# 14. Curve, campi conservativi e forme fifferenziali

In questo capitolo discutiamo le nozioni di forza, lavoro, forma differenziale, campo, campo conservativo e potenziale, e la risolubilità dell'equazione

$$\operatorname{grad} U = F$$

in un aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Vedremo che il campo $F$ è conservativo, vale a dire che $\operatorname{grad} U = F$ è risolubile, se e solo se il lavoro lungo curve chiuse in $\Omega$ è nullo. Vedremo anche come fare a calcolare i relativi potenziali $U$.

D'altra parte per $n = 3$, essendo $\operatorname{rot} \operatorname{grad} U = 0$, per ogni funzione $U$ di classe $C^2$, una condizione necessaria perché un campo $F \in C^1$ sia conservativo è che $\operatorname{rot} F = 0$ in $\Omega$. In termini di forme differenziali ciò corrisponde alla condizione di forma chiusa. Vedremo nel prossimo capitolo che la condizione $\operatorname{rot} F = 0$ è sufficiente perché $F$ sia conservativo, nel caso in cui il dominio $\Omega$ sia semplicemente connesso.

## 14.a Forme differenziali, campi e lavoro

**14.1 Definizione.** *Sia $\Omega$ un aperto di $\mathbb{R}^n$.*

(i) *Un* campo *o* campo di forze *su $\Omega$ è una mappa $F : \Omega \to \mathbb{R}^n$.*
(ii) *Una* forma differenziale *$\omega$ su $\Omega$ è una applicazione $\omega : \Omega \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ che ad ogni $x \in \Omega$, associa una applicazione lineare $\omega(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.*

Forme differenziali e campi sono in corrispondenza biunivoca. Infatti se $\omega$ è una forma differenziale su $\Omega$, allora per ogni $x \in \Omega$

$$\omega(x)(h) = \sum_{i=1}^{n} \phi_i(x) h^i, \qquad \forall h = (h^1, h^2, \dots, h^n) \in \mathbb{R}^n$$

e introducendo il campo $F(x) = (f^1(x), f^2(x), \dots, f^n(x))^T$,

$$\omega(x)(h) = F(x) \bullet h \qquad \forall h \in \mathbb{R}^n \ \forall x \in \Omega. \tag{14.1}$$

Diremo che $F$ è il il campo associato alla forma $\omega$ o che $\omega$ è la forma associata al campo $F$.

Infine si dice che una forma differenziale è di classe $C^k$ se le sue componenti sono di classe $C^k$, equivalentemente se e solo se il campo di forze ad essa associato è di classe $C^k$.

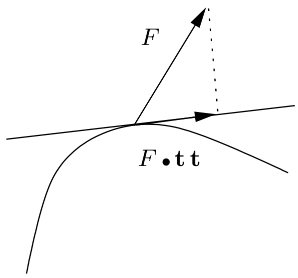


**Figura 14.1.** Componente tangente di un campo.

## 14.b Integrazione lungo una curva, lavoro

Definiamo ora il lavoro di una forma differenziale lungo una curva come l'integrale del lavoro elementare lungo la curva.

**14.2 Definizione.** *Date una forma differenziale $\omega$ in un aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e una curva $\gamma : [a,b] \to \Omega$ di classe $C^1(\Omega)$ si chiama* lavoro di $\omega$ lungo $\gamma$, *o* integrale della forma $\omega$ lungo $\gamma$, *il numero reale indicato con $\int_\gamma \omega$ o con $\mathcal{L}(\gamma,\omega)$,*

$$\int_\gamma \omega = \mathcal{L}(\gamma,\omega) := \int_a^b < \omega(\gamma(s)), \gamma'(s) > \, ds. \tag{14.2}$$

*Analogamente, se $F \in C^0(\Omega;\mathbb{R}^n)$ è un campo continuo, il lavoro del campo $F$ lungo $\gamma$, è definito come*

$$\int_\gamma F\, ds := \int_a^b F(\gamma(s)) \bullet \gamma'(s) \, ds.$$

È facile convincersi che

- il lavoro è un funzionale lineare sulle forme, $\int_\gamma(\omega+\eta) = \int_\gamma \omega + \int_\gamma \eta$ e $\int_\gamma \lambda\omega = \lambda \int_\gamma \omega$ per ogni coppia di forme $\omega, \eta$ e ogni $\lambda \in \mathbb{R}$,
- se $F$ è il campo di forze associato ad $\omega$, allora $\int_\gamma \omega = \int_\gamma F\, ds$,
- il lavoro fatto da $\omega$ lungo $\gamma$ non cambia se si riparametrizza $\gamma$ conservando il verso e cambia segno se si riparametrizza $\gamma$ con il verso opposto,
- la definizione di lavoro di una forma si estende a curve continue e regolari a tratti; in questo caso $\gamma'(s)$ è infatti limitata e continua tranne che in un numero finito di punti: l'integrando in (14.2) è dunque Riemann integrabile.

**14.3 Esercizio.** L'introduzione delle curve continue e $C^1$ a tratti fa comodo. Tuttavia essa non è essenziale in questo contesto. Infatti ogni curva $\gamma$ continua e $C^1$ a tratti ammette una riparametrizzazione $\delta = \gamma \circ h$ di classe $C^1$ con $h' \geq 0$. Potremo perciò sempre sostituire la curva $\gamma$ con la curva $\delta$ senza che il lavoro cambi, $\mathcal{L}(\delta,\omega) = \mathcal{L}(\gamma,\omega)$.

Infine introduciamo una notazione. Se $\gamma_i : [a,b] \to \Omega$ $i = 1,\dots,k$ sono $k$ curve in $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ con $\gamma_{i+1}(a) = \gamma_i(b)$, si può formare con esse una unica curva percorrendo in successione $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$. Analiticamente, si scelgono $(n+1)$-punti

$\{t_j\}$ in $[a,b]$, ad esempio $t_j := j(b-a)/k+a$, $j=0,\dots,k$, e per ogni $i=1,\dots,k$ si riparametrizza la mappa $\gamma_i$ con l'intervallo $[t_{i-1},t_i]$ con

$$\delta_i := \gamma\circ\phi_i. \qquad \phi_i(s) := a + \frac{b-a}{t_i-t_{i-1}}(s-t_{i-1}),$$

La nuova curva $\gamma$ definita da $\gamma(s)=\delta_i(s)$ se $s\in[t_{i-1},t_i[$, si indica anche con

$$\sum_{i=1}^n \gamma_i.$$

Poiché $\mathcal{L}(\gamma_i,\omega)=\mathcal{L}(\delta_i,\omega)$ $\forall i$, risulta quindi

$$\mathcal{L}\Big(\sum_{i=1}^k \gamma_i,\omega\Big) = \sum_{i=1}^k \mathcal{L}(\omega,\delta_i) = \sum_{i=1}^k \mathcal{L}(\omega,\gamma_i).$$

Se poi indichiamo con $-\gamma$ la curva $\gamma$ percorsa con verso opposto data da

$$-\gamma(s) := \gamma((1-s)b+sa), \qquad s\in[0,1],$$

allora $\mathcal{L}(-\gamma,\omega) = -\mathcal{L}(\gamma,\omega)$.

## 14.c Forme differenziali esatte e potenziali

**14.4 Definizione.** *Sia $\Omega$ un aperto di $\mathbb{R}^n$.*

(i) *Una forma differenziale $\omega$ continua su $\Omega$ si dice* esatta in $\Omega$ *se esiste una funzione $f\in C^1(\Omega)$, tale che $\omega(x)=df(x)$ per ogni $x\in\Omega$. Se $\omega(x)=df(x)$ $\forall x\in\Omega$, $f$ si dice essere un* potenziale di $\omega$ in $\Omega$.

(ii) *Un campo continuo $F:\Omega\to\mathbb{R}^n$ si dice* conservativo in $\Omega$ *se esiste una funzione $f\in C^1(\Omega)$ tale che $F(x)=\nabla f(x)$ per ogni $x\in\Omega$. Si dice che $f$ è un* potenziale del campo $F$ in $\Omega$.

Ovviamente una forma è esatta se e solo se il campo di forza associato è conservativo e un potenziale per $\omega$ è anche un potenziale per $F$. Si osservi anche che due potenziali della stessa forma $\omega$ (o dello stesso campo $F$) su un aperto *connesso* differiscono per costante, cfr. Esercizio 11.16.

**14.5 Esercizio.** La forza di richiamo esercitata da una molla ideale fissata nell'origine su un punto $x\in\mathbb{R}^n$ segue la *legge di Hooke* $F(x)=-kx$, dove $k>0$ è la costante elastica della molla. Il campo $F:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ è un campo conservativo in $\mathbb{R}^n$ perché $F(x)=\nabla f(x)$ con $f(x)=-\frac{k}{2}|x|^2$. Mostrare che più in generale ogni *campo radiale* $F:\mathbb{R}^n\setminus\{0\}\to\mathbb{R}^n$,

$$F(x)=\varphi(|x|)x, \qquad \text{con } \varphi:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R},\ \varphi\in C^0(]0,\infty[),$$

è un campo conservativo in $\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$.

*Soluzione.* Infatti la funzione

$$f(x) := \int_1^{|x|} s\varphi(s)\,ds, \qquad ,\ x\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\},$$

è un potenziale per $F$ in $\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$, come si verifica subito differenziando $f$.

Per il campo gravitazionale $F(x) := -\frac{G}{|x|^3}x$, $x\in\mathbb{R}^3$, un potenziale è

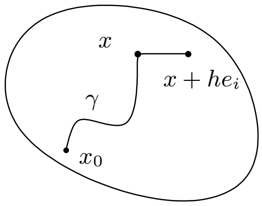


**Figura 14.2.**

$$V(x) = \int_{+\infty}^{|x|} \frac{G}{s^2}\, ds = \frac{G}{|x|}.$$

Si è potuto scegliere come estremo $+\infty$ perché $1/s^2$ è sommabile all'infinito. In questo modo il potenziale scelto $V$ è nullo all'infinito.

Siano $\Omega$ un aperto connesso di $\mathbb{R}^n$, $f \in C^1(\Omega)$, $\gamma : [a, b] \to \Omega$ una curva in $\Omega$ di classe $C^1$. Dalla definizione di integrale di linea e dal teorema fondamentale del calcolo integrale segue

$$\int_\gamma df = \int_a^b < df(\gamma(s)), \gamma'(s) > \,ds = \int_a^b \frac{d}{ds} f(\gamma(s))\, ds = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)). \tag{14.3}$$

In altri termini *il lavoro fatto da una forma esatta lungo una curva di classe* $C^1$ *dipende solo dalla differenza dei valori del potenziale sugli estremi della curva.*

**14.6 Esercizio.** Il lettore è invitato a provare la (14.3) per curve continue $C^1$ a tratti.

In realtà si ha

**14.7 Teorema (fondamentale del calcolo).** *Siano $\omega$ una forma differenziale continua in un aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ connesso e $f \in C^1(\Omega)$. La funzione $f : \Omega \to \mathbb{R}$ è un potenziale di $\omega$ in $\Omega$ se e solo se per ogni $x, x_0 \in \Omega$ e per ogni curva $C^1$ a tratti congiungente $x_0$ ad $x$ si ha*

$$f(x) - f(x_0) = \int_{\gamma_{x_0,x}} \omega.$$

*Inoltre $\omega$ è esatta se e solo se il lavoro di $\omega$ lungo ogni curva chiusa continua e $C^1$ a tratti è nullo. In questo caso un potenziale $V$ per $\omega$ si ottiene nel modo seguente: fissato un punto $x_0 \in \Omega$, si sceglie per ogni $x \in \Omega$ una curva $\gamma_{x_0,x} : [a, b] \to \Omega$ congiungente $x_0$ con $x$ con $\gamma(a) = x_0$* e *$\gamma(b) = x$. Allora la funzione* lavoro

$$V(x) := \int_{\gamma_{x_0,x}} \omega, \qquad x \in \Omega, \tag{14.4}$$

*è un potenziale per $\omega$ in $\Omega$.*

*Dimostrazione.* Se $f : \Omega \to \mathbb{R}$ è un potenziale per $\omega$, come abbiamo visto

$$\begin{aligned} f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)) &= \int_a^b \frac{d}{ds} f(\gamma(s))\, ds = \int_a^b < df(\gamma(s)), \gamma'(s) > ds \\ &= \int_\gamma df = \int_\gamma \omega. \end{aligned} \tag{14.5}$$

Viceversa, per ogni $x \in \Omega$, $i = 1, \dots, n$ e $h \in \mathbb{R}^n$, $|h|$ piccolo, sia $\delta(s) := x + \frac{h}{|h|} s e_i$, $0 \le s \le |h|$, il segmento congiungente $x$ con $x + he_i$. Si ha allora

$$\begin{aligned} \frac{f(x+he_i) - f(x)}{h} &= \frac{1}{|h|} \int_0^{|h|} < \omega\Big(x + \frac{h}{|h|}\tau e_i\Big), e_i > d\tau \\ &= \frac{1}{|h|} \int_0^{|h|} \omega_i\Big(x + \frac{h}{|h|}\tau e_i\Big)\, d\tau \longrightarrow \omega_i(x) \end{aligned}$$

per la continuità di $\omega_i$ in $x$ e il teorema della media. Perciò

$$\frac{\partial f}{\partial x^i}(x) = \omega_i(x) \qquad \forall x \in \Omega.$$

Quindi le derivate parziali esistono e sono continue in $\Omega$. Dal teorema del differenziale totale segue che $f \in C^1(\Omega)$ e $df(x) = \omega(x)$ in $\Omega$.

È chiaro dalla prima parte della tesi che se $\omega$ ha potenziale, allora $\int_\gamma \omega = 0$ per ogni curva $C^1$ a tratti chiusa. Resta da provare che, se $\int_\gamma \omega = 0$, allora $V$ è un potenziale. Anzitutto, osserviamo che $V$ è ben definita, nel senso che per ogni $x \in \Omega$, $V(x)$ non dipende dalla curva scelta per congiungere $x_0$ con $x$. Inoltre, se $\delta : [a,b] \to \Omega$ è una curva $C^1$ a tratti con $\delta(a) =: x$, $\delta(b) =: y$, allora

$$\int_\delta \omega = \int_{\gamma_{y,x_0}} \omega - \int_{\gamma_{x,x_0}} = V(y) - V(x)$$

e la tesi segue dalla prima parte del teorema. $\square$

**14.8 Esercizio.** Il lettore enunci l'analogo del Teorema 14.7 per i campi di vettori.

**14.9 Forme esatte in pratica.** Il Teorema 14.7 dà una condizione necessaria e sufficiente per l'esattezza di una forma. La condizione necessaria può essere utile a provare che una forma *non è esatta*: se si trova una linea chiusa lungo la quale $\omega$ fa lavoro, necessariamente $\omega$ *non è* esatta in $\Omega$. La condizione sufficiente è tuttavia assai difficile da utilizzare: occorrerebbe controllare che il lavoro fatto su *ogni* curva $C^1$ sia nullo.

Se si vuole provare che una forma data $\omega$ è esatta in $\Omega$, è di solito più semplice esibire un potenziale per $\omega$. Per questo si può

(i) indovinare un potenziale,
(ii) fissare $x_0 \in \Omega$, e per ogni $x$ fissare una *unica* curva $\gamma$ da $x_0$ a $x$, ad esempio muovendosi lungo rette parallele agli assi coordinati. Si potrebbe quindi calcolare il lavoro $f(x) = \mathcal{L}(\omega, \gamma)$ su tale curva. Se si prova che $f$ è di classe $C^1(\Omega)$ e $\frac{\partial f}{\partial x^i}(x) = \omega_i(x)$ per ogni $x \in \Omega$, allora $f$ è un potenziale per $\omega$ in $\Omega$.
Si noti che cosa scegliere per eventuale potenziale $f$ è essenzialmente obbligato: infatti da una parte due potenziali di una stessa forma differiscono su un connesso per costante e dall'altra, se $\omega$ ha un potenziale, il lavoro fatto da $\omega$ a partire da un un punto di $\Omega$ è un potenziale per il Teorema 14.7.

**14.10 Esercizio.** Dire se la forma differenziale $\omega(x,y) := \sqrt{y/x}\, dx + \sqrt{x/y}\, dy$ è esatta in $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x > 0,\ y > 0\}$.
*Soluzione.* La funzione $f(x,y) = 2\sqrt{xy}$ è un potenziale in $\Omega$, come si verifica derivando,

$$\frac{\partial \sqrt{xy}}{\partial x} = \sqrt{\frac{y}{x}}, \qquad \frac{\partial \sqrt{xy}}{\partial y} = \sqrt{\frac{x}{y}}, \qquad x > 0,\ y > 0.$$

$\omega$ è perciò esatta in $\Omega$.

**14.11 Esercizio.** Dire se la forma

$$\omega(x,y) = e^{x/y}\,dx + \Big(1 - \frac{x}{y}\Big)e^{x/y}\,dy,$$

è esatta in $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y > 0\}$.
*Soluzione.* Fissiamo il punto $(0,1)$ e congiungiamo $(0,1)$ con $(x,y)$ andando prima da $(0,1)$ a $(0,y)$ in verticale e quindi da $(0,y)$ a $(x,y)$ in orizzontale. Il lavoro fatto vale

$$f(x,y) = \int_1^y \Big(1 - \frac{0}{y}\Big)e^{0/y}\,dy + \int_0^x e^{x/y}\,dx = (y-1) + y\int_0^{x/y} e^t\,dt = y - 1 + y(e^{x/y} - 1).$$

Proviamo che la funzione $f(x,y) := -1 + ye^{x/y}$ cosi' trovata è un potenziale in $\Omega$. Infatti, se si deriva, si trova in ogni punto $(x,y) \in \Omega$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dy = e^{x/y}\,dx + \Big(1 - \frac{x}{y}\Big)\,e^{x/y}\,dy = \omega(x,y).$$

Essendo $\omega(x,y) \in C^0(\Omega)$, si conclude che $f \in C^1(\Omega)$ e $df(x,y) = \omega(x,y)$ in $\Omega$.

## 14.d Esercizi

**14.12 Esercizio.** Dire se le forme differenziali seguenti sono esatte:

$$xy\,dx + \frac{1}{3}x^2\,dy$$
$$yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz$$
$$\Big(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2}\Big)(y\,dx - x\,dy), \qquad x \neq 0,\ y \neq 0.$$

**14.13 Esercizio.** Un campo di dice *centrale* se $F(x) := f(x)\frac{x}{|x|}$, $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, essendo $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$. Mostrare che $F$ è conservativo se e solo se è un *campo radiale*, i.e., $F(x) := \varphi(|x|)\frac{x}{|x|}$ con $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

**14.14 Esercizio.** Sia $\omega$ una forma differenziale chiusa in $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Mostrare che $\omega$ è esatta in $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ se

$$\lim_{x \to 0} \omega(x)|x| = 0.$$