y^2),\ 0 \le z \le L\Big\}.$$

Calcolare il volume e l'area del bordo di C.

25.18 Esercizio (Solido di Viviani). Sia

$$V := \Big\{(x, y, z) \,\Big|\, x^2 + y^2 + z^2 \le 1,\ x^2 + y^2 \le x\Big\}$$

l'intersezione della sfera unitaria con il cilindro verticale $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 - x \le 0\}$.

(i) Calcolare il volume di V.

(ii) Mostrare che $S := \partial V = S_1 \cup S_2$ dove

$$\begin{aligned}S_1 &:= \Big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,\Big|\, x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ x^2 + y^2 \le x\Big\},\\ S_2 &:= \Big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,\Big|\, x^2 + y^2 + z^2 \le 1,\ x^2 + y^2 = x\Big\},\end{aligned}$$

e calcolare l'area di S_1 e S_2.

(iii) Mostrare che la curva $s(\alpha) := (\cos^2\alpha, \cos\alpha\sin\alpha, \sin\alpha)$, $-\pi < \alpha < \pi$, ha immagine $S_1 \cap S_2$ e calcolare la lunghezza di $S_1 \cap S_2$.

25.19 Esercizio. Calcolare
$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{1}{(1+|x|^2)^n}\,dx.$$

25.20 Esercizio. Calcolare $\mathcal{H}^{n-1}(\Sigma_{n-1})$ dove
$$\Sigma_{n-1} := \Big\{x \in \mathbb{R}^n, \,\Big|\, \sum_{i=1}^n x_i = 1,\ 0 \le x_i \le 1\ \forall i\Big\}.$$

25.21 Esercizio (Formula di Feymann). Sia $a \in \mathbb{R}^n$ a coordinate tutte positive. Provare che
$$\int_{S^{n-1}_+} \frac{1}{a \bullet x}\,d\mathcal{H}^{n-1}(x) = \frac{1}{(n-1)!\prod_{1\le j\le n} a_j}.$$

25.22 Esercizio. Sia $B_R \subset \mathbb{R}^n$ la palla di centro 0 e raggio R in $\mathbb{R}^n$. Provare che per ogni funzione $f \in C^1(\overline{B_R})$
$$\int_{B_R} \Big(\sum_{i=1}^n x^i D_i f(x) + nf(x)\Big)\,dx = R\int_{\partial B_R} f(x)\,d\mathcal{H}^{n-1}(x).$$

‘

25.23 Esercizio. Provare che, se $f \in C^3(\overline{\Omega})$ e $\nabla f = 0$ su $\partial\Omega$, allora
$$\int_\Omega (\Delta f)^2\,dx = \int_\Omega \sum_{1\le i,j\le n} (D_i D_j f)^2\,dx.$$

25.24 Esercizio. Calcolare il flusso del campo $E := (2x, y^2, z^2)$ uscente dalla sfera unitaria di $\mathbb{R}^3$.

25.25 Esercizio. Calcolare il flusso del campo $E = (xy^2, xy, y)$ uscente dalla superficie laterale del cilindro
$$C := \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,\Big|\, x^2+y^2 \le 1,\ -1 \le z \le 1\Big\}.$$

25.26 Esercizio. Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^n$ ammissibile. Allora
$$\mathcal{L}^n(\Omega) = \frac{1}{n}\int_{\partial\Omega} x \bullet \nu_\Omega\,d\mathcal{H}^{n-1}.$$