9. Calcolo differenziale, I

9.a Derivate direzionali, derivate parziali, diffferenziale

Consideriamo $\mathbb{R}^n$ come spazio vettoriale dotato di prodotto scalare. Ricordiamo che se $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e $v \in \mathbb{R}^n$, la mappa $r_v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, $r_v(t) := x_0 + vt$, è costantemente x_0 se $v = 0$ ed è la parametrizzazione della retta passante per x_0 a $t = 0$ percorsa con velocità costante v.

Siano $A \subset \mathbb{R}^n$ aperto, $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione e $x_0 \in A$. Esiste allora $\epsilon_0 > 0$ tale che $B(x_0, \epsilon_0) \subset A$ e dunque per ogni $v \in \mathbb{R}^n$ $r_v(t) \in A$ se $|t| \leq \epsilon_0/|v|$ ($t \in \mathbb{R}$ se $v = 0$) e la funzione composta

$$\phi_v(t) := f(x_0 + tv), \qquad t \in r^{-1}(A), \tag{9.1}$$

detta la *restrizione di f alla retta per x_0 di direzione v*, è definita almeno sull'intervallo $|t| < \epsilon_0/|v|$ ($\mathbb{R}$ se $v = 0$).

9.1 Definizione. *Si dice che f ha* derivata direzionale in x_0 nella direzione v *se esiste finito*

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\phi_v(t) - \phi_v(0)}{t}, \tag{9.2}$$

e cioè se ϕ_v è derivabile in 0*. La deriva di ϕ_v in 0, $\phi'_v(0)$, si chiama la* derivata direzionale di f in x_0 nella direzione v *e si indica con uno dei simboli*

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) \in \mathbb{R}, \qquad \textit{o anche} \qquad D_v f(x_0).$$

Si noti che dalla definizione segue che

$$\frac{\partial f}{\partial(\lambda v)}(x_0) = \lambda \frac{\partial f}{\partial v}(x_0) \qquad \forall \lambda \in \mathbb{R},$$

in particolare $\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = 0$ se $v = 0$.

Siano ora $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ una base di $\mathbb{R}^n$, in linea di principio non necessariamente la base standard, e $(x^1, x^2, \dots, x^n)$ il rispettivo sistema di coordinate.

9.2 Definizione. *La derivata direzionale di f in x_0 nella direzione e_i si chiama anche la* derivata parziale di f rispetto a x^i *e la si indica anche con uno dei simboli*

$$\frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0) = \frac{\partial}{\partial x^i} f(x_0) = D_i f(x_0) = f_{x^i}(x_0) := \frac{\partial f}{\partial e_i}(x_0).$$

La (9.2) definisce la derivata parziale di f rispetto a x^i in $x_0 = (x_0^1, x_0^2, \dots, x_0^n)$ come la derivata della funzione di *una variabile*

$$x \to f(x_0^1, \dots, x_0^{i-1}, x, x_0^{i+1}, \dots, x_0^n)$$

in $x = x_0^i$. Pertanto la derivata parziale rispetto a x^i si ottiene considerando costanti le variabili $(x^1, \dots, x^{i-1}, x^{i+1}, x^n)$ e derivando f (come fuznione di una variabile) rispetto a x^i.

9.3 Esercizio. Per calcolare $\frac{\partial f}{\partial x}(1,1)$ con $f(x,y) := x^2 + y^2$, si considera $\varphi(x) := f(x,1) = x^2 + 1$ e $\frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = \frac{d\varphi_1}{dx}(1) = 2$.

9.4 Esercizio (Teorema di Fermat). Mostrare che, se $f : A \to \mathbb{R}$ ha un massimo (risp. minimo) locale in un punto x_0 interno ad A e se f ha derivata direzionale in x_0 nella direzione v, allora

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = 0.$$

9.b Differenziale

La sola esistenza di tutte le derivate parziali non implica in generale ulteriori proprietà per la funzione. Quel che serve è l'approssimazione di f con una funzione lineare.

9.5 Definizione. *Siano $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}^n$ aperto e $x_0 \in A$. Si dice che f è* differenziabile *in x_0 se esiste una funzione lineare $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, detta* differenziale *o* applicazione lineare tangente *ad f in x_0 tale che*

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - L(h)}{|h|} = 0. \tag{9.3}$$

Se $A \subset \mathbb{R}^n$ è aperto, si dice che $f : A \to \mathbb{R}$ è differenziabile in A *se f è differenziabile in ogni punto di A.*

9.6 Proposizione. *Sia $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}^n$, e sia x_0 interno ad A. Se f è differenziabile in x_0 con differenziale L, allora*

(i) *f è continua in x_0,*
(ii) *f ha tutte le derivate direzionali in x_0 e*

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = L(v) \qquad \forall v \in \mathbb{R}^n. \tag{9.4}$$

In particolare

- *l'applicazione $v \mapsto \frac{\partial f}{\partial v}(x_0)$, $v \in \mathbb{R}^n$, è lineare,*
- *il differenziale, se esiste, è unico.*

Dimostrazione. (i) Per $h \in \mathbb{R}^n$, $h \neq 0$, si ha

$$\Big|f(x_0+h)-f(x_0)-L(h)\Big| = |h| \left|\frac{f(x_0+h)-f(x_0)-L(h)}{|h|}\right| \to 0 \cdot 0 = 0,$$

e poiche' $L(h) \to 0$ per $h \to 0$, (le applicazioni lineari su $\mathbb{R}^n$ sono continue), segue dal teorema dei carabinieri che $f(x_0+h)-f(x_0) \to 0$.

(ii) Sia L un differenziale per f in x_0. Sia $v \in \mathbb{R}^n$, $v \neq 0$. Dalla definizione di differenziale e dai teoremi sui limiti di funzioni composte segue anche che

$$\left|\frac{f(x_0+tv)-f(x_0)}{t} - L(v)\right| = \left|\frac{f(x_0+tv)-f(x_0)-L(tv)}{t}\right| \ \to\ 0$$

per $t \to 0$. Quindi f ha derivata nella direzione v in x_0 e

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = L(v).$$

L'unicita' del differenziale segue dalla unicita' delle derivate direzionali. □

9.c Matrice jacobiana

Siano $A \subset \mathbb{R}^n$ aperto e $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ la base standard di $\mathbb{R}^n$. Se $f : A \to \mathbb{R}$ è differenziabile in $x_0 \in A$ con differenziale L, segue da (ii) Proposizione 9.6 che per ogni $i = 1, \dots, n$

$$L(e_i) = \frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0)$$

Segue che la matrice associata all'applicazione lineare L è la matrice $1 \times n$, detta *matrice jacobiana di f in x_0*,

$$\mathbf{D}f(x_0) := \left(\frac{\partial f}{\partial x^1}(x_0), \frac{\partial f}{\partial x^2}(x_0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x^n}(x_0)\right). \tag{9.5}$$

e si ha

$$L(h) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0) h^i = \mathbf{D}f(x_0)\, h \qquad \text{righe per colonne.} \tag{9.6}$$

Come conseguenza della Proposizione 9.6 si ha

9.7 Proposizione. *Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ aperto e $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione. f è differenziabile in $x_0 \in A$ se e solo se*

(i) *f ha tutte le derivate parziali in x_0,*
(ii) *se $\mathbf{D}f(x_0)$ è la matrice jacobiana in (9.5), si ha*

$$f(x_0+h)-f(x_0)-\mathbf{D}f(x_0)h = o(|h|) \qquad \textit{per } h \to 0.$$

9.d Vettore gradiente

Siano $A \subset \mathbb{R}^n$ aperto e $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ la base standard di $\mathbb{R}^n$. Se $f : A \to \mathbb{R}$ è differenziabile in $x_0 \in A$, si chiama *vettore gradiente* di f in x_0 il vettore di $\mathbb{R}^n$ indicato con $\nabla f(x_0)$ o con $\operatorname{grad} f(x_0)$, definito da

$$\nabla f(x_0) := \left(\frac{\partial f}{\partial x^1}(x_0), \frac{\partial f}{\partial x^2}(x_0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x^n}(x_0)\right)^T. \tag{9.7}$$

Ricordando che la base standard di $\mathbb{R}^n$ è ortonormale,

$$\frac{\partial f}{\partial h}(x_0) = \mathbf{D}f(x_0)h = \nabla f(x_0) \bullet h = \operatorname{grad} f(x_0) \bullet h \qquad \forall h \in \mathbb{R}^n. \tag{9.8}$$

Dalla diseguaglianza di Cauchy segue che

$$\left|\frac{\partial f}{\partial h}(x_0)\right| = |\, \nabla f(x_0) \bullet h \,| \leq |\nabla f(x_0)|\, |h|$$

con uguaglianza

$$\frac{\partial f}{\partial h}(x_0) = |\nabla f(x_0)|\, |h|$$

se e solo se h è un multiplo positivo di $\nabla f(x_0)$. In altre parole

(i) se $\nabla f(x_0) = 0$, allora tutte le derivate direzionali di f in x_0 sono nulle,
(ii) se $\nabla f(x_0) \neq 0$, allora *al variare di h nell'insieme dei vettori di $\mathbb{R}^n$ di modulo 1, la funzione derivata direzionale $h \to \frac{\partial f}{\partial h}(x_0)$ raggiunge il suo massimo valore $|\nabla f(x_0)|$ quando*

$$h = \frac{\nabla f(x_0)}{|\nabla f(x_0)|}, \tag{9.9}$$

Sia ora $\gamma :]-1, 1[\to A$ una curva derivabile con $\gamma(0) = x_0$ e $\gamma'(0) = v$. È facile verificare che, se f è differenziabile in x_0, allora la curva $t \to f(\gamma(t))$ è differenziabile in 0 e

$$\frac{df \circ \gamma}{dt}(0) = \nabla f(x_0) \bullet \gamma'(0)$$

cfr. il teorema di differenziazione composta, Teorema 10.11. In particolare la crescita di f in x_0 lungo una qualunque curva regolare uscente da x_0 con velocità v dipende dalla curva solamente attraverso il vettore velocità di γ. Per una funzione differenziabile ha quindi senso definire la *pendenza di f in x_0 in una direzione v*, $|v| = 1$, come $\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = df_{x_0}(v)$. Con questo linguaggio si può allora concludere che,

9.8 Proposizione. *Se $\nabla f(x_0) \neq 0$, allora il vettore $\nabla f(x_0) \in \mathbb{R}^n$ punta nel verso di massima pendenza.*

Per funzioni non differenziabili in x_0, la nozione di pendenza in x_0 puo' non avere senso, cfr. l'Esercizio 9.11.

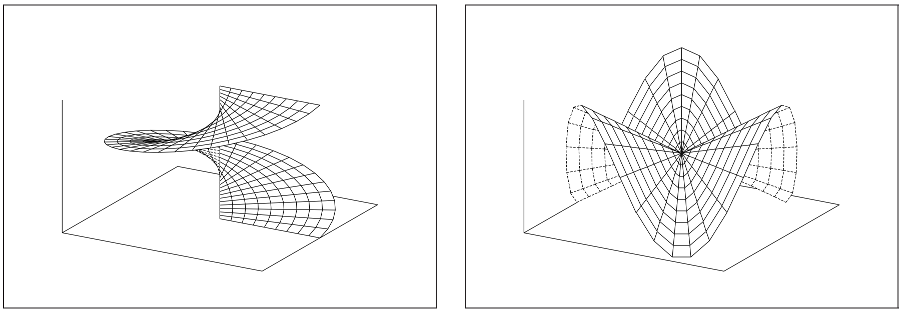

Figura 9.1. (i) Una funzione omogenea di grado 0. (ii) Una funzione omogenea di grado 1.

9.e Funzioni non differenziabili

Per funzioni di una sola variabile, $n = 1$, differenziabilità e derivabilità coincidono, come si verifica immediatamente. Per funzioni di due o più variabili, l'esistenza di tutte le derivate direzionali in un punto non implica in generale buone proprietà della funzione, come dimostrano i seguenti esempi.

9.9 Esercizio. (i) Mostrare che la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ che vale 0 sugli assi e 1 fuori da essi ha derivate parziali nulle pur non essendo continua.

(ii) Mostrare che la funzione

$$f(x, y) := \begin{cases} 1 & \text{se } y = x^2,\ x \neq 0, \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

non è continua in $(0, 0)$ eppure ha derivata direzionale nulla in $(0, 0)$ in ogni direzione.

(iii) Mostrare che la funzione

$$f(x, y) := \begin{cases} \left(\frac{x^2 y}{x^4 + y^2}\right)^2 & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

ha tutte le derivate direzionali nulle in $(0, 0)$ pur non essendo continua.

9.10 Esercizio. Mostrare che la funzione

$$f(x, y) := \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} & \text{se } x \neq 0, \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

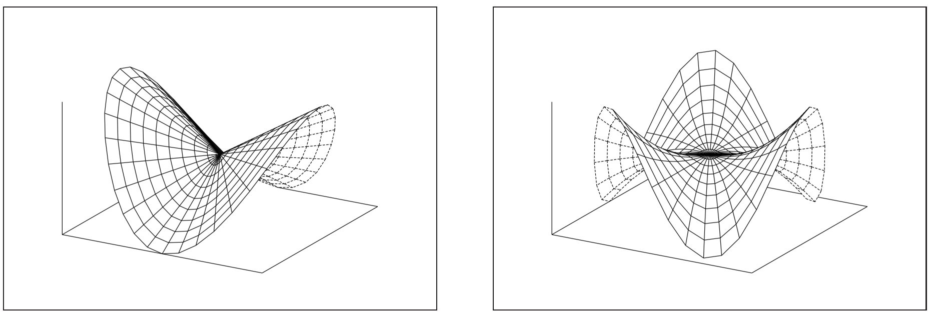

Figura 9.2. (i) Una funzione omogenea di grado 1. (ii) Una funzione omogenea di grado 2.

è continua in $(0,0)$, ha tutte le derivate direzionali, ma l'*applicazione lineare tangente* $v \to \frac{\partial f}{\partial v}(0,0)$ non è lineare, perche' le derivate parziali sono nulle e

$$0 = 1\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) + 1\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) \neq \frac{\partial f}{\partial(1,1)}(0,0) = 1/2.$$

Per una illustrazione, cfr. (ii) Figura 9.1.

9.11 Esercizio. Puo' anche accadere che una funzione abbia tutte le derivate direzionali nulle, diciamo in $(0,0)$, sia continua ovunque, ed esistono due percorsi diversi fra loro ma tangenti in $(0,0)$ percorrendo i quali si arriva a $(0,0)$ con pendenze diverse. Mostrare che la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ data da

$$f(x,y) := \begin{cases} x & \text{se } y = x^2, \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

ha tutte le derivate direzionali nulle in $(0,0)$, è continua in $(0,0)$, ma se ci si restringe alla curva (x,x^2), si trova

$$\lim_{x\to 0} \frac{x-0}{x} = 1 \neq \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0.$$

Non ha senso parlare della "pendenza" del grafico di f nella direzione $(1,0)$ in $(0,0)$!

Per funzioni di più variabili, $n \geq 2$, la Proposizione 9.6 mostra come la differenziabilità implichi la continuità della funzione, l'esistenza delle derivate direzionali, e la linearità dell'applicazione tangente (la (9.4)). Le implicazioni opposte sono invece tutte false. I controesempi sono quelli negli Esercizi 9.9, 9.10 e 9.11. Ad esempio, la funzione in (ii) Esercizio 9.9 ha derivate direzionali ma è discontinua, la funzione nell'Esercizio 9.10 ha tutte le derivate direzionali ma non verifica la (9.4), e la funzione nell'Esercizio 9.11 è continua in zero, ha tutte le derivate direzionali in zero, verifica la (9.4) ma non è differenziabile in zero.