15. Forme chiuse e campi irrotazionali

15.a Forme chiuse

Vi è anche una ulteriore condizione necessaria per l'esattezza di forme differenziali di classe C^1. Infatti se $\omega = df$ in un aperto Ω e f è di classe $C^2(\Omega)$, allora per il teorema di Schwarz
$$\frac{\partial \omega_i}{\partial x^j} = \frac{\partial}{\partial x^j}\frac{\partial f}{\partial x^i} = \frac{\partial}{\partial x^i}\frac{\partial f}{\partial x^j} = \frac{\partial \omega_j}{\partial x^i}$$
per ogni $i, j = 1, n$. Motivati da questo poniamo

15.1 Definizione. *Una forma $\omega : \Omega \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ di classe C^1 su un aperto Ω di $\mathbb{R}^n$ si dice* chiusa *se*
$$\frac{\partial \omega_i}{\partial x^j}(x) = \frac{\partial \omega_j}{\partial x^i}(x) \qquad \forall i, j = 1, n,\ \forall x \in \Omega.$$
Un campo $F : \Omega \to \mathbb{R}^n$ di classe C^1 si dice irrotazionale in Ω *se*
$$\frac{\partial F^i}{\partial x^j}(x) = \frac{\partial F^j}{\partial x^i}(x) \qquad \forall i, j = 1, n,\ \forall x \in \Omega.$$
La ragione del nome "irrotazionale" sta nel fatto che per $n = 3$, il *rotore di F* è appunto
$$\operatorname{rot} F := \Big(\frac{\partial F^3}{\partial y} - \frac{\partial F^2}{\partial z}, \frac{\partial F^1}{\partial z} - \frac{\partial F^3}{\partial x}, \frac{\partial F^2}{\partial x} - \frac{\partial F^1}{\partial y}\Big).$$
F è dunque irrotazionale se e solo se $\operatorname{rot} F = 0$. Si noti che se F è il campo associato ad una forma differenziale ω, F è irrotazionale se e solo se ω è chiusa.

15.2 Proposizione. *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto. Ogni forma differenziale esatta di classe $C^1(\Omega)$ è chiusa in Ω e ogni campo di classe $C^1(\Omega)$ conservativo è irrotazionale, equivalentemente*
$$\operatorname{rot} \nabla f = 0 \qquad \forall f \in C^2(\Omega).$$

15.3 Esercizio. Mostrare che esistono forme chiuse che non sono esatte.
Soluzione. La *forma angolo*
$$\omega(x, y) := -\frac{y}{x^2 + y^2}\, dx + \frac{x}{x^2 + y^2}\, dy$$
è chiusa in $\Omega := \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, come si verifica derivando, ma non è esatta in $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ in quanto il lavoro fatto sulla curva chiusa $t \to \gamma(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$, vale
$$\int_\gamma \omega = \int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t)\, dt = 2\pi \neq 0.$$
Si noti che ω è invece esatta in $\Omega := \{(x, y) \,|\, y > 0\}$: $f(x, y) := -\arctan(x/y)$, $(x, y) \in \Omega$, è infatti una primitiva di ω.

15.4 Esercizio. Sia Γ una semiretta in $\mathbb{R}^2$ uscente dall'origine. Trovare una primitiva della forma ω dell'Esercizio 15.3 in $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$.

15.5 . Ogni matrice $\mathbf{A} \in M_{n,n}(\mathbb{R})$, si può sempre dividere in parte simmetrica e parte antisimmetrica scrivendo

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2}(\mathbf{A} + \mathbf{A}^T) + \frac{1}{2}(\mathbf{A} - \mathbf{A}^T).$$

In particolare si scompone la matrice jacobiana $\mathbf{D}F$ di F, nella sua parte simmetrica $\epsilon(F)$ detta *gradiente di deformazione* di F e parte antisimmetrica o *di rotazione* di F,

$$\begin{cases} \mathbf{D}F = \epsilon(F) + W(F) \\ \epsilon(F) = [\epsilon(F)^i_j], \qquad \epsilon(F)^i_j := \dfrac{1}{2}\Big(\dfrac{\partial F^i}{\partial x^j} + \dfrac{\partial F^j}{\partial x^i}\Big), \\ \mathbf{W}(F) = [\mathbf{W}(F)^i_j], \qquad \mathbf{W}(F)^i_j := \dfrac{1}{2}\Big(\dfrac{\partial F^i}{\partial x^j} - \dfrac{\partial F^j}{\partial x^i}\Big) \end{cases}$$

Per analogia, se ω è una forma differenziale, chiameremo *matrice di rotazione della forma* ω la matrice

$$\mathbf{W}(\omega) := [\mathbf{W}(\omega)_{ij}], \qquad \mathbf{W}(\omega)_{ij} := \frac{\partial \omega_i}{\partial x^j} - \frac{\partial \omega_j}{\partial x^i}.$$

Perciò ω è chiusa se e solo se la sua matrice di rotazione $\mathbf{W}(\omega)$ è nulla.

15.b Rimontata di una forma differenziale

Siano Δ un aperto in $\mathbb{R}^r$ e Ω un aperto in $\mathbb{R}^n$. È chiaro che, se $\phi : \Delta \to \Omega$ è continua e $f \in C^0(\Omega)$, allora $f \circ \phi$ è continua e dal teorema di differenziazione della composta $f \circ \phi \in C^1(\Delta)$ se ϕ è di classe C^1 e $f \in C^1(\Delta)$. In formula, guardando alla composizione con ϕ come ad una operazione, $\phi^\#(f) := f \circ \phi$, si ha

$$\begin{aligned} \phi^\# &: C^0(\Omega) \to C^0(\Delta) \qquad \text{se } \phi \in C^0, \\ \phi^\# &: C^1(\Omega) \to C^1(\Delta) \qquad \text{se } \phi \in C^1, \end{aligned}$$

e per induzione

$$\phi^\# : C^k(\Omega) \to C^k(\Delta) \qquad \text{se } \phi \in C^k.$$

Analogamente, si possono "rimontare" forme differenziali su Ω a forme differenziali su Δ.

15.6 Definizione. *Sia $\phi \in C^1(\Delta, \Omega)$ da un aperto $\Delta \subset \mathbb{R}^r$ a valori in un aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Si chiama* immagine inversa *di una forma ω a coefficienti continui in Ω la forma differenziale a coefficienti continui in Δ definita per ogni $x \in \Delta$ da*

$$< \phi^\# \omega(x), h > := < \omega(\phi(x)), \mathbf{D}\phi(x) h > \qquad \forall h \in \mathbb{R}^r. \tag{15.1}$$

15.7 Esercizio (Campo di forze rimontato). Rimontare un campo di forze $F : \Omega \to \mathbb{R}^n$ è meno intuitivo. Mostrare che se $\phi : \Delta \to \Omega$, e $F : \Delta \subset \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}^n$ è un campo di forze, l'unica definizione di rimontato compatibile con la definizione data di immagine inversa di una forma differenziale è

$$\phi^\# F(x) := \mathbf{D}\phi(x)^* F(\phi(x)),$$

$\mathbf{D}\phi(x)^*$ è l'operatore aggiunto di $\mathbf{D}\phi(x)$.

15.8 . Si può scrivere $\phi^\# \omega$ in vari modi. Ad esempio:

- Se $\omega = \sum_{i=1}^n \omega_i(y)\, dy^i$ e se $y = \phi(x) = (\phi(x)^1,\, \phi(x)^2, \dots,\, \phi(x)^n)^T$, allora

$$\phi^\# \omega(x) = \sum_{i=1}^n \omega_i(\phi(x)) d\phi^i(x),$$

essendo per ogni $h \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} < \phi^\# \omega(x), h > =< \omega(\phi(x)), \mathbf{D}\phi(x)h >= \sum_{i=1}^n \omega_i(\phi(x))\mathbf{D}\phi^i(x)h \\ = \sum_{i=1}^n \omega_i(\phi(x)) < d\phi^i(x), h > . \end{aligned}$$

$\phi^\# \omega$ si calcola quindi sostituendo nella espressione in coordinate di ω la y con $\phi(x)$ e la base dei differenziali $(dy^1, \dots, dy^n)$ con i differenziali delle componenti di ϕ.
- Calcolando i differenziali delle ϕ^i in coordinate, si trova anche

$$\phi^\# \omega(x) = \sum_{i=1}^n \omega_i(\phi(x)) d\phi^i(x) = \sum_{j=1}^r \Big(\sum_{i=1}^n \omega_i(\phi(x)) \frac{\partial \phi_i}{\partial x^j} \Big) dx^j.$$

- Se scriviamo le componenti di ω in un vettore riga $\omega(x) = (\omega_1,\, \omega_2, \dots,\, \omega_n)$ a n componenti, allora le componenti di $\phi^\# \omega$ sono il vettore riga a r componenti dato da

$$((\phi^\# \omega)_1,\, (\phi^\# \omega)_2, \dots,\, (\phi^\# \omega)_r) = (\omega_1,\, \omega_2, \dots,\, \omega_n)\, \mathbf{D}\phi(x),$$

righe per colonne.

La (15.1) dà in particolare

$$d(\phi^\# f)(x) = \phi^\# df(x) \tag{15.2}$$

per ogni $f \in C^1(\Omega)$. Inoltre, sempre dalla (15.1) segue che

$$\begin{aligned} < \phi^\# \omega(\gamma(s)), \gamma'(s) >: =< \omega(\phi(\gamma(s))), \mathbf{D}\phi(\gamma(s))\gamma'(s) > \\ =< \omega(\phi \circ \gamma(s)), (\phi \circ \gamma)'(s) > \end{aligned}$$

per ogni curva $\gamma : [a, b] \to \Delta$ di classe C^1. Integrando, si conclude che

$$\mathcal{L}(\gamma, \phi^\# \omega) = \mathcal{L}(\phi \circ \gamma, \omega). \tag{15.3}$$

La (15.3) contiene fra l'altro l'*invarianza del lavoro per cambiamenti di riferimento in* $\mathbb{R}^n$.

15.9 Esercizio. Scrivere la forma angolo dell'Esercizio 15.3 in coordinate polari, i.e., calcolarne la rimontata tramite la trasformazione $x = \rho \cos\theta$, $y = \rho \sin\theta$.

15.10 Proposizione (Immagine inversa e differenziale di una forma). *Sia ω una forma differenziale di classe C^1 in un aperto Ω e $H : \Delta \subset \mathbb{R}^r \to \Omega$ una mappa di classe C^2. Se $(u^1, u^2, \dots, u^r)$ sono le coordinate in $\mathbb{R}^r$ e*

$$H^{\#}\omega = \sum_{i=1}^{r} P_i(u)\, du^i,$$

allora

$$\frac{\partial P^h}{\partial u_k} - \frac{\partial P_k}{\partial u^h} = \sum_{i,j=1}^{n} \Big(\frac{\partial \omega_i}{\partial x^j} - \frac{\partial \omega_j}{\partial x^i}\Big) \frac{\partial H^i}{\partial u^h}\, \frac{\partial H^j}{\partial u^k}, \tag{15.4}$$

Naturalmente $\frac{\partial P_h}{\partial u^k}$, $\frac{\partial P_k}{\partial u^h}$, $\frac{\partial H^i}{\partial u^h}$, $\frac{\partial H^j}{\partial u^k}$, sono calcolate in $u \in \Delta$ e $\frac{\partial \omega_i}{\partial x^j}$ e $\frac{\partial \omega_j}{\partial x^i}$ sono calcolate in $H(u)$.

In particolare se ω è chiusa in Ω, allora $H^{\#}\omega$ è chiusa in Δ.

Dimostrazione. Infatti, se si calcolano le derivate di $P_h := \sum_{i=1}^n \omega_i \frac{\partial H^i}{\partial u^h}$, si trova

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P_h}{\partial u^k} = \displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial \omega_i}{\partial x^j}\, \frac{\partial H^j}{\partial u^k}\, \frac{\partial H^i}{\partial u^h} + \sum_{i=1}^{n} \omega_i \frac{\partial^2 H^i}{\partial u^k \partial u^h} \\ \dfrac{\partial P_k}{\partial u^h} = \displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial \omega_i}{\partial x^j}\, \frac{\partial H^j}{\partial u^h}\, \frac{\partial H^i}{\partial u^k} + \sum_{i=1}^{n} \omega_i \frac{\partial^2 H^i}{\partial u^h \partial u^k}, \end{cases}$$

Se si sottraggono le due equazioni, i termini contenenti derivate seconde di H si cancellano essendo la matrice hessiana di H simmetrica. Si ottiene così la (15.4). □

15.11 Esercizio. Essendo la matrice di rotazione di una forma una matrice antisimmetrica, la (15.4) si riscrive anche come

$$\frac{\partial P^h}{\partial u^k} - \frac{\partial P^k}{\partial u^h} = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \Big(\frac{\partial \omega_i}{\partial x^j} - \frac{\partial \omega_j}{\partial x^i}\Big)\Big(\frac{\partial H^i}{\partial u^h}\, \frac{\partial H^j}{\partial u^k} - \frac{\partial H^j}{\partial u^h}\, \frac{\partial H^i}{\partial u^k}\Big). \tag{15.5}$$

15.c Il teorema di Stokes sul quadrato

Vedremo che l'ostruzione all'esattezza di *ogni* forma chiusa è nella forma del dominio.

Sia $R = [0,1] \times [0,1]$ il quadrato di $\mathbb{R}^2$ di lato 1. Indichiamo con $\delta_0, \delta_1, \delta_2, \delta_3 : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ le curve definite da

$$\begin{cases} \delta_0(t) := (0,t), \\ \delta_1(t) := (1,t), \\ \delta_2(t) := (t,1), \\ \delta_3(t) := (t,0), \end{cases} \qquad t \in [0,1],$$

le cui traiettorie coprono i quattro lati del quadrato R e sia $\delta : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ la curva che percorre ∂R in senso antiorario,

$$\delta = \delta_3 + \delta_1 - \delta_2 - \delta_0, \tag{15.6}$$

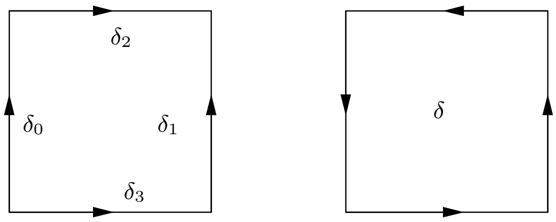

Figura 15.1. δ percorre in senso antiorario ∂R.

seguendo prima δ_0, quindi δ_2, quindi δ_1 a ritroso e infine δ_3 a ritroso, cfr. Figura 15.1.

Se $f : R \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ è una funzione continua sul rettangolo $R = [a, b] \times [c, d]$, o anche continua a pezzi su una quadrettatura di $[a, b] \times [c, d]$ e limitata, allora si può scambiare l'ordine d'integrazione per integrali semplici nelle due variabili,

$$\int_a^b \Big(\int_c^d f(x, y)\, dy \Big) dx = \int_c^d \Big(\int_a^b f(x, y)\, dx \Big) dy =: \int_c^d \int_a^b f(x, y)\, dx\, dy.$$

15.12 Esercizio. Il lettore può dimostrare direttamente, senza usare la teoria dell'integrazione, la formula di cambiamento dell'ordine di integrazione verificandola successivamente per $f(x, y) = \lambda$ costante, (i due integrali valgono entrambi $\lambda(b-a)(d-c)$), per una funzione costante a tratti su una quadrettatura di $[a, b] \times [c, d]$ (si procede come nel caso precedente sui rettangoli della quadrettatura e si somma) e infine per una arbitraria funzione continua (si procede per approssimazione con funzioni costanti a tratti su una quadrettatura).

Usando l'osservazione precedente, si dimostra facilmente

15.13 Proposizione (Stokes). *Siano $R := [0, 1] \times [0, 1]$ e $\delta : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$ la curva in (15.6) che percorre ∂R in senso antiorario. Sia $\eta(s, t) := P(s, t)\, ds + Q(s, t)\, dt$ una forma differenziale continua in R di classe C^1 in un intorno di R. Allora*

$$\mathcal{L}(\delta, \eta) = \int_0^1 \int_0^1 \Big(\frac{\partial Q}{\partial s} - \frac{\partial P}{\partial t} \Big)\, ds\, dt.$$

Dimostrazione. Siano infatti δ, δ_i, $i = 0, 3$ le parametrizzazioni dei lati di R in (15.6). Si ha

$$\begin{aligned} \int_\delta \eta &= \int_{\delta_1} \eta - \int_{\delta_0} \eta + \int_{\delta_3} \eta - \int_{\delta_2} \eta \\ &= \int_0^1 Q(1, t)\, dt - \int_0^1 Q(0, t)\, dt + \int_0^1 P(s, 0)\, ds - \int_0^1 P(s, 1)\, ds \\ &= \int_0^1 \Big(\int_0^1 \frac{\partial Q}{\partial s}(s, t)\, ds \Big)\, dt - \int_0^1 \Big(\int_0^1 \frac{\partial P}{\partial t}\, dt \Big)\, ds \\ &= \int_0^1 \int_0^1 \Big(\frac{\partial Q}{\partial s} - \frac{\partial P}{\partial t} \Big)\, ds\, dt. \end{aligned}$$

La prima e la seconda uguaglianza derivano dalla definizione di lavoro, la terza dal teorema fondamentale del calcolo e l'ultima uguaglianza segue dallo scambio dell'ordine di integrazione per funzioni continue di due variabili. □

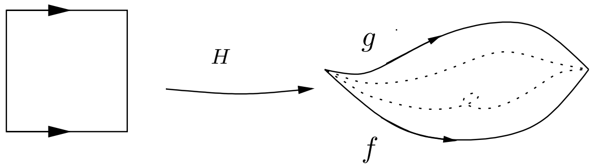

Figura 15.2. Una omotopia tra f e g con estremi fissi.

15.14 Teorema. *Siano Ω un aperto connesso, $R := [0,1]\times[0,1]$ e $\delta : [0,1] \to \partial R$ la curva che percorre ∂R data in (15.6). Sia $H : R \to \Omega$ una applicazione continua tale che $\gamma := H \circ \delta : [0,1] \to \Omega$ è una curva continua e C^1 a tratti. Allora per ogni forma differenziale chiusa ω in Ω*

$$\mathcal{L}(\gamma, \omega) = 0.$$

Dimostrazione del Teorema 15.14 nel caso in cui $H \in C^2$. Dimostriamo il Teorema 15.14 nel solo caso in cui H sia una mappa di classe C^2 su un aperto Δ contenente R. Infatti in questo caso la forma $H^{\#}\omega$ è di classe C^1 su Δ e dalla (15.4) $H^{\#}\omega$ è chiusa in Δ. Segue quindi dalla (15.3) e dalla formula di Stokes, Proposizione 15.13, che

$$\mathcal{L}(\gamma, \omega) = \mathcal{L}(\delta, H^{\#}\omega) = \int_0^1 \int_0^1 0\, ds\, dt = 0.$$

Il caso generale e' piu' complicato e si puo' ottenere con una procedura di approssimazione, che non esponiamo. □

Vediamo ora alcune conseguenze rilevanti del Teorema 15.14.

15.d Curve omotope e lavoro

Sia Ω un aperto connesso di $\mathbb{R}^n$. Due curve continue $f, g : [0,1] \to \Omega$ con $f(0) = g(0)$, $f(1) = g(1)$, si dicono *omotope in* Ω se esiste una applicazione continua

$$H : R = [0,1] \times [0,1] \to \Omega$$

tale che

$$\begin{cases} H(0,t) = f(t), \ \forall t \in [0,1], \\ H(1,t) = g(t), \ \forall t \in [0,1], \\ H(s,a) = f(0) = g(0), \ \forall s \in [0,1], \\ H(s,b) = f(1) = g(1), \ \forall s \in [0,1], \end{cases}$$

cfr. Figura 15.2. Con le notazioni precedenti, ovviamente si ha $f(t) = H \circ \delta_0(t)$ e $g(t) = H \circ \delta_1(t)$. Inoltre le curve $\gamma_2 := H \circ \delta_2$ e $\gamma_3 := H \circ \delta_3$ sono costanti e quindi $\mathcal{L}(\delta_3, H^{\#}\omega) = \mathcal{L}(\delta_2, H^{\#}\omega) = 0$. Si conclude dalla additività del lavoro su curve successive e dalla (15.4)

$$\mathcal{L}(H^{\#}\omega, \delta) = \mathcal{L}(\delta_0, H^{\#}\omega) - \mathcal{L}(\delta_1, H^{\#}\omega) = \mathcal{L}(f, \omega) - \mathcal{L}(g, \omega). \tag{15.7}$$

Il Teorema 15.14 si legge allora come

15.15 Corollario. *Se $f, g : [0,1] \to \Omega$ sono curve continue, C^1 a tratti e omotope con estremi iniziali e finali fissi, allora per ogni forma chiusa ω in Ω*

$$\mathcal{L}(f,\omega) = \mathcal{L}(g,\omega).$$

Equivalentemente, se $F \in C^1(\Omega)$ è un campo irrotazionale, il lavoro di F non cambia su curve C^1 a tratti omotope con estremi iniziali e finali fissi.

Due curve chiuse continue $f, g : [0,1] \to \Omega$ si dicono omotope in Ω se esiste una mappa $H : R \to \Omega$ continua tale che

$$\begin{cases} H(0,t) = f(t), \ \forall t \in [0,1], \\ H(1,t) = g(t), \ \forall t \in [0,1], \\ H(s,0) = H(s,1), \ \forall s \in [0,1], \end{cases}$$

cfr. Figura 15.3. Si può ridurre questo al caso di omotopia con estremi iniziale e finale fissi perché, se $\gamma(s) := H(s,0)$, allora f e la curva $\gamma + g - \gamma$, ottenuta percorrendo prima γ quindi g e infine γ a ritroso, sono omotope come curve con estremi fissi $f(0) = f(1)$. *Se γ è C^1 a tratti* segue dalla (15.7) che

$$\mathcal{L}(H^{\#}\omega,\delta) = \mathcal{L}(f,\omega) - \mathcal{L}(\gamma,\omega) - \mathcal{L}(g,\omega) + \mathcal{L}(\gamma,\omega) = \mathcal{L}(f,\omega) - \mathcal{L}(g,\omega) \quad (15.8)$$

per ogni forma ω, e dunque

15.16 Corollario. *Se $f, g : [0,1] \to \Omega$ sono curve continue, C^1 a tratti, chiuse e omotope come curve chiuse e se, detta $H : R \to \Omega$ l'omotopia, la funzione $s \to H(s,0)$, $s \in [0,1]$ è C^1 a tratti, allora per ogni forma chiusa ω in Ω si ha*

$$\mathcal{L}(f,\omega) = \mathcal{L}(g,\omega).$$

15.e Insiemi semplicemente connessi e forme chiuse

15.17 Definizione. *Un aperto connesso Ω si dice* semplicemente connesso *se ogni curva chiusa è omotopa ad una costante.*

Si osservi che ogni aperto connesso è connesso per archi. Perciò un aperto Ω è semplicemente connesso se e solo se, per ogni $x_0 \in \Omega$, ogni curva chiusa con punto iniziale e finale x_0 è omotopa alla curva costante x_0 con punti iniziali e finali fissi x_0.

Dal Corollario 15.15 segue allora

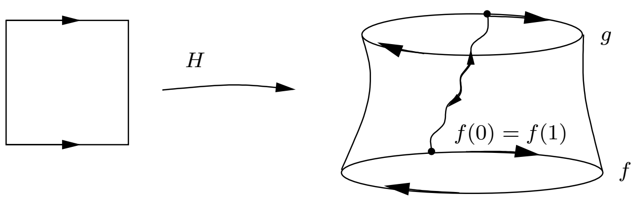

Figura 15.3. Una omotopia tra f e g come curve chiuse.

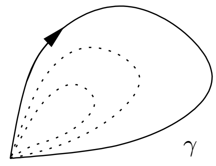

Figura 15.4. f è omotopa a x_0 a estremi fissi.

15.18 Corollario. *Sia Ω un aperto connesso e semplicemente connesso. Allora ogni forma chiusa in Ω è esatta in Ω e ogni campo irrotazionale in Ω è conservativo in Ω. In formula se* $\operatorname{rot} F = 0$ *in Ω, allora esiste $f \in C^2(\Omega)$ tale che $F = \nabla f$ in Ω.*

Ecco ora qualche situazione rilevante in cui si può utilizzare il Corollario 15.18. Le palle di $\mathbb{R}^n$ sono evidentemente semplicemente connesse. Perciò

15.19 Proposizione. *Ogni forma chiusa di classe C^1 è localmente esatta. Ogni campo F irrotazionale e di classe C^1 è localmente conservativo.*

15.20 Definizione. *Un* aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *si dice* stellato rispetto ad un suo punto *x_0 se per ogni altro punto $x \in \Omega$ il segmento congiungente x_0 con x è contenuto in Ω.*

Ad esempio $\mathbb{R}^n$ e $\{x \,|\, |x| \le 1\}$ sono insiemi stellati rispetto all'origine; $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0) \,|\, x \le 0\}$ è stellato rispetto a $(1,0)$. Invece $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ e le corone, ad esempio $\{x \in \mathbb{R}^n \,|\, 1 < |x| < 2\}$, non sono insiemi stellati.

Ci si convince subito che se Ω è stellato rispetto a x_0, ogni curva $f : [0,1] \to \Omega$ chiusa con $f(1) = f(0) = x_0$ è omotopa a x_0 con punti iniziali e finali x_0, scegliendo ad esempio come omotopia la funzione $H(t,x) = (1-s)x_0 + sf(t)$, $s \in [0,1]$, $t \in [0,1]$. Perciò *ogni aperto stellato è semplicemente connesso*. Segue allora dal Corollario 15.18

15.21 Teorema (Lemma di Poincaré). *Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^n$ stellato. Ogni forma chiusa in Ω di classe $C^1(\Omega)$ è esatta in Ω. Equivalentemente per ogni campo irrotazionale F in Ω esiste $f \in C^2(\Omega)$ tale che $F = \nabla f$ in Ω.*

Per comodità del lettore diamo anche una diversa e più diretta dimostrazione.

Un'altra dimostrazione del lemma di Poincaré. A meno di una traslazione non è restrittivo supporre che Ω sia stellato rispetto all'origine. Parametrizziamo il segmento congiungente x con l'origine con $\gamma(t) = tx/|x|$, $t \in [0,|x|]$. C'è da verificare che

$$f(x) := \mathcal{L}(\gamma,\omega) = \int_0^{|x|} < \omega(th), h > \, dt = \int_0^1 \sum_{i=1}^n \omega_i(th)h^i \, dt$$

è un potenziale per ω in Ω. Dal teorema di derivazione sotto il segno di integrale si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x^j}(x) = \frac{\partial}{\partial x^j} \int_0^1 \sum_{i=1}^n \omega_i(tx)x^i \, dt = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x^j} \Big[\sum_{i=1}^n \omega_i(tx)x^i \Big] \, dt$$

quindi, usando il fatto che ω è chiusa,

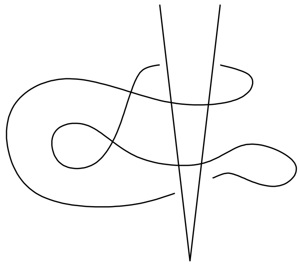

Figura 15.5. $\mathbb{R}^3 \setminus \{x_0\}$ è semplicemente connesso.

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x^j}(x) &= \int_0^1 \Big(\omega_j(tx) + t\frac{\partial \omega_i}{\partial x^j}(tx)x^i\Big)\,dt = \int_0^1 \Big(\omega_j(tx) + t\frac{\partial \omega_j}{\partial x^i}(tx)x^i\Big)\,dt \\ &= \int_0^1 \Big(\omega_j(tx) + t\frac{d}{dt}\omega_j(tx)\Big)\,dt = \int_0^1 \frac{d}{dt}(t\omega_j(tx))\,dt = \omega_j(x).\end{aligned}$$

□

15.22 Esercizio. Ovviamente $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ non è semplicemente connesso se non altro perché la forma angolo, cfr. Esercizio 15.3, pur essendo chiusa non è esatta. In contrasto, mostrare che ogni aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ *è semplicemente connesso.*
Soluzione. Sia γ una curva chiusa in $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$. Poiché $\gamma([0,1])$ è compatto, esiste $\delta > 0$ per cui la traiettoria di γ non entra in $B(0,\delta)$. La curva $\delta(t) := \gamma(t)/|\gamma(t)|$, $t \in [0,1]$ è allora una curva continua C^1 a tratti sulla sfera S^2. Essendo δ di lunghezza finita, δ non è surgettiva. Esiste dunque tutto un intorno di un punto, diciamo il polo Nord, che non è attraversato da δ. Ma allora γ non attraversa un cono con asse la semiretta per l'origine e il polo Nord. Si può quindi retrarre δ con una omotopia ad esempio sul polo Sud, cfr. Figura 15.5.

15.f Esercizi

15.23 Esercizio. Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^3$. Poiché per ogni $u \in C^2(\Omega)$, $\operatorname{div}\operatorname{rot} u = 0$ in Ω, una condizione necessaria per la risoluzione dell'equazione $\operatorname{rot} u = f$ è che $\operatorname{div} f = 0$ in Ω. Se Ω è un aperto stellato rispetto a 0, si ha

(i) due soluzioni di $\operatorname{rot} u = f$ differiscono per il gradiente di una arbitraria funzione su Ω,
(ii) se $\operatorname{div} f = 0$, provare che

$$\operatorname{rot}(tf(x) \times x) = \frac{d}{dt}(t^2 f(tx)),$$

e quindi, passando il rotore sotto il segno di integrale, mostrare che

$$u(x) := \int_0^1 tf(tx) \times x\,dt$$

è una soluzione di $\operatorname{rot} u = f$. Qui $a \times b$ denota il *prodotto vettore* definito da

$$a \times b := (a^2b^3 - a^3b^2, -(a^1b^3 - a^3b^1), a^1b^2 - a^2b^1)$$

se $a = (a^1, a^2, a^3)$ e $b = (b^1, b^2, b^3)$.