

# 13. Curve

Una *curva* in  $\mathbb{R}^n$  è un'applicazione continua da un intervallo  $[a, b]$  in  $\mathbb{R}^n$ ,  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Una curva  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  si dice *semplice* se  $\gamma|_{[a, b]}$  è iniettiva e *chiusa* se  $\gamma(a) = \gamma(b)$ . Il luogo geometrico in cui avviene il moto è l'*immagine* di  $\gamma$  e si chiama *traiettoria* della curva. Volendo focalizzare l'attenzione sul luogo geometrico traiettoria, si dice che  $\gamma(t)$  è una *parametrizzazione* della traiettoria, cioè *un* modo di percorrere  $\gamma([a, b])$ . Se  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  è di classe  $C^1$ , il vettore  $\gamma'(t) \in \mathbb{R}^n$  si chiama *velocità* della curva al tempo  $t$  e, se  $\gamma$  è di classe  $C^2$ , il vettore  $\gamma''(t) \in \mathbb{R}^n$  si chiama *accelerazione* della curva al tempo  $t$ . Se  $t_0 \in [a, b]$  e  $\gamma'(t_0) \neq 0$ , la curva

$$t \rightarrow \gamma(t_0) + (t - t_0)\gamma'(t_0), \quad t \in \mathbb{R}$$

è l'equazione parametrica di una retta in  $\mathbb{R}^n$  detta *retta tangente alla curva*  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  nel punto  $t_0$ .

**13.1 Esercizio (Segmento).** Siano  $P_0$  e  $P_1$  punti di  $\mathbb{R}^n$ . La curva  $P(t) : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$

$$P(t) = (1 - t)P_0 + tP_1$$

è l'equazione parametrica del segmento  $S$  congiungente  $P_0$  a  $P_1$ . Osservare che la traiettoria di  $P(t)$  è il segmento  $S$  ed che il vettore velocità è costante,  $v = P_1 - P_0$ . In cinematica,  $P(t)$  è la legge oraria del moto rettilineo uniforme da  $P_0$  a  $P_1$  con velocità  $|P_1 - P_0|$ .

**13.2 Esercizio (Moto circolare uniforme).** Sia  $\gamma : [0, 2\pi[ \rightarrow \mathbb{R}^2$  data da  $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ . Osservare che la traiettoria è il cerchio in  $\mathbb{R}^2$ ,  $x^2 + y^2 = 1$ ,  $\gamma'(t) = (-\sin t, \cos t)$  e  $\ddot{\gamma}(t) = -(\cos t, \sin t)$ . In particolare  $|\gamma'(t)| = 1$  e  $\gamma' \perp \ddot{\gamma}$ , infatti

$$(\gamma'(t)|\ddot{\gamma}(t)) = \frac{1}{2} \frac{d|\gamma'|^2}{dt}(t) = 0.$$

La curva  $\gamma$  descrive il moto circolare uniforme di un punto sul cerchio. Al variare di  $t$  in  $[0, 2\pi[$  il punto gira una sola volta sul cerchio. La curva  $\delta(t) = (\cos t, \sin t)$ ,  $t \in [0, 4\pi[$ , è una curva diversa da  $\gamma(t)$  avendo dominio diverso: la traiettoria è la stessa, ma il punto gira due volte su di essa.

**13.3 Esercizio (Grafici).** Sia  $f \in C^0([a, b], \mathbb{R})$ . Il grafico di  $f$ ,

$$G_f := \{(x, y) \mid x \in [a, b], y = f(x)\},$$

ha una parametrizzazione standard data dalla variabile indipendente

$$\begin{cases} x = t, \\ y = f(t), \end{cases} \quad t \in [a, b].$$

La curva corrispondente  $G_f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $G_f(t) := (t, f(t))$ , è la curva *grafico di  $f$* . Osservare che, se  $f$  è di classe  $C^1$ , allora

$$G'_f(t) = (1, f'(t)).$$

Con la curva *grafico*, il grafico è percorso con la componente orizzontale della velocità normalizzata a +1, in particolare  $|G'_f(t)| \geq 1 \forall t$ .

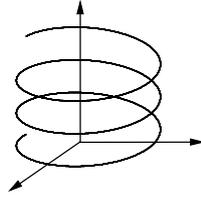


Figura 13.1. Elica cilindrica.

**13.4 Esercizio (Elica cilindrica).** Se  $\gamma(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , allora il vettore velocità è  $\gamma'(t) = (-a \sin t, a \cos t, b)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ . Osservare che il punto  $\gamma(t)$  si muove con velocità costante (il modulo del vettore velocità è costante) su un'elica, cfr. Figura 13.1.

**13.5 Esercizio (Parametrizzazioni diverse).** Osservare che più curve possono avere la stessa traiettoria. Ad esempio le curve  $\gamma_1(t) := (t, 0)$ ,  $\gamma_2 := (t^3, 0)$  e  $\gamma_3(t) := (t(t^2 - 1), 0)$ ,  $t \in \mathbb{R}$  sono parametrizzazioni differenti dell'asse delle  $x$  in  $\mathbb{R}^2$ . Si noti però il diverso modo di percorrere l'asse delle  $X$ . Analogamente le curve  $\sigma_1(t) = (t^3, t^2)$  e  $\sigma_2(t) = (t, (t^2)^{1/3})$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , sono parametrizzazioni diverse della traiettoria in (a) Figura 13.2. Si noti che  $\sigma_1$  è una parametrizzazione  $C^\infty$ , mentre  $\sigma_2$  è continua ma non  $C^1$ .

**13.6 Esercizio (Autointersezioni).** Osservare che una curva  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  può avere *autointersezioni*, cioè pu non essere iniettiva.

In (b) Figura 13.2 è rappresentata la curva  $\gamma(t) = (t^3 - 4t, t^2 - 4)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , con un'autointersezione in  $(0, 0)$  ( $t = \pm 2$ ).

**13.7 Esercizio (Curve polari).** Molte curve si possono descrivere con parametro "angolare", dando per ogni  $t \in \mathbb{R}$  l'angolo  $\theta(t)$  e la distanza  $\rho(t)$  dall'origine. Osservare che la rappresentazione cartesiana è allora

$$\gamma(t) = \begin{cases} x(t) = \rho(t) \cos \theta(t), \\ y(t) = \rho(t) \sin \theta(t). \end{cases}$$

Se la variabile tempo e la variabile angolo coincidono,  $\theta(t) = t$ , la curva si descrive con la sola funzione distanza dall'origine. Si dice che la curva è espressa in *forma polare*. La rappresentazione cartesiana è allora

$$\gamma(\theta) = \begin{cases} x(\theta) = \rho(\theta) \cos \theta, \\ y(\theta) = \rho(\theta) \sin \theta. \end{cases}$$

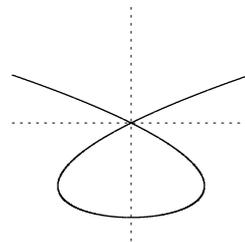
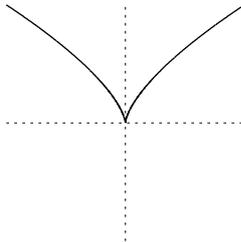


Figura 13.2. (a)  $\gamma(t) = (t^3, t^2)$ , (b)  $\gamma(t) = (t^3 - 4t, t^2 - 4)$ .

Nella letteratura esistono moltissime *curve classiche* trattate nei loro molteplici aspetti, per la loro rilevanza in varie questioni. Si rimanda il lettore ad esempio alla pagine in <http://www.mathcurve.com>.

### 13.a Il calcolo

Il calcolo per le funzioni reali di una variabile reale si estende alle curve, con la sola notevole eccezione del teorema di Lagrange,

**13.8 Esercizio.** Dare un esempio che dimostri come il teorema di Lagrange non possa essere esteso alle curve.

*Soluzione.* Se  $f(t) := (\cos t, \sin t)$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ , si ha  $0 = f(2\pi) - f(0)$  e  $f'(s) \neq 0 \forall s \in [0, 2\pi]$  essendo  $|\phi'(s)| = 1$ .

**13.9 Definizione.** Se  $\gamma \in C^0([a, b]; \mathbb{R}^n)$ ,  $\gamma = (\gamma^1, \gamma^2, \dots, \gamma^n)$ , l'integrale di  $\gamma$  su  $[a, b]$  è il vettore di  $\mathbb{R}^n$  dato da

$$\int_a^b \gamma(s) ds := \left( \int_a^b \gamma^1(s) ds, \dots, \int_a^b \gamma^n(s) ds \right).$$

e, se  $\gamma \in C^0([a, b]; \mathbb{R}^n)$ , allora

$$\left| \int_a^b \gamma(s) ds \right| \leq \int_a^b |\gamma(s)| ds,$$

cfr. (11.9).

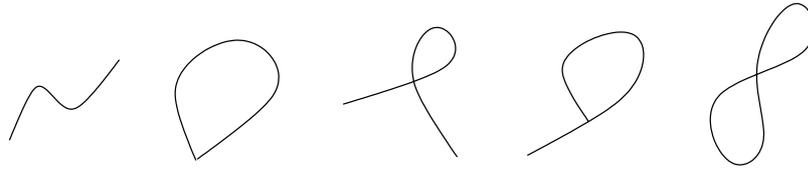
Applicando il teorema fondamentale del calcolo alle componenti si ottiene però la seguente forma integrale del teorema del valor medio per le curve.

**13.10 Teorema.** Se  $\gamma \in C^1([a, b]; \mathbb{R}^n)$ , allora

$$\gamma(b) - \gamma(a) = \int_a^b \gamma'(s) ds.$$

Infine ricordiamo che la formula di Taylor si estende al caso vettoriale semplicemente scrivendola per ciascuna componente:

$$\begin{aligned} \gamma(t) = & \gamma(t_0) + \gamma'(t_0)(t - t_0) + \frac{1}{2}\gamma''(t_0)(t - t_0)^2 + \dots \\ & + \frac{1}{k!}\gamma^{(k)}(t_0)(t - t_0)^k + \frac{1}{k!} \int_{T_0}^t (t - s)^k \gamma^{(k+1)}(s) ds. \end{aligned} \quad (13.1)$$



**Figura 13.3.** Alcune traiettorie. Da sinistra: (a) curva semplice, (b) curva semplice chiusa, (c), (d), (e) curve non semplici.

### 13.b Curve equivalenti

Una curva  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  di classe  $C^0$  può essere vista come la legge di moto di un punto in  $\mathbb{R}^n$ . Non è esclusa la possibilità di ripassare più di una volta per uno stesso punto. La *molteplicità* di una curva  $\gamma$  in  $x \in \mathbb{R}^n$  è il numero di punti  $t \in [a, b]$  con  $\gamma(t) = x$ . Ovviamente la traiettoria di  $\gamma$  è l'insieme dei punti di molteplicità maggiore o uguale a 1.

**13.11 Esercizio.** Ogni curva chiusa e continua  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  è l'immagine continua di un cerchio; se inoltre  $\gamma$  è semplice, allora  $\gamma([a, b])$  è omeomorfo a  $S^1$ .

**13.12 Esercizio.** Discutere le curve  $(x(t), y(t))$ ,  $x(t) = 2t/(1+t^2)$ ,  $y(t) = (t^2-1)/(1+t^2)$ ,  $x(t) = t^2/(1+t^6)$ ,  $y(t) = t^3/(1+t^6)$ ,

Molti fatti relativi alle curve sono indipendenti dalla parametrizzazione nel senso che non dipendono da cambiamenti bi-continui del parametro. Questo è il caso della molteplicità, e, come vedremo fra poco, della lunghezza. Conviene quindi introdurre la seguente nozione di equivalenza

**13.13 Definizione.** Siano  $\gamma \in C^0([a, b], \mathbb{R}^n)$  e  $\delta \in C^0([c, d], \mathbb{R}^n)$  due curve continue. Si dice che  $\delta$  è equivalente a  $\gamma$  se esiste una funzione continua bigettiva  $h : [c, d] \rightarrow [a, b]$  tale che

$$\delta(s) = \gamma(h(s)) \quad \forall s \in [c, d].$$

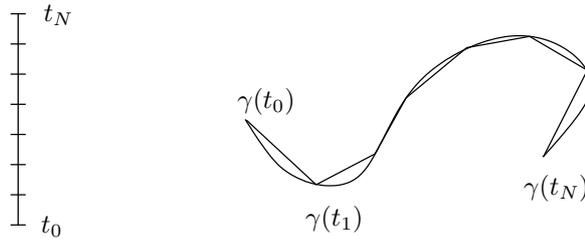
A parole possiamo dire che  $\delta$  si riduce a  $\gamma$  modulo un cambiamento di variabile sull'asse dei tempi. Poiché l'inversa di una funzione  $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , se esiste, è continua,  $\delta$  è equivalente a  $\gamma$  se e solo se  $\gamma$  è equivalente a  $\delta$ . Anzi la nozione di equivalenza fra curve è una relazione di equivalenza.

Ovviamente, se due curve sono equivalenti, esse hanno la stessa traiettoria. Il viceversa non è in generale vero, essendoci un problema di molteplicità.

**13.14 Esercizio.** Mostrare che le curve  $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ , e  $\delta(t) = (\cos t, \sin t)$ ,  $t \in [0, 4\pi]$ , sono curve chiuse con la stessa traiettoria (il cerchio unitario di  $\mathbb{R}^2$ ), ma non sono equivalenti.

Abbiamo però

**13.15 Teorema.** Due curve continue semplici con la stessa traiettoria sono equivalenti.



**Figura 13.4.** Poligonale su una curva.

*Dimostrazione.* Consideriamo per semplicità il caso di curve non chiuse. Siano  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  e  $\delta : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^n$  le due curve. Poniamo  $h := \delta^{-1} \circ \gamma$ . È chiaro che  $h$  è una bigezione da  $[a, b]$  in  $[c, d]$  e

$$\gamma(t) = \delta \circ \delta^{-1} \circ \gamma = \delta(h(t)) \quad \forall t \in [a, b].$$

Essendo poi  $\delta^{-1} : \delta([c, d]) \rightarrow [c, d]$  continua ( $\delta$  è continua e iniettiva), concludiamo che  $h : \delta^{-1} \circ \gamma$  è continua e quindi  $\gamma$  e  $\delta$  sono equivalenti.  $\square$

La nozione di equivalenza può essere ulteriormente precisata: intuitivamente se le curve  $\gamma$  e  $\delta$  sono equivalenti, esse fanno lo stesso percorso, e possono farlo o nello stesso verso, o in verso opposto. Si dice che due curve equivalenti  $\gamma$  e  $\delta$ ,  $\delta = \gamma \circ h$ ,  $h$  omeomorfismo, hanno lo *stesso verso* o la *stessa orientazione* se  $h$  è monotona crescente e che  $\gamma$  e  $\delta$  hanno *verso opposto* o *orientazione opposta* se  $h$  è monotona decrescente. Poiché ogni omeomorfismo  $h : [a, b] \rightarrow [c, d]$  è o strettamente crescente o strettamente decrescente, due curve equivalenti o hanno la stessa orientazione o hanno orientazioni opposte.

### 13.c Lunghezza

Definiamo ora la lunghezza di una curva continua  $\gamma \in C^0([a, b]; \mathbb{R}^n)$ .

Una suddivisione  $\sigma$  di  $[a, b]$  è la scelta di un numero finito di punti  $t_0, \dots, t_N$  con  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_N = b$ . Indichiamo con  $\mathcal{S}$  l'insieme delle suddivisioni dell'intervallo  $[a, b]$ . Per ogni suddivisione  $\sigma = (t_0, t_1, \dots, t_N) \in \mathcal{S}$  calcoliamo la lunghezza  $P(\sigma)$  della poligonale congiungente i punti  $\gamma(t_0), \gamma(t_1), \dots, \gamma(t_N)$  nell'ordine indicato, cfr. Figura 13.4,

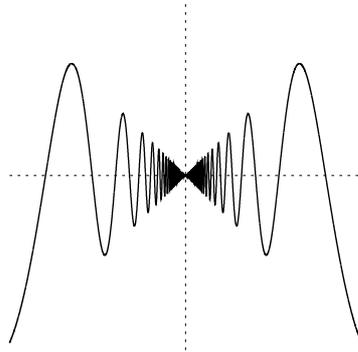
$$P(\sigma) := \sum_{i=1}^N |\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})|.$$

**13.16 Definizione.** Si chiama *lunghezza della curva*  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  il numero, eventualmente  $+\infty$ ,

$$L(\gamma) = L(\gamma; [a, b]) := \sup \{ P(\sigma) \mid \sigma \in \mathcal{S} \}.$$

Una curva di lunghezza finita si dice anche *rettificabile* o con *variazione totale finita*.

A parole possiamo dire che la lunghezza di una curva è l'*estremo superiore delle lunghezze delle poligonali inscritte*. Si verifica facilmente



**Figura 13.5.** Il grafico di  $f(x) = x \sin(1/x)$ ,  $x \in [0, 1]$ , non è rettificabile.

**13.17 Proposizione.** Se  $\gamma$  è equivalente a  $\delta$ , allora  $L(\gamma) = L(\delta)$ . In particolare per le curve semplici la lunghezza dipende solo dalla traiettoria di  $\gamma$ .

**13.18 Esercizio.** Mostrare che per  $c \in (a, b)$  si ha  $L(\gamma; [a, b]) = L(\gamma; [a, c]) + L(\gamma; [c, b])$ . Convincerli che per  $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ ,  $t \in [0, 2\pi]$  si ha  $L(\gamma) = 2\pi$  e per  $\delta(t) = (\cos t, \sin t)$ ,  $t \in [0, 4\pi]$  si ha  $L(\delta) = 4\pi$ .

**13.19 Esercizio.** Provare la Proposizione 13.17.

**13.20 Esercizio.** Osservare che non tutte le curve continue,  $\gamma \in C^0([a, b]; \mathbb{R}^n)$  sono rettificabili, i.e., hanno lunghezza finita, cfr. Figura 13.5. Ad esempio la curva continua grafico di  $f$ ,  $\gamma(x) = (x, f(x))$ ,  $x \in [0, 1]$ , dove

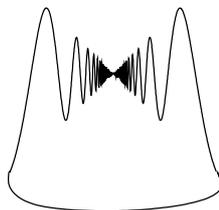
$$f(x) := \begin{cases} x \sin(1/x) & x \in ]0, 1] \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

non ha lunghezza finita. Infatti posto

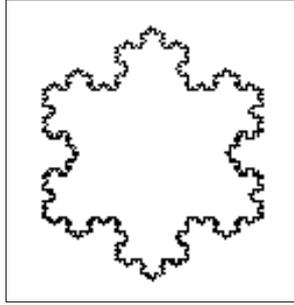
$$x_n := \frac{1}{n\pi + \pi/2}, \quad n \in \mathbb{N},$$

il grafico di  $f$  su  $[x_{n-1}, x_n]$  è più lungo di  $x_n |\sin 1/x_n| = x_n$  e quindi per ogni  $n$

$$L(\gamma) \geq L(\gamma|_{[x_n, 1]}) \geq \sum_{k=1}^{n-1} x_k = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k\pi + \pi/2},$$



**Figura 13.6.** Una curva chiusa non rettificabile.



**Figura 13.7.** Un'approssimazione della curva di von Koch.

i.e.,  $L(\gamma) = \infty$ . Si osservi che la curva  $\gamma$  appartiene a  $C^0[0, 1], \mathbb{R}^n) \cap C^1([0, 1], \mathbb{R}^n)$ , ma che  $\gamma'$  non è limitata in  $(0, 1]$ .

**13.21 Esercizio (Curva di von Koch).** È facile intuire che si può circondare una regione limitata del piano con una curva di lunghezza arbitrariamente grande, uno sguardo alla mappa delle coste della Gran Bretagna da ragione di questa intuizione. Il grafico in Figura 13.5 permette di costruire una curva di lunghezza infinita che delimita una regione limitata, cfr. Figura 13.6.

Una classica curva dello stesso tipo, ma più interessante per molti aspetti, è la *curva di von Koch*. Partendo da un triangolo equilatero si divide in tre parti uguali ciascun lato e si sostituisca la parte mediana con gli altri due lati del triangolo equilatero il cui terzo lato è il pezzo rimosso. Si ripeta quindi il procedimento su ciascun lato della figura ottenuta.

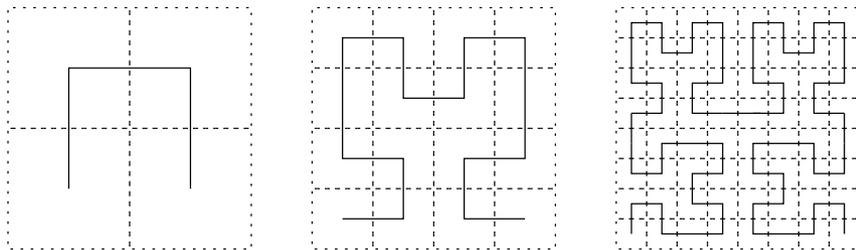
Iterando indefinitamente il procedimento si costruisce una successione di curve che “converge” ad una curva chiamata *curva di von Koch*. Si può mostrare che questa curva

- (i) è una curva semplice continua,
- (ii) ha lunghezza infinita, mentre delimita un'area finita,
- (iii) non è derivabile in nessun suo punto.

Indubbiamente la curva di von Koch dà un esempio di curva continua più patologica di quella in Figura 13.5.

**13.22 Esercizio.** Mostrare che ogni iterazione nella costruzione della curva di von Koch aumenta la lunghezza della curva nel rapporto  $4/3$  e che, dati due punti sulla curva, la lunghezza dell'arco di curva compreso tra i due punti tende all'infinito. Mostrare infine che la superficie delimitata dalla curva di von Koch è pari a  $8/5$  della superficie del triangolo iniziale.

**13.23 Esercizio (Curve di Peano).** Le curve continue possono essere assai più patologiche se si toglie la condizione di semplicità. A Giuseppe Peano (1858–1932) si deve l'esempio di una



**Figura 13.8.** Costruzione di una curva di Peano, seguendo Hilbert.

curva  $\gamma : [0, 1] \rightarrow [0, 1] \times [0, 1]$  continua che ha come immagine *tutto* il quadrato  $[0, 1] \times [0, 1]$ : una tale curva  $\gamma$  si chiama *curva di Peano*.

Una curva di Peano, seguendo David Hilbert (1862–1943), può essere costruita nel seguente modo. Si consideri la successione di curve continue  $\gamma_i : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  come in Figura 13.8. Al passo  $i$ , si ha una curva continua ottenuta modificando la curva del passo  $i-1$  in un intervallo di lunghezza  $2^{-i}$  nel dominio e in un quadrato di lato  $2^{-i}$  sull'immagine. La successione di queste curve converge quindi uniformemente ad una curva continua che ha come immagine tutto il quadrato. Ovviamente  $\gamma$  non può essere iniettiva essendo l'intervallo  $[0, 1]$  non omeomorfo al quadrato  $[0, 1] \times [0, 1]$ . Per convenienza del lettore ripetiamo l'argomentazione: se  $\gamma$  fosse 1-a-1,  $\gamma$  darebbe un omeomorfismo da  $[0, 1] \setminus \{1/2\}$  su  $([0, 1] \times [0, 1]) \setminus \{\gamma(1/2)\}$ , ma mentre  $([0, 1] \times [0, 1]) \setminus \{\gamma(1/2)\}$  è connesso  $[0, 1] \setminus \{1/2\}$  non è connesso: assurdo.

Un altro modo di costruire una curva di Peano è la seguente. Rappresentiamo ogni  $x \in [0, 1]$  con un allineamento binario  $x = \sum_{i=1}^{\infty} b_i/2^i$ ,  $b_i \in \{0, 1\}$  (si sceglie ad esempio di eliminare le rappresentazioni che finiscono con un 1 periodico). Per ogni  $x = \sum_{i=1}^{\infty} b_i/2^i \in [0, 1]$  si pone

$$\gamma(x) := \left( \sum_{i=0}^{\infty} \frac{b_{2i+1}}{2^{i+1}}, \sum_{i=1}^{\infty} \frac{b_{2i}}{2^i} \right)$$

Usando il fatto che se  $x$  cambia di poco, le cifre dell'allineamento decimale cambiano di poco, è facile provare che  $\gamma$  è continua. D'altra parte  $\gamma$  è surgettiva. Si noti che  $\gamma$  non è iniettiva. Se una delle coordinate di  $(x, y)$  ha due rappresentazioni decimali, vi saranno due punti distinti di  $[0, 1]$  con immagine  $(x, y)$ .

### 13.d Curve di classe $C^1$ regolari

Sia  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  una curva di classe  $C^1$ .  $\gamma \in C^1([a, b]; \mathbb{R}^n)$  si dice *regolare* se  $\gamma'(t) \neq 0$  per ogni  $t \in [a, b]$ . Dunque la traiettoria di  $\gamma$  ha in ogni punto una retta tangente ottenuta come traiettoria della curva  $t \rightarrow \gamma(t_0) + (t - t_0) \gamma'(t_0)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ . Il vettore di modulo 1

$$\gamma'(t_0)/|\gamma'(t_0)|.$$

si chiama il *versore tangente* a  $\gamma$  in  $t_0$ .

Nel caso di curve di classe  $C^1$  c'è una formula esplicita per il calcolo della lunghezza. Si ha

**13.24 Teorema.** *Sia  $\gamma \in C^1([a, b]; \mathbb{R}^n)$ . Allora  $\gamma$  ha lunghezza finita e*

$$L(\gamma; [a, b]) = \int_a^b |\gamma'(s)| ds.$$

*Dimostrazione.* Sia  $\sigma \in \mathcal{S}$  una partizione di  $[a, b]$  fatta con i punti  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_N = b$  e sia  $P(\sigma)$  la lunghezza dalla poligonale congiungente nell'ordine i punti  $\gamma(t_0), \gamma(t_1), \dots, \gamma(t_N)$ . Per il teorema fondamentale del calcolo

$$\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1}) = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \gamma'(s) ds$$

e quindi  $|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})| \leq \int_{t_{i-1}}^{t_i} |\gamma'(s)| ds$ . Sommando su  $i$  si ottiene

$$P(\sigma) = \sum_{i=1}^N |\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})| \leq \int_a^b |\gamma'(s)| dx$$

e per l'arbitrarietà di  $\sigma$ ,  $L(\gamma) = \sup_{\sigma} P(\sigma) \leq \int_a^b |\gamma'(s)| ds < \infty$ . Questo prova che  $\gamma$  è rettificabile. Per concludere la dimostrazione resta da provare che

$$\int_a^b |\gamma'(s)| dx \leq L(\gamma) \quad (13.2)$$

o equivalentemente che, per ogni  $\epsilon > 0$ , esiste una suddivisione  $\sigma_\epsilon$  tale che

$$\int_a^b |\gamma'(s)| ds \leq P(\sigma_\epsilon) + \epsilon.$$

Per questo osserviamo che per ogni  $s \in [t_{i-1}, t_i]$

$$\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1}) = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \gamma'(t) dt = \int_{t_{i-1}}^{t_i} (\gamma'(t) - \gamma'(s)) dt + \gamma'(s)(t_i - t_{i-1})$$

Per cui

$$|\gamma'(s)| \leq \frac{1}{t_i - t_{i-1}} |\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})| + \epsilon \quad (13.3)$$

se scegliamo la suddivisione  $\sigma_\epsilon := (t_0, t_1, \dots, t_N)$  in modo che la velocità non cambi troppo,

$$|\gamma'(t) - \gamma'(s)| \leq \epsilon \quad \text{se } s, t \in [t_{i-1}, t_i].$$

(una tale scelta è possibile perché  $\gamma' : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  è uniformemente continua su  $[a, b]$ , cfr. il teorema di Heine-Cantor, Teorema 8.25). Integrando rispetto ad  $s$  la (13.3) in  $[t_{i-1}, t_i]$  e sommando in  $i$  si ottiene la tesi.  $\square$

**13.25 Esercizio (Lunghezza di un grafico).** Sia  $f \in C^1([a, b], \mathbb{R})$  Calcolare la lunghezza del grafico di  $f$ .

*Soluzione.* La curva grafico di  $f$ ,

$$G_f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad G_f(t) = (t, f(t)),$$

è regolare, con vettore velocità  $G'_f(t) = (1, f'(t))$ . La lunghezza del grafico è quindi

$$L(G_f; [a, b]) = \int_a^b \sqrt{1 + |f'(x)|^2} dx.$$

**13.26 Esercizio (Lunghezza in coordinate polari).** Calcolare la lunghezza di una curva espressa in coordinate polari.

*Soluzione.* Se  $\rho = \rho(\theta)$ ,  $\theta_0 \leq \theta \leq \theta_1$ , è una curva di classe  $C^1$  da  $x = \rho(\theta) \cos \theta$ ,  $y = \rho(\theta) \sin \theta$  si trova

$$x'^2(\theta) + y'^2(\theta) = \rho^2(\theta) + \rho'^2(\theta);$$

quindi la sua lunghezza è data da

$$\int_{\theta_0}^{\theta_1} \sqrt{\rho^2(\theta) + \rho'^2(\theta)} d\theta.$$

**13.27 Esercizio.** Calcolare la lunghezza di una curva di  $\mathbb{R}^3$  espressa in coordinate cilindriche.

*Soluzione.* In coordinate cilindriche  $x = \rho(\theta) \cos \theta$ ,  $y = \rho(\theta) \sin \theta$ ,  $z = f(\theta)$ ,  $\theta_0 \leq \theta \leq \theta_1$ , la lunghezza è dunque data da

$$\int_{\theta_0}^{\theta_1} \sqrt{\rho^2(\theta) + \rho'^2(\theta) + f'^2(\theta)} d\theta;$$

**13.28 Esercizio.** Calcolare la lunghezza di una curva di  $\mathbb{R}^3$  espressa in coordinate sferiche.

*Soluzione.* In coordinate sferiche

$$x = \rho(t) \sin \varphi(t) \cos \theta(t), \quad y = \rho(t) \sin \varphi(t) \sin \theta(t), \quad z = \rho(t) \cos \varphi(t), \quad t \in [t_0, t_1].$$

La lunghezza è perciò data da

$$\int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\rho^2(t) + \rho'^2(t) + 2\rho^2(t) \sin^2 \varphi(t) \cos^2 \theta(t) \delta\theta}.$$