22. Il calcolo degli integrali, I

Si è visto che il calcolo degli *integrali doppi*, i.e., dell'integrale di funzioni integrabili di due variabili, si riduce al calcolo di due integrali successivi in una variabile e che il calcolo può farsi indifferentemente in due modi diversi tra loro equivalenti. Inoltre se è necessario, è possibile trasformare un integrale in un altro cambiando variabile. Per il calcolo di *integrali tripli*, i.e., di integrali di funzioni di tre variabili, vi sono dodici modi di applicare la formula di riduzione e tutti ugualmente percorribili, almeno a priori, ed, ad ogni passo intermedio, è sempre possibile cambiare variabili. Insomma tutte le strategie di calcolo che utilizzano in varie combinazioni il teorema di Fubini in una delle sue forme e il teorema di cambiamento di variabili, anche le più improbabili, portano al calcolo dell'integrale, se portate a termine.

Lo scopo degli esercizi è quindi quello di imparare a scegliere strategie ottimali per il calcolo degli integrali sulla base delle simmetrie esistenti e del dominio di integrazione e della funzione da integrare.

22.1 Ordine di integrazione. Come si è detto le formule di riduzione implicano l'irrilevanza dell'ordine di integrazione, cfr. il teorema di Tonelli, Teorema 20.3, ma richiedono la sommabilità della funzione in questione.

22.2 Esercizio. L'ipotesi di integrabilità nel teorema di Tonelli non può essere omessa. Mostrare che gli integrali iterati

$$\int_0^1 dy \int_1^\infty (e^{-xy} - 2e^{-2xy})\,dx, \qquad \int_1^\infty dx \int_0^1 (e^{-xy} - 2e^{-2xy})\,dy$$

esistono entrambi come integrali iterati generalizzati e sono diversi.

Ripetiamo che l'integrabilità di f su E è ad esempio garantita se

(i) f misurabile su E e di segno costante, ad esempio se E è misurabile, f è continua quasi ovunque su E e f non negativa,
(ii) f misurabile su E, $|f|$ limitata e $|E| < +\infty$, ad esempio se f è continua su E compatto.

In altri casi è sufficiente la misurabilità di f e l'applicazione della formula di riduzione a $|f|$ o a f_+ e f_- (che sono non negative) per decidere della integrabilità di f.

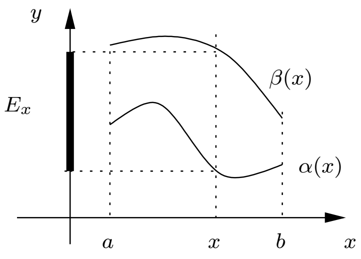

Figura 22.1. Un insieme normale in $\mathbb{R}^2$.

22.a Insiemi normali

22.3 Insiemi normali in $\mathbb{R}^2$. Un insieme $E \subset \mathbb{R}^2$ si dice *normale rispetto all'asse* y se esistono $A \subset \mathbb{R}$ e due funzioni $\alpha, \beta : A \to \mathbb{R}$ con $\alpha(x) < \beta(x)$ tali che

$$E := \{(x, y) \,|\, a < x < b, \alpha(x) < y < b(x)\}$$

cfr. Figura 22.1. Il pregio degli insiemi normali rispetto all'asse y è che la fetta E_x di E sopra x è un intervallo o l'insieme vuoto

$$E_x := \{y \in \mathbb{R} \,|\, \alpha(x) < y < \beta(x)\} = \begin{cases}]\alpha(x), \beta(x)[& \text{se } x \in A, \\ \emptyset & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Se ora $\alpha, \beta : A \to \overline{\mathbb{R}}$ sono funzioni misurabili, si dimostra facilmente che E è misurabile in $\mathbb{R}^2$, e dunque, per ogni funzione $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ integrabile su E, il teorema di Fubini dà

$$\iint_E f(x, y)\, dx\, dy = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{E_x} f(x, y)\, dy \right) dx = \int_A dx \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y)\, dy.$$

22.4 Insiemi normali in $\mathbb{R}^n$. Analogamente in più dimensioni un insieme E si dice *normale* rispetto ad un asse coordinato, diciamo x_n, se esistono funzioni $\alpha, \beta : A \subset \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ tali che $\alpha(x') < \beta(x')$ $\forall x' \in A$ tali che

$$E := \Big\{ x = (x', x_n) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} \,\Big|\, x' \in A,\ \alpha(x') < x_n < \beta(x') \Big\}.$$

La fetta di E sopra $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$ è un intervallo o l'insieme vuoto

$$E_{x'} := \{t \in \mathbb{R} \,|\, \alpha(x') < t < \beta(x')\} = \begin{cases}]\alpha(x'), \beta(x')[& \text{se } x' \in A \\ \emptyset & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Se $\alpha, \beta : A \to \mathbb{R}$ sono misurabili su A (ad esempio continue quasi ovunque su A con A aperto o chiuso), allora E è misurabile in $\mathbb{R}^n$. Se ora f è una funzione integrabile su E, il teorema di Fubini dà

$$\int_E f(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} dx' \left(\int_{E'_x} f(x', t)\, dt \right) = \int_A dx' \int_{\alpha(x')}^{\beta(x')} f(x', t)\, dt.$$

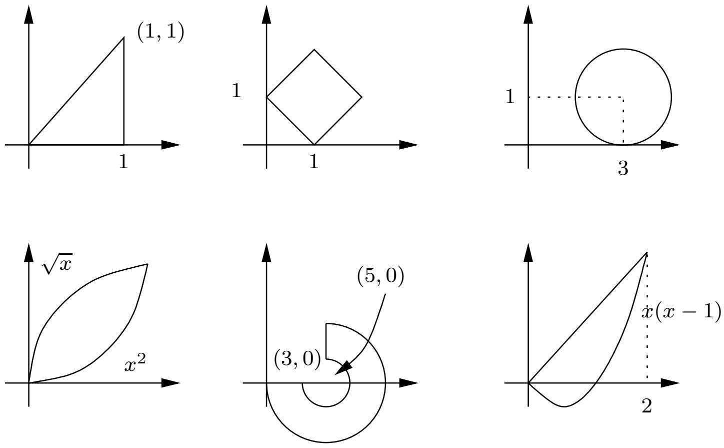

Figura 22.2. Alcuni insiemi normali o unione di insiemi normali in $\mathbb{R}^2$.

22.5 Esercizio. Calcolare $\int_T x^2\,dxdy$ dove T è il triangolo in $\mathbb{R}^2$ di vertici $(0,0)$, $(0,2)$, $(1,0)$.
La funzione da integrare è continua e non negativa e il dominio di integrazione T è compatto, in particolare x^2 è integrabile su $T \subset \mathbb{R}^2$. Si può quindi utilizzare le formule di riduzione. Il dominio T è sia normale rispetto all'asse x che rispetto all'asse y perché

$$T = \{0 \le x \le 1, 0 \le y \le -2x+2\} = \{0 \le y \le 1, 0 \le x \le -y/2+1\}.$$

Poiché la funzione da integrare dipende dalla sola variabile x, sembra conveniente integrare per ultimo nella variabile x. Decidiamo dunque di considerare T normale rispetto a x e quindi di procedere con

$$\iint_T x^2\,dxdy = \int_0^1 dx \int_0^{-2x+2} x^2\,dy = \int_0^1 x^2(-2x+2)dx = \frac{1}{6}.$$

22.6 Esercizio. Calcolare l'integrale della funzione $f(x,y) = x^2$ su ciascuno dei domini $E \subset \mathbb{R}^2$ in Figura 22.2.

22.b Solidi di rotazione

22.7 Solidi di rotazione. Sia $f :]a,b[\subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ una funzione non negativa misurabile (ad esempio continua). Facendo ruotare in $\mathbb{R}^3$ il grafico di $x = f(z)$ attorno all'asse delle z, si ottiene un volume E dato da

$$E := \Big\{(x,y,z)\,\Big|\, x^2+y^2 < f^2(z)\Big\}.$$

La sezione di E con il piano perpendicolare all'asse z per z è

$$E_z := \begin{cases} \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2+y^2 < f^2(z)\} & \text{se } a < z < b, \\ \emptyset & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

i.e., E_z è un cerchio del piano (x,y) di raggio $f(z)$ se $z \in]a,b[$ e l'insieme vuoto altrimenti.

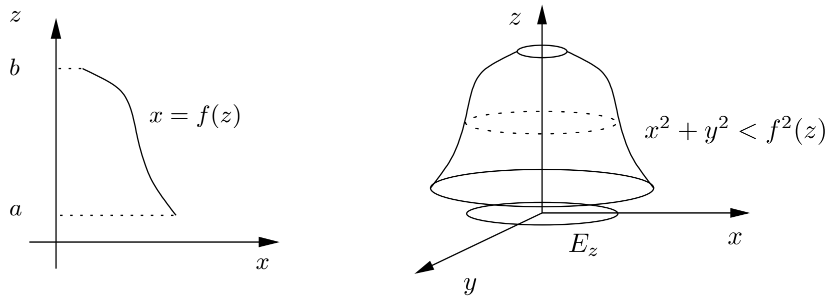

Figura 22.3. Solido di rotazione ed E_z.

Se $f\,:]a,b[\to\overline{\mathbb{R}}_+$ è una funzione misurabile, la funzione $x^2+y^2-f^2(z)$ è misurabile in $\mathbb{R}^3$, e quindi E è un insieme misurabile in $\mathbb{R}^3$. Quindi, per ogni g integrabile su E, il teorema di Fubini dà

$$\int_E g(x,y,z)\,dxdydz = \int_a^b dz \iint_{E_z} g(x,y,z)\,dx\,dy. \tag{22.1}$$

Se ad esempio $g=1$ si ottiene

$$\mathcal{L}^3(E) = \int_E 1\,dxdydz = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{L}^2(E_z)\,dz = \int_a^b \pi f^2(z)\,dz = \pi\int_a^b f^2(z)\,dz.$$

La (22.1) è conveniente in particolare quando g è funzione solo di z, $g(x,y,z) := g(z)$, perché

$$\int_E g(z)\,dxdydz = \int_a^b g(z)\iint_{E_z} 1\,dxdy = \int_a^b g(z)\mathcal{L}^2(E_z)\,dz = \pi\int_a^b g(z)f^2(z)\,dz.$$

22.c Cambiamenti di coordinate

22.8 Coordinate polari in $\mathbb{R}^2$. L'applicazione $\varphi(\rho,\theta) := (\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)$ è $C^1(\mathbb{R}^2)$ è iniettiva su $A :=]0,+\infty[\times]0,2\pi[$ con $|\det\mathbf{D}\varphi(\rho,\theta)| = \rho$. Dunque per ogni $E\subset[0,+\infty]\times[0,2\pi]$ misurabile e per ogni f integrabile su $\varphi(E)$,

$$\int_{\varphi(E)} f(x,y)\,dx\,dy = \int_E f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho\,d\rho\,d\theta.$$

Essendo la mappa delle coordinate polari iniettiva su ogni intervallo $]0,+\infty[\times]a,a+2\pi[$, si ha la stessa conclusione per ogni misurabile $E\subset[0,\infty[\times[a,a+2\pi]$.

22.9 Coordinate polari in $\mathbb{R}^3$. L'applicazione $\phi:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ data da

$$\phi(\rho,\theta,\varphi) := \begin{cases} x = \rho\sin\varphi\cos\theta, \\ y = \rho\sin\varphi\sin\theta, \\ z = \rho\cos\varphi \end{cases}$$

è $C^1(\mathbb{R}^3)$ e iniettiva su $A\ :=]0,+\infty[\times]0,2\pi[\times]0,\pi[$ con $|\det \mathbf{D}\phi(\rho,\theta,\varphi)| = \rho^2\sin\theta$. Dunque per ogni $E\subset[0+\infty]\times[0,2\pi]\times[0,\pi]$ misurabile e per ogni f integrabile su $\varphi(E)$ si ha

$$\int_{\varphi(E)} f(x,y)\,dx\,dy\,dz = \int_E f(\rho\sin\theta\cos\varphi,\rho\sin\theta\sin\varphi,\rho\cos\theta)\rho^2\sin\varphi\,d\rho\,d\theta\,d\varphi.$$

22.10 Coordinate cilindriche in $\mathbb{R}^3$. L'applicazione $\phi:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ data da

$$\begin{cases} x=\rho\cos\theta,\\ y=\rho\sin\theta,\\ z=z\end{cases}$$

è $C^1(\mathbb{R}^3)$ e iniettiva su $A\ :=]0,+\infty[\times]a,a+2\pi[\times\mathbb{R}$ con $|\det \mathbf{D}\phi(\rho,\theta,z)| = \rho$. Dunque per ogni $E\subset[0+\infty]\times[0,2\pi]\times\mathbb{R}$ misurabile e ogni f integrabile su $\varphi(E)$ si ha

$$\int_{\varphi(E)} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_E f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta,z)\rho\,d\rho\,d\theta\,dz.$$

22.11 Esercizio. Calcolare $\iint_E\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy$ essendo $E\subset\mathbb{R}^2$ il cerchio di centro $(1,0)$ e raggio 1. E è compatto e quindi $\sqrt{x^2+y^2}$ è sommabile su E. Si possono perciò usare liberamente i teoremi di cambiamento di variabili e il teorema di Fubini.

Il cerchio E ha equazione $(x-1)^2+y^2\le 1$ i.e., $x^2+y^2-2x\le 0$. Se lo si scrive in coordinate polari, si ottiene

$$\rho\ge 0,\quad \theta\in[-\pi,\pi],\quad \rho^2-2\rho\cos\theta\le 0,$$

e dunque

$$\rho\ge 0,\quad \theta\in[-\pi/2,\pi/2],\quad \rho\le 2\cos\theta.$$

Se φ è la mappa delle coordinate polari e

$$F:=\Big\{(\rho,\theta)\,|\,-\pi/2\le\theta\le\pi/2, 0\le\rho\le 2\cos\theta\Big\},$$

F è contenuto in una striscia di periodicità di φ e $E=\varphi(F)$. Perciò cambiando variabili e tenendo conto che F è normale rispetto a ρ,

$$\iint_E\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy = \iint_F \rho^2\,d\rho\,d\theta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}d\theta\int_0^{2\cos\theta}\rho^2\,d\rho = \frac{8}{3}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^3\theta\,d\theta = \frac{32}{9}.$$

22.12 Esercizio (Solidi di rotazione). Trovare una formula per il volume dei solidi di rotazione in $\mathbb{R}^3$.

Soluzione. Sia $f:[a,b]\to\mathbb{R}_+$ misurabile e sia E l'insieme ottenuto facendo ruotare il sottografico di $y=f(z)$ del piano (y,z) attorno all'asse z,

$$E:=\Big\{(x,y,z)\,\Big|\,a\le z\le b,\ x^2+y^2\le f^2(z)\Big\}.$$

Si può parametrizzare E con le coordinate cilindriche

$$\phi(r,\theta,z):=\begin{cases} x=\rho\cos\theta,\\ y=\rho\sin\theta,\\ z=z\end{cases}$$

come immagine uno a uno dell'insieme

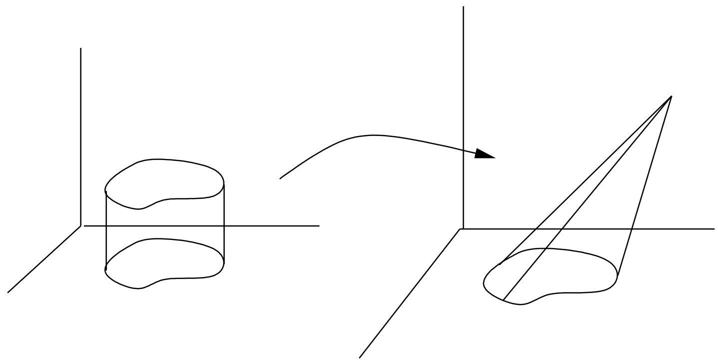

Figura 22.4. Coordinate coniche.

$$F := \Big\{(\rho,\theta,z)\,\Big|\,0 \le \theta < 2\pi,\ a \le z \le b,\ 0 \le \rho \le f(z)\Big\}$$

e quindi cambiando variabili

$$\mathcal{L}^3(E) = \int_F |\det \mathbf{D}\phi|\,d\rho d\theta dz == \int_a^b dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{f(z)} \rho\,d\rho = \pi \int_a^b f^2(z)\,dz.$$

22.13 Esercizio (Formula di Guldino). Ritrovare la formula di Guldino.
Soluzione. Siano $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}_+$ misurabili con $g \le f$. L'insieme

$$E := \Big\{(x,y,x)\,\Big|\,z \in [a.b],\ g(z) \le \sqrt{x^2+y^2} \le f(z)\Big\},$$

ottenuto facendo ruotare

$$A := \Big\{(x,y,z)\,\Big|\,x = 0,\ z \in [a,b],\ f(z) \le y \le g(z)\Big\}$$

attorno all'asse z, ha volume

$$\mathcal{L}^3(E) = \pi \int_a^b (g^2(z) - f^2(z))\,dz.$$

Il *baricentro di* A rispetto all'asse di rotazione z è il punto $(\overline{y}, \overline{z})$ definito da

$$\overline{y} := \frac{1}{\mathcal{L}^2(A)} \int_A y\,dydz, \qquad \overline{z} := \frac{1}{\mathcal{L}^2(A)} \int_A z\,dydz.$$

Si ha allora la *formula di Guldino* per il calcolo dei volumi dei solidi di rotazione: *il volume del solido di rotazione* E *è pari al prodotto dell'area della sua sezione* A *per la lunghezza del cerchio di rivoluzione del baricentro della sezione*:

$$\mathcal{L}^3(E) = \mathcal{L}^2(A)\,2\pi\,\overline{y}.$$

Infatti

$$2\pi\overline{y}\mathcal{L}^2(A) = 2\pi \int_A y\,dydz = \int_a^b dz \int_{f(z)}^{g(z)} ydy = \pi \int_a^b (g^2(z) - f^2(z))\,dz = \mathcal{L}^3(E).$$

22.14 Coordinate coniche in $\mathbb{R}^3$. Sia A un aperto in $\mathbb{R}^2 = \{(x,y,z)\,|\,z = 0\} \subset \mathbb{R}^3$ e $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$. Un punto è per definizione nel cono $C(A)$ di vertice P_0 e base A se esiste $(\alpha, \beta, 0) \in A$ e $t \in [0,1]$ tale che

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (1-t)\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}.$$

La funzione $\phi(\alpha, \beta, t) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ data da

$$\begin{cases} x = (1-t)\alpha + t\,x_0, \\ y = (1-t)\beta + t\,y_0, \\ z = t\,z_0 \end{cases}$$

è una mappa di classe $C^1(\mathbb{R}^3)$ bigettiva da $A \times [0,1[$ su $C(A) \setminus \{P_0\}$ con

$$|\det \mathbf{D}\varphi(\alpha, \beta, t)| = (1-t)^2.$$

Perciò

$$\begin{aligned} \int_{C(A)} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz &= \int_{A\times[0,1]} f(\phi(\alpha,\beta,t))(1-t)^2\,d\alpha\,d\beta\,dt \\ &= \int_0^1 (1-t^2)\Big(\int_A f(\phi(\alpha,\beta,t))\,d\alpha\,d\beta\Big)\,dt. \end{aligned}$$

22.15 Esercizio. Si voglia calcolare la misura di

$$E := \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\Big|\, 0 < x < y < 2x,\ 1 < xy < 2\Big\}.$$

Posto $u = xy$, e $v = y/x$ si ha

$$E = \varphi(F)$$

dove $\varphi(u,v) := (\sqrt{u/v}, \sqrt{uv})$ e

$$F := \Big\{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \,\Big|\, 1 < u < 2,\ 1 < v < 2\Big\}.$$

Essendo $\det \mathbf{D}\varphi = \frac{1}{2v} > 0$ su F, troviamo

$$|E| = |\varphi(F)| = \int_F \frac{1}{2v}\,du\,dv = \frac{1}{2}\int_1^2 du \int_1^2 \frac{dv}{v} = \frac{1}{2}\log 2.$$

22.d Tetraedri

22.16 Esercizio (Tetraedri, I). Si consideri il tetraedro $T \subset \mathbb{R}^3$ di vertici $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,2,2)$, cfr. Figura 22.5. Si calcoli

$$\int_T \frac{z}{1+z}\,dz.$$

Una faccia del tetraedro è sul piano $z = 0$. Se si affetta un tetraedro con piani paralleli ad una base si ottengono sezioni congruenti con la base. Perciò sembra essere conveniente affettare con piani perpendicolari all'asse z. Inoltre la funzione da integrare dipende solo su z. Decidiamo quindi di affettare il tetraedro con piani perpendicolari all'asse z.

Se T_z è la fetta a livello z perpendicolare all'asse delle z, $T_z \neq \emptyset$ se e solo se $0 \leq z \leq 2$ e vuota altrimenti. Essendo T misurabile, e $z/(1+z)$ continua in $\overline{T}$, dal teorema di Fubini segue

$$\int_T \frac{z}{1+z}\,dz = \int_0^2 \frac{z}{1+z}\mathcal{L}^2(T_z)\,dz.$$

Calcoliamo ora l'area di T_z. Dal teorema di Talete $\mathcal{L}^2(T_z) = \mathcal{L}^2(T_0)(\frac{2-z}{2})^2$ e quindi

$$\int_T \frac{z}{1+z}\,dz = \frac{1}{8}\int_0^2 \frac{z(2-z)^2}{1+z}\,dz = \dots$$

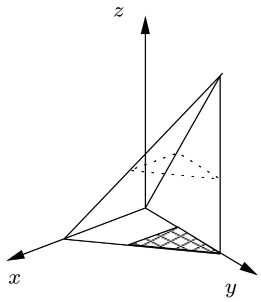

Figura 22.5.

22.17 Esercizio (Tetraedri, II). Si consideri il tetraedro $T \subset \mathbb{R}^3$ di vertici $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,2,2)$, cfr. Figura 22.5. Si calcoli

$$\int_T \frac{xz}{1+z}\,dz.$$

La funzione integranda è continua e T è compatto. Dunque la funzione integranda è integrabile su T.

Una faccia del tetraedro è sul piano $z = 0$. Se si affetta con piani perpendicolari all'asse z, si ottengono sezioni congruenti con la base. Inoltre gran parte della funzione integranda dipende da z. Sembra quindi conveniente integrare per ultimo nella variabile z. Procedendo in questo modo e indicata con T_z la fetta del tetraedro ad altezza z, il teorema di Fubini dà

$$\int_T \frac{xz}{1+z}\,dz = \int_0^2 \frac{z}{1+z} \iint_{T_z} x\,dxdy.$$

Resta ora da calcolare per z fissato l'integrale doppio $\iint_{T_z} x\,dxdy$. Il dominio di integrazione T_z è un triangolo in $\mathbb{R}^2$, essendo congruente con la base del tetraedro. Basterà allora calcolare le coordinate dei vertici. Siano dunque $P(z)$, $Q(z)$, $R(z)$ rispettivamente i vertici di T_z proiezioni sul piano di base delle intersezioni del piano perpendicolare all'asse delle z per z rispettivamente con le rette per $(0,2,2)$ e $(0,0,0)$, per $(0,2,2)$ e $(1,0,0)$ e per $(0,2,2)$ e $(0,1,0)$. Per il teorema di Talete le coordinate $x(z)$, $y(z)$, di $P(z)$ dipendono linearmente da z, i.e.,

$$\begin{cases} x(z) = mz + q, \\ x(0) = 0, x(2) = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} y(z) = mz + q, \\ y(0) = 0, y(2) = 2, \end{cases}$$

da cui $P(z) = (0, z)$. Analogamente si calcolano $Q(z) = (1 - z/2, z)$ e $R(z) = (0, 1 + z/2)$. Come si vede i punti $P(z)$ e $R(z)$ hanno la stessa ascissa. Il triangolo T_z è allora normale rispetto all'asse x. Se si calcolano le rette per $P(z)$ e $Q(z)$ e $R(z)$ e $Q(z)$ si trova rispettivamente

$$\alpha_z(x) = z, \qquad \beta_z(x) = -(x + z/2 - 1) + z = 1 + z/2 - x$$

e quindi

$$T_z := \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\Big|\, 0 \le x \le 1 - z/2,\ \alpha_z(x) \le y \le \beta_z(x)\Big\}$$
$$\int_{T_z} xdxdy = \int_o^{1-z/2} x\,dx \int_{\alpha_z(x)}^{\beta_z(x)} dy = \int_0^{1-z/2} x(1 - z/2 - x)\,dx = \frac{1}{6}\Big(1 - \frac{z}{2}\Big)^3.$$

In definitiva

$$\int_T \frac{z}{1+z}\,dx\,dy\,dz = \frac{1}{6}\int_0^2 \frac{z(1-z/2)^3}{1+z}\,dz = \dots$$

Un altro modo di procedere è il seguente.Guardiamo il tetraedro come un cono su una faccia e lasciamo alla formula di cambiamento di variabili i dettagli. La mappa $\varphi(t,a,b) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ data da

$$\begin{cases} x = ta + (1-t)\,0, \\ y = tb + (1-t)\,2, \\ z = t \cdot 0 + (1-t)\,2 \end{cases}$$

mappa il prisma $T_0 \times [0,1]$ sul tetraedro di base T_0 individuata dai vertici $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ e vertice $(0,2,2)$. φ è bigettiva da $T_0 \times]0,1]$ su $T \setminus \{(0,2,2)\}$ con $\det \mathbf{D}\varphi(t,a,b) = -2t^2$. Perciò dalla formula di cambiamento di variabili,

$$\begin{aligned} \int_T \frac{xz}{1+z}\,dx\,dy\,dz &= \int_{T_0 \times [0,1]} \frac{2ta(1-t)}{1+2(1-t)} 2t^2\,da\,db\,dt = \int_0^1 \frac{4t^3(1-t)}{3-2t} \iint_{T_0} a\,da\,db \\ &= \int_0^1 \frac{4t^3(1-t)}{3-2t} \int_0^1 a\Big(\int_0^{1-a} db\Big)\,da = \frac{2}{3}\int_0^1 \frac{t^3(1-t)}{3-2t}\,dt = \dots \end{aligned}$$

22.e Esercizi

22.18 Esercizio. Sia $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 < y < 1\}$, e $C(A)$ il cono di base A e vertice $(0,0,1)$. Calcolare il volume di $C \setminus B((0,0,1), 1/2)$.

22.19 Esercizio. Calcolare $\int_D \frac{e^{-xy}}{y}\,dxdy$ dove $D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x \geq 0,\ x^2 \leq y, 0 \leq y \leq 2\}$.

22.20 Esercizio. Sia $\mathbf{A}$ una matrice $n \times n$ simmetrica definita positiva. Allora

$$\int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(-\,\mathbf{A}x \bullet x\,\right) dx = \sqrt{\frac{\pi^n}{\det \mathbf{A}}}.$$