23. lIl calcolo degli integrali, II

23.a Volume della palla n-dimensionale

Si voglia calcolare il volume della palla n-dimensionale di centro 0 e raggio 1,

$$\omega_n := \mathcal{L}^n(B^n(0,1)), \qquad B^n(0,1) := \{x \in \mathbb{R}^n \,\big|\, |x| \le 1\}.$$

Scriviamo le coordinate $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ di $\mathbb{R}^n$ come (y,t) con $y := (x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$ e $t = x_n \in \mathbb{R}$. La palla unitaria è allora

$$B^n(0,1) := \{(y,t) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} \,\big|\, |y|^2 + t^2 < 1\}.$$

Decidiamo di affettare $\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$ con piani di dimensione $n-1$ perpendicolari all'asse delle t. La sezione di B^n a livello t è allora

$$E_t := \Big\{y \in \mathbb{R}^{n-1} \,\Big|\, |y|^2 < 1 - t^2\Big\} = \begin{cases} B^{n-1}(0, \sqrt{1-t^2})) & \text{se } t \in [-1,1], \\ \emptyset & \textit{se } |t| > 1. \end{cases}$$

Per omogeneità $B^{n-1}(0, \sqrt{1-t^2}) = \omega_{n-1}(1-t^2)^{(n-1)/2}$, e, essendo $B^n(0,1)$ aperto, segue dal teorema di Fubini che

$$\omega_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{L}^{n-1}(E_t)\,dt = \omega_{n-1} \int_{-1}^{1} (1-t^2)^{\frac{n-1}{2}}\,dt = 2\omega_{n-1} \int_0^1 (1-t^2)^{\frac{n-1}{2}}\,dt.$$

Osservando ora che $\int_0^1 (1-t^2)^{\frac{n-1}{2}}\,dt = \int_0^{\pi/2} \cos^n(t)\,dt$, e che

$$\int_0^{\pi/2} \cos^n(t)\,dt = \frac{n-1}{n} \int_0^{\pi/2} \cos^{n-2}(t)\,dt,$$

si trova,

$$\int_0^{\pi/2} \cos^{2k}(t)\,dt = \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\,\frac{\pi}{2}, \qquad \int_0^{\pi/2} \cos^{2k+1}(t)\,dt = \frac{(2k)!!}{(2k+1)!!}.$$

Poiché $\omega_1 = 2$ e $\omega_2 = \pi$ si conclude che

$$\omega_{2k} = \frac{\pi^k}{k!}, \qquad \omega_{2k+1} = \frac{2^{k+1}\pi^k}{(2k+1)!!}. \tag{23.1}$$

A titolo di curiosità si osservi che $\omega_n \to 0$ per $n \to \infty$. Per contrasto il volume n-dimensionale del cubo di lato 2 che contiene la sfera vale 2^n e tende quindi a $+\infty$ per $n \to \infty$.

Si può esprimere il volume della palla n dimensionale in termini della funzione *Gamma di Eulero*, cfr. Esercizio 23.5.

23.1 Esercizio. Sia $a > 0$. Calcolare il volume n dimensionale di

$$E := \Big\{x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \,\Big|\, \sum_{i=1}^n x_i \le a,\ x_i \ge 0\ \forall i\Big\}.$$

23.b Diseguaglianza isodiametrica

23.2 Proposizione (Diseguaglianza isodiametrica). *Sia E misurabile limitato in $\mathbb{R}^n$. Allora*

$$\mathcal{L}^n(E) \le \omega_n \Big(\frac{\operatorname{diam} E}{2}\Big)^n.$$

Osserviamo che, mentre in $\mathbb{R}$ ogni insieme E è contenuto in un intervallo di raggio metà del suo diametro, la cosa non è più vera se $n \ge 2$. Si pensi ad esempio ad un triangolo equilatero. Si dimostra ovviamente che E è contenuto in una palla di raggio uguale al suo diametro e quindi

$$\mathcal{L}^n(E) \le \omega_n (\operatorname{diam} E)^n. \tag{23.2}$$

La stima isodiametrica richiede un qualche sforzo. Per alcuni insiemi la stima isodiametrica è però banale. Ad esempio se E è simmetrico, nel senso che $E = -E$, allora per ogni $x \in E$ si ha che $2|x| = |x - (-x)| \le \operatorname{diam} E$ e quindi $E \subset B(0, \operatorname{diam} E/2)$ da cui la stima isodiamentrica.

Per insiemi generali utilizzeremo il metodo di *simmetrizzazione di Steiner*. Data una direzione $a \in S^{n-1}$, indichiamo con $P(a)$ il sottospazio $(n-1)$-dimensionale dei vettori di $\mathbb{R}^n$ ortogonali ad a in modo che ogni $x \in \mathbb{R}^n$ si scrive come $x = y + ta$ con $y \in P(a)$ e $t \in \mathbb{R}$. Per ogni $y \in P(a)$ poniamo

$$E_{a,y} = \Big\{t \in \mathbb{R} \,\Big|\, ta + y \in E\Big\} \qquad \text{e} \qquad \ell_a(y) := \mathcal{L}^1(E_{a,y})$$

e definiamo il *simmetrizzato di E* nella direzione a come

$$S_a(E) := \Big\{(y,t) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} \,\Big|\, |t| \le \frac{\ell_a(y)}{2}\Big\}.$$

Si ha

23.3 Lemma. *Se E è misurabile limitato, allora*
- (i) *$S_a(E)$ è misurabile,*
- (ii) *se E è simmetrico rispetto ad un k piano ortogonale ad a, $1 \le k \le n-1$, allora $S_a(E)$ ha la stessa simmetria,*
- (iii) $|S_a(E)| = |E|$,
- (iv) $\operatorname{diam}(S_a(E)) \le \operatorname{diam}(E)$.

Dimostrazione. Con una rotazione, che non cambia la misurabilità né la misura né il diametro di E, cfr. (20.1), non è restrittivo supporre che $a = (0, 0, \dots, 1)$. Pertanto $P(a) = \{x = (y, 0),\ y \in \mathbb{R}^{n-1}\}$ e ogni punto $x \in \mathbb{R}^n$ si scrive come $x = (y, t)$. $E_{a,y}$ è esattamente la fetta di E perpendicolare al piano delle prime $n-1$ coordinate per y. Perciò dal teorema di Fubini si ottiene che $E_{a,y}$ è misurabile per q.o. $y \in \mathbb{R}^{n-1}$, che la funzione $\ell_a(y) := \mathcal{L}^1(E_{a,y})$ è misurabile in $\mathbb{R}^{n-1}$, da cui segue che $S_a(E)$ è misurabile, cfr. il Teorema 19.9, e che

$$|E| = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \mathcal{L}^1(E_{a,y})\,dy = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \Big(\int_{-\ell_a(y)/2}^{\ell_a(y)/2} 1\,dt\Big) dy = |S_a(E)|.$$

Una simmetria di E rispetto ad un k-piano ortogonale ad $(0, 0, \dots, 1)$ si traduce in una simmetria dello stesso tipo per la funzione $\ell_a(y)$ e quindi di $S_a(E)$. Infine, usando la diseguaglianza elementare

$$\mathcal{L}^1(I_1) + \mathcal{L}^1(I_2) \le \operatorname{diam}(I_1 \cup I_2)$$

per sottoinsiemi di $\mathbb{R}$, non è difficile provare che $\operatorname{diam}(S_a(E)) \le \operatorname{diam}(E)$. □

Dimostrazione della Proposizione 23.2. Sia $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ la base standard di $\mathbb{R}^n$, ponendo $E_1 = S_{e_1}(E)$, $E_2 := S_{e_2}(E_1)$, ..., $E_n := S_{e_n}(E_{n-1})$ e applicando ripetutamente il Lemma 23.3, si ottengono successivamente

$$|E| = |E_1| = \dots |E_n|, \qquad \operatorname{diam}(E_n) \le \operatorname{diam}(E_{n-1}) \le \dots \le \operatorname{diam} E,$$

e E_1 simmetrico rispetto al piano perpendicolare a x_1, E_2 simmetrico rispetto al piano perpendicolare a x_1 e x_2, ..., E_n simmetrico rispetto a tutti gli assi coordinati e quindi rispetto all'origine. Perciò per le considerazioni iniziali, E_n è contenuto in una palla di raggio $\operatorname{diam} E_n/2$ e si conclude

$$|E| = |E_n| \le \omega_n \Big(\frac{\operatorname{diam} E_n}{2}\Big)^n \le \omega_n \Big(\frac{\operatorname{diam} E}{2}\Big)^n.$$

□

23.c La funzione Γ di Eulero

23.4 Esercizio (Distribuzione Gaussiana). Mostrare che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}. \tag{23.3}$$

Infatti dal teorema di Fubini ($e^{-x^2-y^2}$ è integrabile su $\mathbb{R}^2$) e passando a coordinate polari,

$$\begin{aligned}\Big(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx\Big)^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\,dy = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\infty} e^{-\rho^2}\rho\,d\rho = 2\pi\frac{1}{2}\int_0^{\infty} e^{-\sigma}\,d\sigma = \pi.\end{aligned}$$

Dalla (23.3) cambiando variabile, si ricava subito

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda x^2}\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}, \qquad \lambda > 0. \tag{23.4}$$

23.5 Esercizio (La funzione Γ di Eulero e l'area). La funzione *Gamma* di Eulero è definita da

$$\Gamma(\alpha) := \int_0^{\infty} t^{\alpha-1}\,e^{-t}dt, \qquad \alpha > 0. \tag{23.5}$$

È presto visto che $\Gamma(1) = 1$ e dall'Esercizio 23.4

$$\Gamma(1/2) = 2\int_0^{\infty} e^{-s^2}\,ds = \sqrt{\pi}.$$

Inoltre integrando per parti,

$$\Gamma(\alpha+1) = \alpha\,\Gamma(\alpha) \qquad \forall\alpha > 0.$$

Segue per induzione che

$$\Gamma(n+1) = n!, \qquad \Gamma(n+1/2) = \frac{(2n-1)!!}{2^n}\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}\frac{(2n-1)!!}{2^n} = \sqrt{\pi}\,\frac{(2n)!}{4^n n!},$$

da cui si ricava facilmente per confronto con (23.1) che il volume della palla n-dimensionale è dato da

$$\omega_n = \mathcal{L}^n(B^n(0,1)) = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma\Big(\frac{n}{2}+1\Big)}. \tag{23.6}$$

Ulteriori proprietà della funzione Γ sono discusse più avanti, cfr. Esercizio 23.6.

23.6 Esercizio (La funzione Beta di Eulero). La funzione *beta* di Eulero è definita da

$$B(p,q) := \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx, \qquad p,q > 0.$$

Integrando per sostituzione con la sostituzione $y = 1-x$ si vede subito che

$$B(p,q) = B(q,p) \qquad \forall p,q > 0. \tag{23.7}$$

Inoltre, scrivendo

$$x^{p-1} = \frac{x^{p+q-2}}{x^{q-1}}, \qquad x^{p+q-2} = D\frac{x^{p+q-1}}{p+q-1}$$

e integrando per parti, si trova

$$B(p,q) = \frac{q-1}{p+q-1}B(p,q-1) \qquad \forall p > 0,\ q > 1, \tag{23.8}$$

e per simmetria

$$B(p,q) = \frac{p-1}{p+q-1} B(p-1,q) \qquad \forall p > 1,\ q > 0. \tag{23.9}$$

Cambiando variabile con $x = z/(1+z)$, si trova un'altra forma della funzione beta

$$B(p,q) = \int_0^\infty \frac{z^{p-1}}{(1+z)^{p+q}}\, dz. \tag{23.10}$$

La funzione beta si calcola tramite la funzione Γ di Eulero. Infatti si ha

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}, \qquad p,q > 0. \tag{23.11}$$

Per provarlo, cominciamo con l'osservare che cambiando variabile con $x = \lambda z$, $\lambda > 0$, si ha

$$\frac{\Gamma(\alpha)}{\lambda^\alpha} = \lambda^{-\alpha} \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x}\, dx = \int_0^\infty z^{\alpha-1} e^{-\lambda z}\, dz, \qquad \alpha > 0. \tag{23.12}$$

Ora, applicando il teorema di Fubini, cambiando variabili con $(\lambda, y) \to x = \lambda y, y = y$, e tenendo conto delle (23.12) e (23.10), si trova

$$\begin{aligned}
\Gamma(p)\Gamma(q) &= \int_0^\infty \int_0^\infty x^{p-1} y^{q-1} e^{-(x+y)}\, dx\, dy = \int_0^\infty \lambda^{p-1} \left(\int_0^\infty y^{p+q-1} e^{-(1+\lambda)y}\, dy \right) d\lambda \\
&= \int_0^\infty \lambda^{p-1} \frac{\Gamma(p+q)}{(1+\lambda)^{p+q}}\, d\lambda = \Gamma(p+q) B(p,q),
\end{aligned}$$

come richiesto.

La funzione beta compare nella valutazione di vari integrali interessanti. Ad esempio, posto

$$I_\alpha := \int_{-1}^1 (1-x^2)^\alpha\, dx, \qquad \alpha > -1,$$

cambiando variabili si ottiene

$$I_\alpha = \int_0^1 (1-t)^\alpha t^{-1/2}\, dt = B(1/2, \alpha+1) = \sqrt{\pi} \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+3/2)}. \tag{23.13}$$

23.7 Esercizio. Sia $p \geq 1$ e $||x||_p := \Big(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \Big)^{1/p}$, $x \in \mathbb{R}^n$. Si calcoli $\gamma_n := \mathcal{L}^n(\{x \,|\, ||x||_p \leq 1\}$.

Affettando con piani perpendicolari ad un asse coordinato, si trova una relazione per ricorrenza per γ_n,

$$\gamma_n = \gamma_{n-1} \cdot 2 \int_0^1 (1-t^p)^{(n-1)/p}\, dt.$$

Ricordando la (23.13)

$$\frac{\gamma_n}{\gamma_{n-1}} = \frac{2}{p} B\Big(\frac{n+p-1}{p}, \frac{1}{p} \Big) = \frac{2}{p} \Gamma\Big(\frac{1}{p}\Big) \frac{\Gamma\Big(\frac{n-1+p}{p}\Big)}{\Gamma\Big(\frac{n+p}{p}\Big)}.$$

e quindi, essendo $\gamma_1 = 2$,

$$\begin{aligned}
\gamma_n &= \gamma_1 \frac{\gamma_2}{\gamma_1} \dots \frac{\gamma_{n-1}}{\gamma_{n-2}} \frac{\gamma_n}{\gamma_{n-1}} = \gamma_1 \prod_{i=1}^n \frac{j_i}{j_{i-1}} = 2\Big(\frac{2}{p}\Big)^{n-1} \Gamma\Big(\frac{1}{p}\Big)^{n-1} \prod_{i=2}^n \frac{\Gamma\Big(\frac{i-1+p}{p}\Big)}{\Gamma\Big(\frac{i+p}{p}\Big)} \\
&= 2\Big(\frac{2}{p}\Big)^{n-1} \Gamma\Big(\frac{1}{p}\Big)^{n-1} \frac{\Gamma\Big(\frac{p+1}{p}\Big)}{\Gamma\Big(\frac{n+p}{p}\Big)} = 2\Big(\frac{2}{p}\Big)^{n-1} \Gamma\Big(\frac{1}{p}\Big)^{n-1} \frac{\frac{1}{p}\Gamma\Big(\frac{1}{p}\Big)}{\frac{n}{p}\Gamma\Big(\frac{n}{p}\Big)} = \frac{p}{n} \Big(\frac{2}{p}\Big)^n \frac{\Gamma(1/p)^n}{\Gamma(n/p)}.
\end{aligned}$$

23.d Il metodo Montecarlo

Supponiamo che si voglia valutare

$$f_Q := \int_Q f(x)\,dx, \qquad Q = [0,1]^n$$

per una funzione $f \in C^0(Q)$. Una delle possibilità è di ricorrere ad un analogo del *metodo di Simpson uno dimensionale*. Se si quadretta Q diciamo suddividendo ogni lato in k parti, ci si ritrova a dover valutare f in k^n punti, un numero enorme, ad esempio se $k = 100$ e $n = 4$. Durante la seconda guerra mondiale, Enrico Fermi (1901–1954), John von Neumann (1903–1957) e Stanislaw Ulam (1909–1984) utilizzarono un metodo probabilistico, chiamato *Montecarlo*.

Si noti che la misura di Lebesgue $\mathcal{L}^n$ ristretta a Q è una misura di probabilità su Q, anzi è la misura equidistribuita su Q. Siano $\{X_k\}$ una successione di punti equidistribuiti e indipendentemente scelti di Q, i.e, una successione di variabili aleatorie indipendenti su $(Q, \mathcal{L}^n)$. Se $f : Q \to \mathbb{R}$, allora

$$\mathbf{E}\left(f(X_j)\right) = \int_Q f(x)\,d\mathcal{L}^n(x) = f_Q, \qquad \mathrm{Var}\left(f(X_j)\right) = \int_Q |f(x) - f_Q|^2\,dx$$

per ogni intero j. Poiché le variabili $\{X_j\}$ sono indipendenti,

$$\mathrm{Var}\Big(\sum_{j=1}^k f(X_k)\Big) = \sum_{j=1}^k \mathrm{Var}\left(f(X_j)\right) = k\int_Q |f(x) - f_Q|^2\,dx \le 4kM^2$$

dove $M := ||f||_\infty$. Quindi

$$\int_{Q^k} \Big(\frac{1}{k}\sum_{j=1}^k f(x_j) - f_Q\Big)^2 dx_1 \dots dx_k = \mathrm{Var}\Big(\frac{1}{k}\sum_{j=1}^k f(X_j)\Big) \le \frac{4}{k}||f||_\infty^2.$$

Se $A \subset Q \times \dots \times Q = Q^k$ è l'evento

$$A := \Big\{(X_1, \dots, X_k)\,\Big|\,\Big|\frac{1}{k}\sum_{i=1}^k f(X_i) - f_Q\Big| > \epsilon\Big\}$$

allora dalla diseguaglianza di Chebychev

$$P(A_k) := \mathcal{L}^{nk}(A_k) \le \frac{1}{\epsilon^2}\int_{Q^k}\Big(\frac{1}{k}\sum_{j=1}^k f(x_j) - f_Q\Big)^2 dx_1 \dots dx_k \le \frac{4M^2}{\epsilon^2\,k}.$$

i.e, la probabilità che, scegliendo k punti a caso equidistribuiti $\{X_k\}$, l'evento che $\frac{1}{k}\sum_{i=1}^k f(X_i)$ si discosti da f_Q per più di ϵ ha una probabilità di verificarsi inferiore a $4M^2/k\epsilon^2$. Ad esempio, se $M \le 1$ e si sceglie $k = 10^6$, nel 99% dei casi si ottiene un errore inferiore al 2%.

23.e Derivazione sotto il segno di integrale

23.8 Esercizio. Si voglia calcolare

$$F(t) := \int_0^{+\infty} \exp\left(-x^2 - t^2/x^2\right) dx, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Si vede dubito che F è pari e $F(0) = \int_0^\infty e^{-x^2/2}\, dx = \sqrt{\pi}/2$, cfr. Esercizio 23.4. Si ha

$$|f(t,x)| \le e^{-x^2} \qquad \forall t \in \mathbb{R},\ \forall x \ge 0,$$

e dunque $F(t)$ è continua in $\mathbb{R}$, cfr. la Proposizione 21.14.

Poi per $t > 0$,

$$\Big|\frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\Big| = \frac{2e^{-x^2}}{t}\,\frac{t^2}{x^2}\, e^{-t^2/x^2} \le \frac{2}{t}\, e^{-x^2} \sup_{\mathbb{R}_+}(se^{-s}) = \frac{2}{e\,t}\, e^{-x^2}.$$

Fissato $\epsilon > 0$, sia $A_\epsilon := \{t \,|\, t > \epsilon\}$. Allora

$$\Big|\frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\Big| \le \frac{2}{e\,\epsilon}\, e^{-x^2} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}_+)$$

per ogni $t > \epsilon$ e $x \ge 0$. Segue dal Teorema 21.17 che $F(t)$ è derivabile per ogni $t > \epsilon$, e per l'arbitrarietà di ϵ che F è derivabile per ogni $t > 0$ e

$$F'(t) = \int_0^\infty \frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\, dx = -2t \int_0^\infty \frac{1}{x^2} \exp\left(-x^2 - t^2/x^2\right) dx = -2\,t\,F(t) \qquad \forall t > 0,$$

l'ultima uguaglianza segue cambiando variabile di integrazione, $y = t/x$. Perciò

$$F(t) = F(0)e^{-2t}, \qquad t > 0.$$

In conclusione

$$F(t) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\, e^{-2\,|t|}.$$

23.9 Esercizio. Scrivere in termini di funzioni elementari la funzione

$$g(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2} \cos(\omega x)\, dx, \qquad \omega \in \mathbb{R}.$$

Al solito conviene utilizzare la notazione complessa quando si ha a che fare con funzioni trigonometriche. Poiché

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2} \sin(\omega x)\, dx = 0,$$

si ha

$$g(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2} e^{-i\omega x}\, dx.$$

Essendo

$$\Big|\frac{\partial}{\partial \omega}(e^{-x^2/2}e^{-i\omega x})\Big| = \Big| -ixe^{-x^2/2}e^{-i\omega x}\Big| \le |x|\, e^{-x^2/2} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}),$$

la funzione $g(\omega)$ è derivabile e

$$g'(\omega) = -i \int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-x^2/2}e^{-i\omega x}\, dx.$$

Scrivendo $-xe^{-x^2/2} = D(e^{-x^2/2})$ e integrando per parti, si trova

$$g'(\omega) = -\omega\, g(\omega),$$

e quindi, integrando l'equazione differenziale,

$$g(\omega) = g(0)\, e^{-\omega^2/2} = \sqrt{2\pi}\, e^{-\omega^2/2}.$$

Si può procedere anche diversamente. Ricordando che

$$\cos(\omega x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(\omega x)^{2n}}{(2n)!}, \; x \in \mathbb{R},$$

si considerano le funzioni

$$f_n(x) := (-1)^n \frac{\omega^{2n} x^{2n}}{(2n)!} e^{-x^2/2}$$

e si calcola

$$\begin{aligned}
(-1)^n \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)\,dx &= \frac{\omega^{2n}}{(2n)!}\, 2 \int_0^{\infty} e^{-x^2} x^{2n}\,dx = (\text{cambiando variabili } y = x^2) \\
&= \sqrt{2}\,\omega^{2n} \frac{\Gamma(n+1/2)}{(2n)!} = \omega^{2n}\sqrt{2\pi}\,\frac{(2n-1)!!}{(2n)!} \\
&= \sqrt{2\pi}\,\frac{(\omega^2/2)^n}{n!}.
\end{aligned}$$

Dunque

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |f_n(x)|\,dx < +\infty.$$

Segue dal teorema di passaggio al limite di Lebesgue per le serie che

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2} \cos(\omega x)\,dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)\,dx \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \sqrt{2\pi}\,\frac{(\omega^2/2)^n}{n!} = \sqrt{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\omega^2/2)^n}{n!} \\
&= \sqrt{2\pi}\, e^{-\omega^2/2}.
\end{aligned}$$

23.10 Derivate della funzione Γ. La funzione Γ di Eulero, definita da Eulero nel 1729,

$$\Gamma(\alpha) := \int_0^{\infty} t^{\alpha-1} e^{-t}\,dt, \qquad \alpha > 0,$$

è una importante *funzione speciale* dell'analisi, che interviene a volte in modo sorprendente, in vari campi.

Abbiamo già osservato, cfr. gli Esercizi 23.4 e 23.5, che

$$\begin{cases} \Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha) & \forall \alpha > 0, \\ \Gamma(n+1) = n!, \\ \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}. \end{cases}$$

Mostriamo ora che Γ è di classe C^{∞} sul suo insieme di definizione $E := \{\alpha > 0\}$. Infatti, fissato $\alpha_0 > 0$ e posto $h(t) := \max(1, t^{\alpha_0/2-1}, t^{2\alpha_0-1})$, $t > 0$, si vede che per $k = 0, 1, \dots$ le funzioni $h(t)|\log t|^k e^{-t}$ sono sommabili se E. Inoltre si verifica che per ogni $\alpha \in]\alpha_0/2, 2\alpha_0[$

$$t^{\alpha-1} \le h(t) \qquad \forall t > 0, \forall \alpha,\; \alpha_0/2 < \alpha < 2\alpha_0.$$

Segue che, se $f(\alpha, t) := t^{\alpha-1} e^{-t}$, $t > 0$, allora

$$\Big|\frac{\partial f}{\partial \alpha}(\alpha, t)\Big| \le h(t)\,|\log t|\, e^{-t}$$

e per induzione

$$\Big|\frac{\partial^k f}{\partial\alpha^k}(\alpha,t)\Big| \le h(t)|\log t|^k\, e^{-t}$$

per ogni $t>0$ e ogni $\alpha\in]a_0/2, 2\alpha_0[$. Si applica quindi il teorema di derivazione sotto il segno di integrale e si conclude che Γ ha derivate di ogni ordine in α_0 e

$$\Gamma^{(k)}(\alpha_0) = \int_0^\infty t^{\alpha_0-1}(\log t)^k e^{-t}\,dt, \tag{23.14}$$

in particolare

$$\Gamma'(\alpha) = \int_0^\infty t^{\alpha-1}\log t\, e^{-t}\,dt \qquad \forall\alpha>0.$$

Poiché $\Gamma'(\alpha)>0$ per $\alpha\ge 2$, Γ è crescente almeno su $\{\alpha\ge 2\}$. Poiché $\Gamma(n)\to+\infty$, si conclude che $\Gamma(\alpha)\to+\infty$. D'altra parte dall'identità $\Gamma(\alpha+1)=\alpha\,\Gamma(\alpha)$ segue per $\alpha\to 0^+$ che $\Gamma(a)\sim 1/a$ per $\alpha\to 0^+$. Poi

$$\Gamma''(\alpha) = \int_0^\infty t^{\alpha-1}(\log t)^2 e^{-t}\,dt > 0 \qquad \forall\alpha>0,$$

e Γ è strettamente convessa su $[0,\infty[$. Essendo infine $\Gamma(1)=\Gamma(2)=1$ si conclude che Γ ha un unico minimo compreso fra 1 e 2. Inoltre, da $|\log t|\le 1+\log^2 t$ $\forall t>0$ segue che $(\Gamma')^2(x)\le\Gamma(x)\Gamma''(x)$, i.e., $\log\Gamma(x)$ è convessa.

23.11 . Si ha

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \frac{\pi}{\sin\pi\alpha}, \qquad 0<a<1. \tag{23.15}$$

Infatti, introducendo la funzione Beta, dalle (23.11) e (23.10), per $0<\alpha<1$

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \Gamma(1)\,B(\alpha,1-\alpha) = \int_0^\infty\int_0^\infty \frac{t^{\alpha+1}}{1+t}\,dt.$$

D'altra parte se $\alpha := (2m+1)/(2n)$, $n,m\in\mathbb{N}$, si trova con la sostituzione $t=x^{2n}$

$$\int_0^\infty \frac{t^{\frac{2m+1}{2n}-1}}{(1+t)}\,dt = 2n\int_0^\infty \frac{x^{2m}}{1+x^{2n}}\,dx = \frac{\pi}{\sin\Big(\frac{2m+1}{2n}\pi\Big)}.$$

La (23.15) è pertanto provata quando $\alpha=(2m+1)/2n$, per qualche $n,m\in\mathbb{N}$. La tesi segue per tutti gli $\alpha\in]0,1[$ essendo i numeri del tipo $(2m+1)/(2n)$ densi in $[0,1]$ e le funzioni a destra e a sinistra della (23.15) funzioni continue.

23.f Esercizi

23.12 Esercizio. Dimostrare il teorema di Schwarz per funzioni $C^2(\Omega)$ utilizzando il teorema di derivazione sotto il segno di integrale. [*Sugg.* Utilizzare il teorema di derivazione sotto il segno di integrale e quindi il teorema fondamentale del calcolo a partire dalla identità

$$f(t,x_0+h)-f(t,x_0) = \int_0^h \frac{\partial f}{\partial x}(t,s)\,dt$$

per $(x_0,y_0)\in\Omega$, e $|t-t_0|, |h|$ sufficientemente piccoli.]

23.13 Esercizio. Mostrare che la *funzione di Airy* $\phi(t) := \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \cos\left(tx + \frac{x^3}{3}\right) dx$ risolve

$$\varphi''(t) - t\varphi(t) = 0.$$

23.14 Esercizio. Costruire una successione $\{f_n\}$ di funzioni reali sommabili non negative su $[0,1]$ tali che

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\, dx = 0 \qquad \text{e} \qquad \limsup_{n\to\infty} f_n(x) = +\infty \quad \forall x \in [0,1].$$

23.15 Esercizio. Sia $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ derivabile. Mostrare che $f' : [0,1] \to \mathbb{R}$ è misurabile.

23.16 Esercizio. Provare che

$$\int_0^1 \frac{x^{1/3}}{1-x} \log\frac{1}{x}\, dx = \sum_{n=0}^\infty \frac{9}{(3n+4)^2},$$

$$\int_0^\infty e^{-x} \cos\sqrt{x}\, dx = \sum_{n=0}^\infty (-1)^n \frac{n!}{(2n)!},$$

$$\int_0^\pi \sum_{n=1}^\infty \frac{n^2 \sin nx}{a^n} = \frac{2a(1+a^2)}{(a^2-1)^2} \qquad \forall a > 1.$$

23.17 Esercizio. Provare che per ogni $p, q > 0$ si ha

$$\int_0^1 \frac{x^{p-1}}{1+x^q} = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{p+nq};$$

dedurre che $\frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

23.18 Esercizio. Provare che per $|a| < 1$

$$\int_0^1 \frac{1-t}{1-at^3}\, dt = \sum_{n=0}^\infty \frac{a^n}{(3n+1)(3n+2)};$$

dedurne che

$$\frac{\pi}{3\sqrt{3}} = \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{(3n+1)(3n+2)}.$$

23.19 Esercizio. Provare che

$$\int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{e^{at}-1}\, dt = \frac{\Gamma(\alpha)}{a^\alpha} \sum_{j=0}^\infty \frac{1}{(n+1)^\alpha}.$$

23.20 Esercizio. Provare che

$$\int_0^1 \frac{\arctan t}{\sqrt{1-t^2}}\, dt = \frac{\pi}{2} \log(1+\sqrt{2}).$$

23.21 Esercizio. Calcolare

$$\lim_{t\to+\infty} \int_{-1}^4 \frac{t^2 + \sqrt{|x|}}{1+t^2x^2}\, dx, \qquad \lim_{t\to 0^+} \int_0^1 \frac{x+\sqrt{tx}}{t+x}\, dx.$$

23.22 Esercizio. Mostrare che per $\alpha > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n x^{\alpha-1}\, dx = \int_0^\infty e^{-x} x^{\alpha-1}\, dx.$$