

M. Giaquinta, G. Modica

Funzioni olomorfe

Note 2004–2005

Versione preliminare

Mariano Giaquinta
Scuola Normale Superiore
Piazza dei Cavalieri, 7
I-56100 Pisa

`giaquinta@sns.it`

Giuseppe Modica
Dipartimento di Matematica
Applicata, Università di Firenze
Via S. Marta, 3
I-50139 Firenze

`modica@dma.unifi.it`

Indice

1. Funzioni da \mathbb{C} in \mathbb{C}	1
1.a Numeri complessi.....	1
1.b Derivata complessa.....	1
1.c Equazioni di Cauchy–Riemann.....	2
1.d Primi esempi.....	5
2. Il teorema fondamentale del calcolo in \mathbb{C}	7
2.a Integrale di linea.....	7
2.b Primitive olomorfe e integrali di linea.....	8
3. Richiami sulle serie di Taylor e sui numeri e e π	11
3.a Il numero π	13
3.b Il numero e	15
4. Serie di potenze, I	17
4.a Spazi normati.....	17
4.b Serie in spazi normati.....	18
4.c Serie di potenze.....	19
4.d Cerchio e dominio di convergenza.....	21
5. Serie di potenze, II	23
5.a Serie di Taylor come serie di potenze.....	23
5.b Funzione esponenziale.....	24
5.c Seno e coseno, seno e coseno iperbolico.....	25
5.d Tangente e cotangente, tangente e cotangente iperboliche.....	26
5.e Funzione logaritmo principale.....	27
5.f Funzione potenza.....	27
5.g Ulteriori esempi.....	28
6. Serie di potenze, III	33
6.a Continuità della somma.....	33
6.b Convergenza uniforme.....	33
6.c Continuità del limite uniforme.....	34
6.d Convergenza uniforme delle serie di potenze.....	35
6.e Derivazione e integrazione di serie di potenze.....	36
6.f Prodotti di serie.....	37
6.g Serie di prodotti.....	40

7. I teoremi fondamentali sulle funzioni olomorfe	43
7.a Domini regolari	43
7.b Teorema di Goursat	45
7.c Formula di Cauchy	46
7.d Formula di Cauchy e serie di potenze	47
7.e Punti singolari e raggio di convergenza	49
8. Qualche conseguenza	51
8.a Teorema di Liouville	51
8.b Principio di identità	52
8.c Principio di massimo	52
8.d Invertibilità di funzioni olomorfe	53
9. Funzioni olomorfe e campi irrotazionali	55
9.a Potenziali e primitive olomorfe	55
9.b Funzioni olomorfe e forme chiuse	56
9.c Indice di allacciamento	56
10. Singolarità puntuali	59
10.a Singolarità eliminabili	59
10.b Poli	60
10.c Singolarità essenziali	61
10.d Singolarità all'infinito	61
10.e Sviluppi di Laurent	62
10.f Teorema dei residui	64
10.g Calcolo dei residui	65
11. Calcolo di integrali con il metodo dei residui	67
11.a Integrali trigonometrici	67
11.b Integrali impropri	69
11.c Integrali di tipo Fourier	70
11.d Somme di Gauss	73
11.e Somme di serie numeriche	73
12. Equazioni alle differenze lineari	77
12.a Equazioni del primo ordine	77
12.b Equazioni del secondo ordine omogenee	78
12.c Equazioni del secondo ordine non omogenee	79
12.d Sistemi di equazioni alle differenze	80
12.e Potenze di una matrice	81
13. La \mathcal{Z}-trasformata	85
13.a \mathcal{Z} -trasformata	85
13.b \mathcal{Z} -antitrasformata	89
13.c Equazioni alle differenze e \mathcal{Z} -trasformata	89
13.d Sistemi di equazioni alle differenze e \mathcal{Z} -trasformata ..	91
14. Indice analitico	95

1. Funzioni da \mathbb{C} in \mathbb{C}

1.a Numeri complessi

Ricordiamo che, se si associa ad ogni $z = a + ib \in \mathbb{C}$ il punto $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, si ottiene una identificazione tra l'insieme dei numeri complessi \mathbb{C} e \mathbb{R}^2 , che rispetta le strutture di spazio vettoriale in \mathbb{C} e \mathbb{R}^2 . La struttura di prodotto di numeri complessi dà inoltre un modo semplice di descrivere le rotazioni orientate del piano della geometria. Infatti, se $z = a + ib, w = c + id$ sono due numeri complessi, si ha

$$z\bar{w} = (a + ib)(c - id) = (ac + bd) + i(bc - ad) = (z|w)_{\mathbb{R}^2} + i \det(w, z) \quad (1.1)$$

e dunque, se θ è l'angolo formato dai vettori $z = (a, b)$ e $w = (c, d)$, misurato da w a z , allora

$$w\bar{z} = |z||w|(\cos \theta + i \sin \theta).$$

In particolare si ritrova che iz , la moltiplicazione di $z = a + ib$ per i , corrisponde al vettore ottenuto ruotando di $\pi/2$ in senso antiorario il vettore z : infatti $iz\bar{z} = i|z|^2 = |z|^2(0 + i1)$.

1.b Derivata complessa

In analogia con la derivata delle funzioni di una variabile reale si pone

1.1 Definizione. Siano $f : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, Ω aperto, e $z_0 \in \Omega$. Si dice che f è derivabile in senso complesso in z_0 se esiste finito (in \mathbb{C})

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}.$$

$f'(z_0)$ è detta la derivata complessa di f in z_0 . Se f ha derivata complessa in ogni punto di Ω , si dice che f è olomorfa in Ω . La classe delle funzioni olomorfe su Ω si denota con $\mathcal{H}(\Omega)$.

1.2 Esercizio. Mostrare che, come nel caso delle funzioni di una variabile reale:

- (i) Se f ha derivata complessa in z_0 , allora f è continua in z_0 .
- (ii) Se f, g hanno derivata complessa in z_0 , allora $f + g, fg$ hanno derivata complessa in z_0 e

$$(f + g)'(z_0) = f'(z_0) + g'(z_0), \quad (fg)'(z_0) = f'(z_0)g(z_0) + f(z_0)g'(z_0).$$

- (iii) Se f, g hanno derivata complessa e $g(z_0) \neq 0$, allora f/g ha derivata complessa in z_0 e

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(z_0) = \frac{f'(z_0)g(z_0) - g'(z_0)f(z_0)}{g^2(z_0)}.$$

- (iv) Siano $\Omega \subset \mathbb{C}$ aperto, $z_0 \in \Omega$, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, A un aperto in \mathbb{C} con $f(z_0) \in A$ e $g : A \rightarrow \mathbb{C}$. Se f ha derivata complessa in z_0 e g ha derivata complessa in $f(z_0)$, allora $g \circ f$ ha derivata complessa in z_0 e $(g \circ f)'(z_0) = g'(f(z_0))f'(z_0)$.

1.3 Esercizio. Se F ha derivata complessa in Ω , e $\gamma : [0, 1] \rightarrow \Omega$ è di classe C^1 , allora $t \rightarrow F(\gamma(t))$ è derivabile in $[0, 1]$ e

$$\frac{d}{dt}F(\gamma(t)) = F'(\gamma(t))\gamma'(t) \quad \forall t \in [0, 1].$$

1.4 Esercizio. Siano $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, $g \in \mathcal{H}(\Delta)$ con Ω, Δ aperti e $f = g$ in $\Omega \cap \Delta$. Provare che la funzione

$$F(z) := \begin{cases} f(z) & \text{se } z \in \Omega, \\ g(z) & \text{se } z \in \Delta \end{cases}$$

è olomorfa in $\Omega \cup \Delta$.

1.5 Esercizio. Mostrare che

- (i) $Dz^n = nz^{n-1}$.
- (ii) I polinomi in $z \in \mathbb{C}$ sono funzioni olomorfe su \mathbb{C} .
- (iii) La funzione $R(z) := P(z)/Q(z)$ quoziente di due polinomi P e Q è olomorfa in $\Omega := \{z \in \mathbb{C} \mid Q(z) \neq 0\}$.

1.c Equazioni di Cauchy–Riemann

Cominciamo con qualche notazione. Sia f una funzione differenziabile a valori complessi, $f(z) = f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$ se $z := x + iy$. Indichiamo rispettivamente con f_x e f_y la prima e la seconda colonna della matrice jacobiana di $f(x, y)$:

$$\mathbf{D}f(z) = [f_x | f_y] = \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix}.$$

Ora, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, $\Omega \subset \mathbb{C}$ aperto, ha derivata complessa in $z_0 := x_0 + iy_0$ se e solo se

$$f(z_0 + w) = f(z_0) + f'(z_0)w + o(|w|) \quad \text{per } w \rightarrow 0. \quad (1.2)$$

D'altra parte $f = u + iv$ è differenziabile (in senso reale) in (x_0, y_0) se

$$\begin{cases} u(x_0 + x, y_0 + y) = u(x_0, y_0) + u_x(x_0, y_0)x + u_y(x_0, y_0)y + o(|w|), \\ v(x_0 + x, y_0 + y) = v(x_0, y_0) + v_x(x_0, y_0)x + v_y(x_0, y_0)y + o(|w|) \end{cases}$$

per $w = x + iy \rightarrow 0$. Possiamo riscrivere le ultime due equazioni, moltiplicando la seconda relazione per i e sommandola alla prima, come

$$f(z_0 + w) = f(z_0) + f_x(z_0)x + f_y(z_0)y + o(|w|) \quad \text{per } w \rightarrow 0. \quad (1.3)$$

Confrontando le (1.2) (1.3) si ottiene subito



Figura 1.1. Augustin-Louis Cauchy (1789–1857), G. F. Bernhard Riemann (1826–1866) e Karl Weierstrass (1815–1897).

1.6 Proposizione. $f : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ha derivata complessa in $z_0 \in \Omega$ se e solo se f è differenziabile (in senso reale) in z_0 e per qualche $\lambda \in \mathbb{C}$

$$\frac{\partial f}{\partial w}(z_0) = \mathbf{D}f(z_0)(w) = \lambda w^1. \quad (1.4)$$

In questo caso $\lambda = f'(z_0)$.

La condizione (1.4) afferma che il differenziale (reale) di una funzione f con derivata complessa in z_0 esiste ed agisce sui vettori di \mathbb{R}^2 come una moltiplicazione complessa

$$w \longrightarrow \frac{\partial f}{\partial w}(z_0) = df(z_0)(w) = \lambda w$$

È una condizione particolarmente stringente. Infatti due vettori $w_1, w_2 \in \mathbb{C}$ vengono mappati dal differenziale nei vettori $\lambda w_1, \lambda w_2$, i.e. in vettori ruotati dello stesso angolo e amplificati allo stesso modo di $|\lambda|$. In particolare vettori w_1 e w_2 perpendicolari e di lunghezza uguale hanno immagini λw_1 e λw_2 perpendicolari e di lunghezza uguale. Se poi $w_2 = iw_1$, i.e., w_2 è il ruotato di w_1 di $\pi/2$ in senso antiorario, allora banalmente $\lambda w_2 = i \lambda w_1$, i.e., l'immagine di w_2 è il ruotato di $\pi/2$ in senso antiorario dell'immagine di w_1 .

Se f è differenziabile in z_0 , la (1.4) è equivalente a

$$f_y(z_0) = if_x(z_0). \quad (1.5)$$

e quindi $f'(z_0) = f_x(z_0) = f_z(z_0)$. A parole la (1.4) esprime il fatto che il vettore f_y si ottiene ruotando di $\pi/2$ in senso antiorario il vettore f_x . La (1.4) si riscrive come sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0), \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) \end{cases} \quad (1.6)$$

nelle componenti di f , $f =: u + iv$. Infine la (1.5) è anche equivalente alle condizioni

$$\begin{cases} |f_x(z_0)| = |f_y(z_0)|, \\ (f_x(z_0)|f_y(z_0)) = 0, \\ \det \mathbf{D}f(z_0) \geq 0. \end{cases} \quad (1.7)$$

Pertanto

¹ È sottintesa l'identificazione fra \mathbb{R}^2 e \mathbb{C} . Più precisamente $w = (w_1, w_2)^T = w_1 + iw_2$ e se $\mathbf{D}f(z_0)(w) = (u_1, u_2)^T = u_1 + iu_2$.

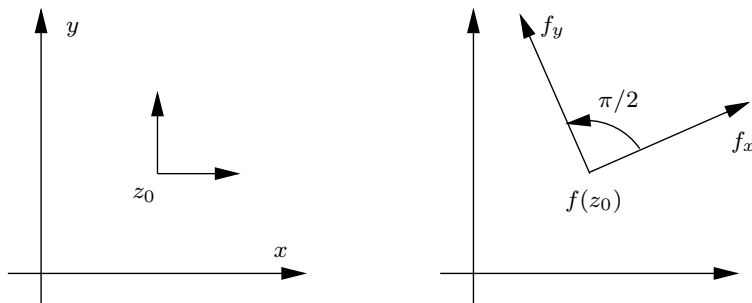


Figura 1.2. Una trasformazione \mathbb{C} -lineare.

1.7 Proposizione. Sia Ω aperto. $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ se e solo se f è differenziabile (in senso reale) in Ω e una delle condizioni seguenti è verificata

- (i) $f_y(z) = if_x(z) \forall z \in \Omega$,
- (ii) $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z) := \frac{1}{2}(f_x(z) + if_y(z)) = 0 \forall z \in \Omega$,
- (iii) $f := u + iv$ soddisfa le equazioni di Cauchy–Riemann

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x, y), \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x, y) \end{cases} \quad \forall z = x + iy \in \Omega,$$

- (iv) f verifica le condizioni di conformalità

$$\begin{cases} |f_x(z)| = |f_y(z)|, \\ (f_x(z)|f_y(z)) = 0, \end{cases}$$

e $\det \mathbf{D}f(z) \geq 0 \forall z \in \Omega$.

In questo caso $f'(z) = \frac{\partial f}{\partial z}(z) = \frac{\partial f}{\partial x}(z) \forall z \in \Omega$.

1.8 Osservazione. Si osservi che le funzioni olomorfe su Ω non sono a priori di classe $C^1(\Omega)$. Proveremo più avanti che sono in effetti di classe $C^\infty(\Omega)$, cfr. Capitolo 7. Tuttavia il calcolo per funzioni di più variabili (teorema di invertibilità locale, formule di Green, ecc.) non è al momento utilizzabile.

1.9 Esercizio. Se $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ è differenziabile in senso complesso allora

$$|f'(z_0)|^2 = \det \mathbf{D}f(z_0).$$

1.10 Esercizio. Sia $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ essendo Ω un aperto connesso. Se $f'(z) = 0 \forall z \in \Omega$, allora f è costante.

1.11 Esercizio. Sia $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Allora f è costante in Ω se e solo se vale una delle seguenti proprietà

- (i) $\Re f(z)$ è costante in Ω ,
- (ii) $\Im f(z)$ è costante in Ω ,
- (iii) $|f(z)|$ è costante in Ω .

1.d Primi esempi

1.12 Esercizio La funzione $z \rightarrow z^2$. È una funzione olomorfa da \mathbb{C} in \mathbb{C} con $D(z^2) = 2z$. In coordinate reali

$$z^2 = (x^2 - y^2) + i2xy \quad \text{se } z = x + iy,$$

e in coordinate polari,

$$z^2 = r^2 e^{2i\theta} \quad \text{se } z = r e^{i\theta}.$$

Si vede subito che la trasformazione $z \rightarrow z^2$

- (i) manda rette per l'origine in semirette per l'origine.
- (ii) manda cerchi con centro l'origine in cerchi di centro l'origine,
- (iii) manda le iperboli $x^2 - y^2 = k$ in rette verticali,
- (iv) manda le iperboli $2xy = k$ in rette orizzontali.

1.13 Esercizio. Descrivere le funzioni

$$\frac{1}{z}, \quad \frac{az + b}{cz + d}, \quad z + \frac{1}{z},$$

studiando in particolare le immagini di rette e curve come cerchi, parabole, ed, in generale, coniche.

2. Il teorema fondamentale del calcolo in \mathbb{C}

2.a Integrale di linea

Sia $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, $\Omega \subset \mathbb{C}$ aperto, una funzione continua e sia $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega \subset \mathbb{C}$ una curva C^1 in Ω . L'integrale di $f(z) dz$ lungo la curva γ è definito da

$$\begin{aligned}\int_{\gamma} f(z) dz &:= \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t) dt \\ &= \int_a^b \Re\left(f(\gamma(t))\gamma'(t)\right) dt + i \int_a^b \Im\left(f(\gamma(t))\gamma'(t)\right) dt.\end{aligned}$$

L'integrale di $f(z) dz$ lungo una linea γ è dunque la versione complessa dell'integrale di una 1-forma differenziale (o di un campo) lungo γ .

2.1 Esercizio. Se $\gamma(t) = x_0 + t(x - x_0)$, $t \in [0, 1]$ parametrizza il segmento di estremi x_0 e $x \in \mathbb{R}$ muovendo da x_0 a x , allora

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{x_0}^x f(s) ds.$$

è l'usuale integrale orientato su $[x_0, x]$.

Ricordiamo rapidamente alcune proprietà dell'integrale di linea. Se $\gamma : [0, 1] \rightarrow \Omega$ e $\delta : [a, b] \rightarrow \Omega$ sono due curve semplici di classe C^1 con la stessa immagine γ e con lo stesso verso, $\gamma(0) = \delta(a)$, $\gamma(1) = \delta(b)$, allora γ e δ sono ciascuna una riparametrizzazione crescente dell'altra, $\delta = \gamma \circ h$ essendo $h : [a, b] \rightarrow [0, 1]$ di classe C^1 con $h' \geq 0$. Usando la formula di cambiamento di variabili per integrali unodimensionali segue quindi che

$$\int_{\delta} f(z) dz = \int_{\gamma} f(z) dz \quad \text{se } h' \geq 0$$

Analogamente, se si percorre la stessa traiettoria con verso opposto, i.e., se δ ha la stessa immagine di γ ma $\delta(a) = \gamma(1)$ e $\delta(b) = \gamma(0)$, allora

$$\int_{\delta} f(z) dz = - \int_{\gamma} f(z) dz.$$

L'integrale di linea dipende dunque da f , dalla traiettoria della curva e dal verso di percorrenza della stessa.

Ricordiamo infine le seguenti due stime, di cui si farà ampio uso nel seguito, stime che seguono direttamente dalla definizione,

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq \int_{\gamma} |f(z)| ds \leq \|f\|_{\infty, \Gamma} L(\gamma)$$

dove ds l'elemento d'arco, $L(\gamma)$ la lunghezza della curva γ e

$$\|f\|_{\infty, \Gamma} := \sup_{z \in \Gamma} |f(z)|.$$

2.b Primitive olomorfe e integrali di linea

2.2 Definizione. Siano Ω un aperto e $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$. Si dice che $F \in \mathcal{H}(\Omega)$ è una primitiva olomorfa di f in Ω se $F'(z) = f(z) \forall z \in \Omega$.

Diamo ora condizioni necessarie e sufficienti affinché, date $f \in C^0(\Omega)$ e $F \in \mathcal{H}(\Omega)$, si abbia $F'(z) = f(z)$ in Ω .

Siano $z_0 = x_0 + iy_0$, $z = x + iy$ due punti di \mathbb{C} . Indichiamo con $\delta_{z_0, z}(t)$ la spezzata che congiunge linearmente z_0 con $x + iy_0$ e quindi $x + iy_0$ con $w = x + iy$ e osserviamo che, se Ω è un cerchio o un rettangolo, allora per ogni coppia di punti $z, w \in \Omega$, la curva $\delta_{z, w}(t)$ è tutta in Ω mentre in generale $\delta_{z, w} \subset \Omega$ solo se z e w sono sufficientemente vicini.

2.3 Teorema (fondamentale del calcolo). Sia $f \in C^0(\Omega)$ e $F \in \mathcal{H}(\Omega)$. Sono fatti equivalenti

- (i) $F'(z) = f(z) \forall z \in \Omega$.
- (ii) Per ogni $z, w \in \Omega$ e ogni curva $\gamma : [0, 1] \rightarrow \Omega$ di classe C^1 a tratti con $\gamma(0) = z$, $\gamma(1) = w$ si ha

$$F(w) - F(z) = \int_{\gamma} f(\zeta) d\zeta.$$

- (iii) Per ogni $z \in \Omega$ esiste $\delta > 0$ tale che per ogni $w \in B(z, \delta)$

$$F(w) - F(z) = \int_{\delta_{z, w}} f(\zeta) d\zeta.$$

Dimostrazione. (i) \Rightarrow (ii). Si ha $f(\gamma(t))\gamma'(t) = F'(\gamma(t))\gamma'(t) = \frac{d}{dt}(F(\gamma(t)))$, cfr. Esercizio 1.2. Segue dal teorema fondamentale del calcolo per funzioni di una variabile reale,

$$\int_{\gamma} f(\zeta) d\zeta = \int_0^1 F'(\gamma(t))\gamma'(t) dt = \int_0^1 \frac{d}{dt}(F(\gamma(t))) dt = F(\gamma(1)) - F(\gamma(0)).$$

(ii) \Rightarrow (iii). Ovvio.

(iii) \Rightarrow (i). Per ogni h , $|h| < \delta$, segue dall'ipotesi che

$$F(z+h) - F(z) = \int_{\delta_{z, z+h}} f(w) dw$$

essendo $\delta_{z, z+h}$ la spezzata che congiunge z con $z+h$ muovendo prima in orizzontale e quindi in verticale, cfr. Figura 2.1. Si noti che la lunghezza di $\delta_{z, z+h}$ non supera $\sqrt{2}|h|$ e che l'immagine di $\delta_{z, z+h}$ è contenuta in $B(z, |h|)$. Essendo

$$\int_{\delta_{z, z+h}} dw = h,$$

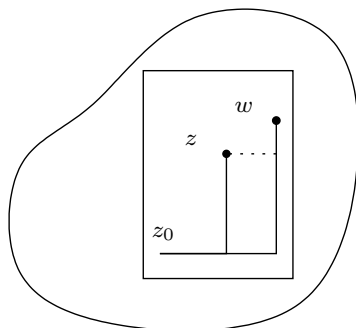


Figura 2.1. Illustrazione della dimostrazione del teorema fondamentale del calcolo.

si ha

$$\left| F(z+h) - F(z) - hf(z) \right| = \left| \int_{\delta_{z, z+h}} (f(\zeta) - f(z)) d\zeta \right| \leq \sup_{\zeta \in B(z, |h|)} |f(\zeta) - f(z)| \sqrt{2} |h|$$

e quindi

$$\left| \frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z) \right| \leq \sqrt{2} \sup_{\zeta \in B(z, |h|)} |f(\zeta) - f(z)|$$

Essendo f continua in z , per $h \rightarrow 0$, si ottiene che F ha derivata complessa in z con $F'(z) = f(z)$. \square

2.4 Esercizio. Calcolare i seguenti integrali

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \frac{1}{z} dz, & \quad \gamma(t) := e^{it}, \quad t \in [0, 2\pi], \\ \int_{\gamma} \frac{1}{z} dz, & \quad \gamma(t) := e^{it}, \quad t \in [0, 2k\pi], \\ \int_{\gamma} z^2 dz, & \quad \gamma(t) := te^{it}, \quad t \in [0, 2\pi]. \end{aligned}$$

2.5 Esercizio. Calcolare

$$\int_{\gamma} z^2 dz$$

su una curva γ congiungente 0 con $1+i$.

2.6 Esercizio. Mostrare che se $\gamma_r(t) = re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, allora per ogni $p \in \mathbb{Z}$

$$\int_{\gamma_r} w^p dw = \begin{cases} 2\pi i & \text{se } p = -1, \\ 0 & \text{se } p \neq -1. \end{cases}$$

In generale, non è detto che una funzione $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ continua, o anche olomorfa in Ω , abbia una primitiva olomorfa F in Ω .

2.7 Esercizio. Sia $f(z) = \frac{1}{z}$, $z \neq 0$ e $\gamma(t) := e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$. Evidentemente $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus \{0\})$. Se esistesse una primitiva olomorfa F di $f(z) dz$ su $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, allora

$$0 = F(1) - F(1) = F(\gamma(2\pi)) - F(\gamma(0)) = \int_{\gamma} \frac{dz}{z} = \int_0^{2\pi} \frac{ie^{it}}{e^{it}} dt = 2\pi i, \quad (2.1)$$

un assurdo.

Tuttavia

2.8 Teorema. *Sia Ω un dominio di \mathbb{C} . $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ ha una primitiva olomorfa in Ω se e solo se*

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0 \quad (2.2)$$

per ogni curva chiusa γ di classe C^1 a tratti con immagine in Ω .

Dimostrazione. Se f ha una primitiva olomorfa in Ω , allora la (2.2) segue dal Teorema 2.3.

Viceversa, assumiamo la (2.2). Siano $z_0, z \in \Omega$ e $\delta_z : [0, 1] \rightarrow \Omega$ una curva di classe C^1 a tratti con $\delta(0) = z_0$ e $\delta(1) = z$. Sia

$$F(z) := \int_{\delta_z} f(\zeta) d\zeta.$$

Per ipotesi $F(z)$ non dipende dalla scelta di δ_z ma solo da z , dunque $F : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ è univocamente definita. Se ora $z, w \in \Omega$ e $\gamma : [0, 1] \rightarrow \Omega$ è una curva C^1 a tratti con $\gamma(0) = w$, $\gamma(1) = z$, allora

$$F(z) - F(w) = \int_{\delta_z} f(\zeta) d\zeta - \int_{\delta_w} f(\zeta) d\zeta = \int_{\gamma} f(\zeta) d\zeta$$

ancora per la (2.2). F è allora una primitiva olomorfa di f in Ω per il teorema fondamentale del calcolo. \square

Quando il dominio Ω è una palla o un rettangolo, basta una condizione a priori più debole. Se R è un rettangolo, indichiamo con $\partial^+ R$ una curva regolare semplice a tratti chiusa che percorre ∂R muovendo in senso antiorario.

2.9 Proposizione. *Sia Ω una palla o un rettangolo di \mathbb{C} . $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ ha una primitiva olomorfa in Ω se e solo se l'integrale lungo il bordo di ogni rettangolo R contenuto in Ω è nullo,*

$$\int_{\partial^+ R} f(z) dz = 0. \quad (2.3)$$

Dimostrazione. Supponiamo che valga la (2.2) e siano $z_0, z \in \Omega$ arbitrari. Poiché la spezzata $\delta_{z_0, z}$ che congiunge z_0 con z muovendo prima in orizzontale e poi in verticale è tutta contenuta in Ω , la funzione

$$F(z) := \int_{\delta_z} f(\zeta) d\zeta.$$

è definita su tutto Ω . Se ora $z, w \in \Omega$, segue dalla (2.3) che

$$F(z) - F(w) = \int_{\delta_{z_0, z}} f(\zeta) d\zeta - \int_{\delta_{z_0, w}} f(\zeta) d\zeta = \int_{\delta_{w, z}} f(\zeta) d\zeta.$$

F è allora una primitiva olomorfa di f in Ω per il teorema fondamentale del calcolo. \square

Conviene evidenziare le differenze tra il Teorema 2.8 e la Proposizione 2.9.

2.10 Corollario. *Sia Ω un dominio di \mathbb{C} e $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ continua.*

- (i) *$f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ ha localmente primitive olomorfe se e solo se per ogni rettangolo $R \subset \Omega$ si ha*

$$\int_{\partial^+ R} f(z) dz = 0.$$

- (ii) *f ha una primitiva olomorfa in Ω se e solo se*

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0.$$

per ogni curva chiusa C^1 a tratti contenuta in Ω .

3. Richiami sulle serie di Taylor e sui numeri e e π

Un modo semplice e naturale di generare serie convergenti è partire con una funzione $f :]-a, a[\rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^∞ e considerare la sua *serie di Taylor*

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{D^j f(0)}{j!} x^j, \quad x \in \mathbb{R},$$

che ha come somme parziali i polinomi di Taylor

$$P_n(x) := \sum_{j=0}^n \frac{D^j f(0)}{j!} x^j.$$

Ovviamente

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{D^j f(0)}{j!} x^j = f(x)$$

se e solo se il resto $R_n(x) := f(x) - P_n(x)$ tende a zero per $n \rightarrow \infty$. Anche se questo accade, come vedremo, per un certo numero di funzioni elementari, in generale

$$f(x) \neq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{D^n f(0)}{n!} x^n \quad \forall x \neq 0,$$

come dimostra il seguente

3.1 Esercizio. Si veda per induzione che la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \exp(-1/x^2) & \text{if } x \neq 0, \\ 0 & \text{if } x = 0 \end{cases}$$

ha derivate di ogni ordine e $D^j f(0) = 0 \forall j$. La serie di Taylor ha allora somma zero pur essendo $f(x) \neq 0$ per ogni $x \neq 0$.

Ecco alcuni esempi

3.2 Esercizio (Logaritmo). Sostituendo x con $-x$ nell'identità

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^n x^k + \frac{x^{n+1}}{1-x}, \quad (3.1)$$

si ottiene

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^n (-1)^k x^k + \frac{(-x)^{n+1}}{1+x}, \quad x \neq 1,$$

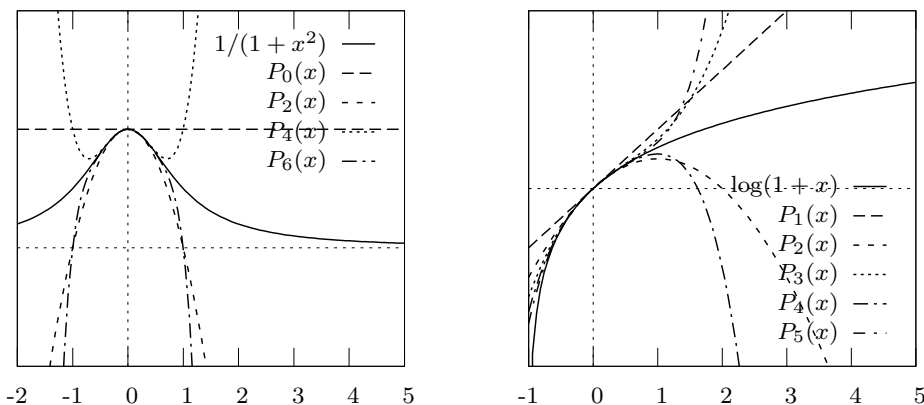


Figura 3.1. Le funzioni $1/(1+x^2)$ e $\log(1+x)$ e i loro rispettivi polinomi di Taylor di ordine n .

e, integrando tra 0 e x ,

$$\begin{aligned} \log(1+x) &= \int_0^x \frac{1}{1+t} dt = \int_0^x \sum_{k=0}^n (-1)^k t^k dt + R_n(x) \\ &= \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1} + R_n(x) \end{aligned}$$

dove

$$R_n(x) := \int_0^x \frac{(-t)^{n+1}}{1+t} dt.$$

Si vede che, se $x > -1$, il resto si stima con

$$|R_n(x)| \leq \max\left(1, \frac{1}{1+x}\right) \frac{|x|^{n+1}}{n+1}, \tag{3.2}$$

e quindi converge a zero per $n \rightarrow \infty$ se $-1 < x \leq 1$. Concludiamo allora che la serie di Taylor di $\log(1+x)$ converge se $-1 < x \leq 1$ e

$$\log(1+x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1}, \quad -1 < x \leq 1. \tag{3.3}$$

3.3 Esercizio (Arcotangente). Sostituendo in (3.1) x con $-x^2$, e integrando si ottiene

$$\begin{aligned} \arctan x &= \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt = \int_0^x \sum_{k=0}^n (-1)^k t^{2k} dt + R_n(x) \\ &= \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + R_n(x) \end{aligned}$$

dove

$$R_n(x) := \int_0^x \frac{(-t^2)^{n+1}}{1+t^2} dt.$$

Poiché

$$|R_n(x)| \leq \left| \int_0^x t^{2n+2} dt \right| = \frac{|x|^{2n+3}}{2n+3}, \tag{3.4}$$

si conclude che $R_n(x) \rightarrow 0$ per $n \rightarrow \infty$ se $|x| \leq 1$, concludendo che

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad |x| \leq 1. \tag{3.5}$$

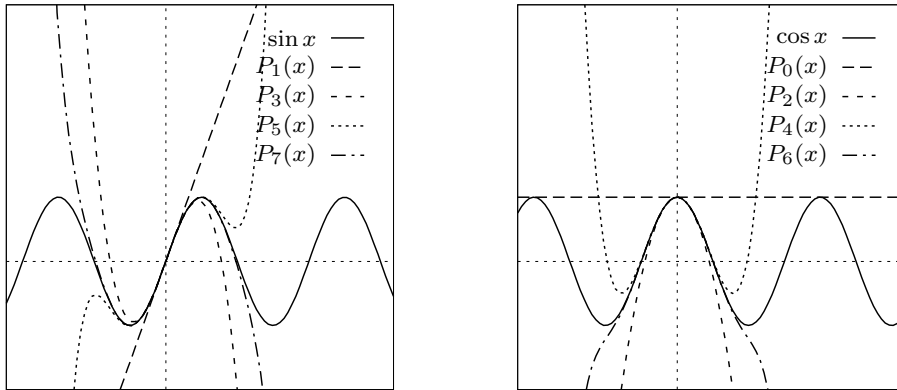


Figura 3.2. Le funzioni $\sin x$ e $\cos x$ e i loro rispettivi polinomi di Taylor di grado n .

3.4 Esercizio (Serie di Taylor di e^x , $\sin x$ e $\cos x$). Sappiamo che il polinomio di Taylor di grado n di e^x centrato in 0 è

$$P_n(x) := \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$$

e che la formula di Taylor con resto di Lagrange dà

$$e^x - \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} = \frac{e^{\xi_n}}{(n+1)!} x^{n+1}$$

per un opportuno ξ_n in $]0, x[$ (o in $]x, 0[$ se $x < 0$). Pertanto per ogni $x \in \mathbb{R}$ si ha

$$\left| e^x - \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \right| \leq \max(e^x, 1) \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}. \tag{3.6}$$

Poichè $t^n/n! \rightarrow 0$ per $n \rightarrow \infty$, per ogni t , si conclude che la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ converge a e^x ,

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{3.7}$$

3.5 Esercizio. Procedendo come per l'Esercizio 3.4, mostrare che

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sin x, \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \cos x, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \tag{3.8}$$

cfr. Figura 3.2.

3.a Il numero π

Approssimazioni di π sono note fin dal 2000 a.C.. La prima rappresentazione analitica di π risale probabilmente a François Viète (1540–1603) che nel 1579 rappresenta π come un prodotto infinito. Nel 1655 John Wallis (1616–1703) trova la formula

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2 \cdot 2}{1 \cdot 3} \frac{4 \cdot 4}{3 \cdot 5} \frac{6 \cdot 6}{5 \cdot 7} \cdots \frac{2n \cdot 2n}{(2n-1)(2n+1)} \cdots;$$

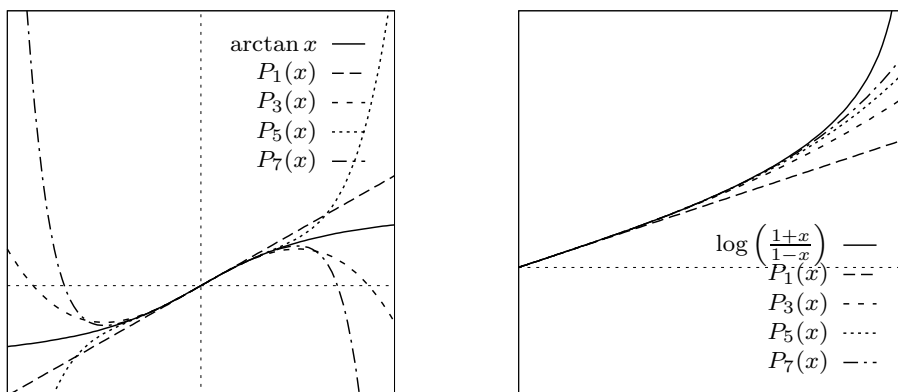


Figura 3.3. Le funzioni $\arctan x$ e $\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ ed i rispettivi polinomi di Taylor di grado n .

e nel 1671 James Gregory (1638–1675) trova uno sviluppo in serie

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots,$$

ritrovato indipendentemente da Gottfried von Leibniz (1646–1716) nel 1674. La formula di Gregory–Leibniz segue facilmente dalle (3.5) e (3.4), che danno infatti

$$\frac{\pi}{4} = \arctan 1 = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1} \tag{3.9}$$

con la stima dell’errore

$$\left| \sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{2k+1} \right| = |R_n(1)| \leq \frac{1}{2n+3}.$$

Come dimostrano i valori calcolati nella Figura 3.4 (a), il decadimento dell’errore è piuttosto lento.

3.6 Esercizio. È possibile ottenere formule per π con un migliore decadimento dell’errore di approssimazione. Ad esempio, osservando che $\frac{\pi}{6} = \arctan \frac{1}{\sqrt{3}}$, si ottiene sempre dalla (3.5)

$$\frac{\pi}{6} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{3}^{2n+1} (2n+1)},$$

i.e.,

$$\frac{\pi}{2\sqrt{3}} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{3^n (2n+1)}. \tag{3.10}$$

Se $\sqrt{3}$ è noto, la (3.10) è una rappresentazione di π di gran lunga migliore della (3.9), poiché (3.4) da un decadimento esponenziale per l’errore,

$$\left| \sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{\sqrt{3}^{2k+1} (2k+1)} \right| = \left| R_n\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \right| \leq \frac{1}{\sqrt{3} (2n+3) 3^n},$$

cfr. Figura 3.4 (b).

n	S_n	R_n
1	2.666666666666667	$5E - 01$
3	2.895238095238096	$2E - 01$
10	3.232315809405594	$-9E - 02$
30	3.173842337190750	$-3E - 02$
100	3.151493401070991	$-1E - 02$
300	3.144914903558853	$-3E - 03$
1000	3.142591654339544	$-1E - 03$
3000	3.141925875839790	$-3E - 04$
10000	3.141692643590535	$-1E - 04$
π	3.141592653589793	

n	S_n	R_n
1	3.079201435678004	$6E - 02$
2	3.156181471569954	$-1E - 02$
3	3.137852891595680	$4E - 03$
5	3.141308785462883	$3E - 04$
7	3.141568715941784	$2E - 05$
9	3.141590510938080	$2E - 06$
11	3.141592454287646	$2E - 07$
13	3.141592634547314	$2E - 08$
15	3.141592651733998	$2E - 09$
π	3.141592653589793	

Figura 3.4. Le somme parziali $S_n := \sum_{j=0}^n a_j$ e l'errore $R_n := \pi - S_n$: (a) a sinistra, per $a_j := 4(-1)^j/(2j + 1)$; (b) a destra per $a_j := (-1)^j 2\sqrt{3} \frac{1}{3^j(2j+1)}$.

3.7 Esercizio. Sia $\alpha = \arctan(1/5)$. Mostrare che

$$\frac{\pi}{4} = 4\alpha - \left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = 4 \arctan \frac{1}{5} - \arctan \frac{1}{239}.$$

Segue dalla (3.5) che

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \left(\frac{4}{5^{n+1}} - \frac{1}{239^{n+1}} \right).$$

3.b Il numero e

Dalle (3.7) e (3.6) segue che

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}, \tag{3.11}$$

con

$$\left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!} \right| \leq \frac{e}{(n+1)!} < \frac{4}{(n+1)!}, \tag{3.12}$$

essendo elementarmente $2 < e < 4$. Ad esempio, per $n = 6$, $\sum_{j=0}^6 \frac{1}{j!} = 2.718055\dots$ approssima e dal basso con un errore non superiore a $4/7! = 1/1260$, che dà

$$2.718055\dots < e < 2.718849\dots$$

La stima (3.12) implica anche che

3.8 Teorema. e è irrazionale.

Dimostrazione. Infatti, se per assurdo e fosse razionale, $e = p/q$, $p, q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$, dalla (3.12) si avrebbe

$$\frac{p}{q} - \sum_{j=0}^n \frac{1}{j!} < \frac{4}{(n+1)!}.$$

Moltiplicando per $n!$ si otterrebbe

n	S_n	R_n
1	1.0000000000000000	$2E + 00$
3	2.5000000000000000	$2E - 01$
5	2.7083333333333333	$1E - 02$
7	2.7180555555555555	$2E - 04$
9	2.718278769841270	$3E - 06$
11	2.718281801146385	$3E - 08$
13	2.718281828286169	$2E - 10$
15	2.718281828458230	$8E - 13$
17	2.718281828459043	$2E - 15$
e	2.718281828459045	

Figura 3.5. Le somme parziali $S_n := \sum_{j=0}^n 1/j!$ e l'errore $e - S_n$.

$$\frac{p}{q}n! - n! \sum_{j=0}^n 1/j! < \frac{4}{n+1}.$$

Essendo $n! \sum_{j=0}^n 1/j!$ e $n! \frac{p}{q}$ interi per $n \geq q$ si avrebbe allora

$$\frac{p}{q} - \sum_{j=0}^n \frac{1}{j!} = 0 \quad \forall n \geq \max(3, q),$$

un assurdo. □

4. Serie di potenze, I

4.a Spazi normati

4.1 Definizione. Sia X uno spazio vettoriale su \mathbb{R} (risp. \mathbb{C}). Una funzione $|\cdot| : X \rightarrow \mathbb{R}_+$ con le seguenti proprietà

- (i) $|x| \geq 0 \ \forall x \in X$ e $|x| = 0$ se e solo se $x = 0$,
- (ii) $|\lambda x| = |\lambda| |x| \ \forall x \in X, \ \forall \lambda \in \mathbb{R}$ (risp. $\forall \lambda \in \mathbb{C}$),
- (iii) $|x + y| \leq |x| + |y|, \ \forall x, y \in X$,

si chiama una norma su X . Se $|\cdot|$ è una norma su X , si dice che X è uno spazio (vettoriale) normato da $|\cdot|$.

Uno spazio vettoriale X normato da $|\cdot|$ è in particolare uno spazio metrico con la distanza

$$d(x, y) := |x - y|, \quad \forall x, y \in X.$$

In uno spazio normato sono quindi definite tutte le nozioni topologiche di aperto, chiuso, convergenza di successioni, ecc..

Si noti che la distanza naturale $d(x, y) = |x - y|$ è *invariante per traslazioni*, i.e., $d(x + z, y + z) = d(x, y), \ \forall x, y, z \in X$. Si noti anche che la norma $|\cdot| : X \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione lipchitziana con costante 1, quindi continua su X , perché dalla diseuguaglianza triangolare si ottiene

$$\left| |x| - |y| \right| \leq |x - y| \quad \forall x, y \in X.$$

In uno spazio vettoriale X normato da $|\cdot|_X$ si possono considerare le *successioni di Cauchy*: $\{x_n\} \subset X$ è una successione di Cauchy per la norma in X se $\forall \epsilon > 0$ esiste \bar{n} tale che per ogni $n, m \geq \bar{n}$ si ha $|x_n - x_m|_X < \epsilon$.

4.2 Definizione. Uno spazio normato $(X, |\cdot|)$ che sia completo, i.e., in cui tutte le successioni di Cauchy convergono, si dice uno spazio di Banach.

4.3 Esempio. Con la nomenclatura ora introdotta,

- (i) \mathbb{R} con la norma euclidea $|x|$ è uno spazio di Banach perché $|x|$ è una norma su \mathbb{R} e le successioni di Cauchy di \mathbb{R} convergono.
- (ii) \mathbb{Q} , sempre con la norma euclidea, è uno spazio normato, ma non è uno spazio di Banach.

I seguenti spazi sono ovviamente rilevanti

- (i) \mathbb{R}^n è uno spazio normato da

$$|x| := \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}, \quad x = (x_1, x_2, \dots, x_n).$$

(ii) \mathbb{C}^n è uno spazio normato da

$$|z| := \sqrt{\sum_{i=1}^n |z_i|^2}, \quad z = (z_1, z_2, \dots, z_n).$$

(iii) Lo spazio $M_{k,n}(\mathbb{K})$ delle matrici $k \times n$ a coefficienti in $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o \mathbb{C} , è normato da

$$|M| := \sup_{\substack{x \in \mathbb{K}^n \\ x \neq 0}} \frac{|Mx|}{|x|}$$

Si dimostra che *ogni spazio vettoriale normato di dimensione finita è completo*. In particolare i quattro spazi normati \mathbb{R}^n , \mathbb{C}^n e $M_{k,n}(\mathbb{R})$, $M_{k,n}(\mathbb{C})$ sono tutti spazi di Banach.

4.b Serie in spazi normati

In uno spazio vettoriale X le somme finite di elementi di X sono ben definite e appartengono ad X . Possiamo pertanto, data una successione $\{x_n\}$ di elementi di X , parlare della serie $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$, i.e., della successione delle sue somme parziali $\{\sum_{k=0}^n x_k\}$. Se X è normato, ha senso parlare di convergenza per una serie a valori in X .

4.4 Definizione. Sia X uno spazio normato da $|\cdot|_X$. La serie $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$, $x_n \in X$, si dice convergente in X se la successione delle somme parziali $s_n := \sum_{k=0}^n x_k$ converge in X , i.e., se esiste $s \in X$ tale che $|s_n - s|_X \rightarrow 0$. In questo caso si scrive

$$s = \sum_{k=0}^{\infty} x_k \quad \text{in norma } |\cdot|_X, \quad \text{o anche} \quad \sum_{k=n}^{\infty} x_k \rightarrow 0 \quad \text{in } X.$$

Il punto $s \in X$ è la somma della serie $\sum_{k=0}^{\infty} x_k$.

4.5 Osservazione. Si deve fare attenzione. La scrittura $s = \sum_{k=0}^{\infty} x_k$ può far dimenticare che la somma della serie s è un limite e, se si usano più nozioni di convergenza, è ambigua. Meglio dichiarare rispetto a quale norma si è calcolato il limite, scrivendo al posto di $s = \sum_{k=0}^{\infty} x_k$

$$s = \sum_{k=0}^{\infty} x_k \quad \text{in norma } |\cdot|_X,$$

4.6 Definizione. Sia X uno spazio normato. Si dice che la serie $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$, $x_n \in X$, converge assolutamente se la serie a termini non negativi $\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|$ converge.

4.7 Proposizione. Sia X uno spazio normato. X è di Banach se e solo se ogni serie assolutamente convergente è convergente in X . Inoltre se $\sum_{k=0}^{\infty} x_k$ converge assolutamente, per ogni intero p si ha

$$\left| \sum_{k=p}^{\infty} x_k \right| \leq \sum_{k=p}^{\infty} |x_k|.$$

Dimostrazione. Sia X di Banach. Se la serie $\sum_{k=0}^{\infty} |x_k|$ converge, le somme parziali $\left\{ \sum_{k=0}^p |x_k| \right\}_p$ sono una successione di Cauchy in \mathbb{R} . Perciò $\sum_{k=p}^q |x_k| \rightarrow 0$ per $p, q \rightarrow \infty$. Dalla disuguaglianza triangolare,

$$\left| \sum_{k=p}^q x_k \right| \leq \sum_{k=p}^q |x_k| \rightarrow 0 \quad (4.1)$$

per $p, q \rightarrow \infty$. La successione delle somme parziali di $\sum_{k=0}^{\infty} x_k$ è dunque una successione di Cauchy in X e dunque converge in X . Mandando $q \rightarrow \infty$ nella (4.1) si trova la stima

$$\left| \sum_{k=p}^{\infty} x_k \right| \leq \sum_{k=p}^{\infty} |x_k| \quad \forall p.$$

Viceversa, sia $\{x_k\}$ una successione di Cauchy in X . Usando la definizione di successione di Cauchy, Procedendo per induzione si trova n_1 tale che per ogni $n \geq n_1$ si ha $|x - x_{n_1}| < 1$, quindi $n_2 > n_1$ tale che per ogni $n \geq n_2$ si ha $|x - x_{n_2}| < 1/2$, e così via, si estrae da $\{x_k\}$ una sottosuccessione $\{x_{n_k}\}$ tale che

$$|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}| \leq 2^{-k},$$

conseguentemente la serie $\sum_{k=1}^{\infty} |x_{n_{k+1}} - x_{n_k}|$ converge per il criterio del confronto. Per ipotesi la serie $\sum_{k=1}^{\infty} (x_{n_{k+1}} - x_{n_k})$ converge allora ad un punto $y \in X$,

$$\left| \sum_{k=1}^p (x_{n_{k+1}} - x_{n_k}) - y \right| \rightarrow 0, \quad \text{per } p \rightarrow +\infty.$$

Il limite precedente si riscrive anche come $|x_{n_p} - x| \rightarrow 0$ con $x := y + x_{n_1}$ e, essendo $\{x_k\}$ di Cauchy, non solo la sottosuccessione $\{x_{n_k}\}$ converge a x , ma tutta la successione $\{x_k\}$ converge a x . \square

4.c Serie di potenze

Data una successione $\{a_n\}$ di numeri complessi, la *serie di potenze* centrata in 0 a coefficienti $\{a_n\}$ è

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n := a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n, \quad z \in \mathbb{C},$$

vale a dire la successione $\{s_n(z)\}$ dei polinomi

$$s_n(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k := a_0 + \sum_{k=1}^n a_k z^k, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Si considerano anche serie di potenze centrate in $z_0 \in \mathbb{C}$ con coefficienti $\{a_n\}$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

e, naturalmente si passa ad una serie centrata in zero con un cambio di variabile lineare.

Chiaramente per ogni $z \in \mathbb{C}$ fissato, la serie numerica $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ converge o diverge in dipendenza dalla scelta di z . Ovviamente $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ converge per $z = 0$ con somma a_0 . Vedremo ora che a ciascuna serie di potenze è associato un *cerchio di convergenza* in modo tale che la serie converge se z è all'interno del cerchio (supponendo positivo il raggio del disco) e non converge se z è all'esterno.

4.8 Esercizio. L'esempio tipico di serie di potenze è la *serie geometrica*

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

le cui somme parziali si calcolano esplicitamente, ad esempio per induzione,

$$s_n(z) := \sum_{k=0}^n z^k = \begin{cases} \frac{1-z^{n+1}}{1-z} & \text{se } z \neq 1, \\ n+1 & \text{se } z = 1. \end{cases}$$

Segue che la serie geometrica converge in z se $|z| < 1$ e non converge in z se $|z| > 1$. Si prova anche che la serie geometrica non converge in ogni z tale che $|z| = 1$.

4.9 Definizione. Sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ una serie di potenze. Il numero $\rho \in \overline{\mathbb{R}}_+$ dato da

$$\frac{1}{\rho} := \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|},$$

è il raggio di convergenza di $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. Usiamo le convenzioni $1/0^+ = +\infty$ e $1/(+\infty) = 0$.

4.10 Teorema. Sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ una serie di potenze con raggio di convergenza $\rho \geq 0$.

- (i) Se $\rho > 0$, allora $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ converge assolutamente in z se $|z| < \rho$.
- (ii) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ non converge se $|z| > \rho$.

Dimostrazione. La dimostrazione è una ripetizione della dimostrazione del criterio della radice per le serie a termini positivi.

(i) Sia $r < \rho$ e t tale che $r < t < \rho$. Essendo $\limsup_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1/\rho$, esiste \bar{n} tale che

$$\sqrt[n]{|a_n|} < \frac{1}{t}$$

per ogni $n \geq \bar{n}$, quindi

$$\sqrt[n]{|a_n|} r^n \leq \frac{r}{t} < 1$$

da cui segue

$$|a_n| r^n \leq \left(\frac{r}{t}\right)^n \quad \text{per ogni } n \geq \bar{n}.$$

Un confronto con la serie geometrica prova la seconda affermazione e la stima

$$\sum_{n=p}^{\infty} |a_n| r^n \leq \sum_{n=p}^{\infty} h^n = \frac{\left(\frac{r}{t}\right)^p}{1 - \frac{r}{t}} \quad \forall p \geq \bar{n}, \quad (4.2)$$

da cui segue (i) per la Proposizione 4.7.

(ii) Se $|z| > \rho$, allora $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} |z|^n = |z|/\rho > 1$. Dalle proprietà caratteristiche del lim sup, se h è un numero tra 1 e $|z|/\rho$, si trova una sottosuccessione $\{a_{k_n}\}$ di $\{a_n\}$ tale che $\sqrt[k_n]{|a_{k_n}|} |z| \geq h \forall n$, cioè,

$$|a_{k_n}| |z|^{k_n} \geq h^{k_n} \quad \forall n.$$

Segue che $|a_{k_n}| |z|^{k_n} \rightarrow \infty$. In particolare, $a_n z^n$ non converge a zero e quindi la serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ non converge in z . \square

4.11 Osservazione. Il Teorema 4.10 implica le seguenti caratterizzazioni per il raggio di convergenza

$$\begin{aligned}\rho &:= \sup \left\{ |z| \mid \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \text{ converge assolutamente} \right\} \\ &= \sup \left\{ |z| \mid \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \text{ converge} \right\}.\end{aligned}$$

4.12 Esercizio. Se $\{a_n\}$ è una successione limitata, $|a_n| \leq C \forall n$, allora il raggio di convergenza della serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ è maggiore o uguale a 1.

4.13 Esercizio. Una serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ ha raggio di convergenza positivo se e solo se $\{|a_n|\}$ cresce al più esponenzialmente con n , i.e., se e solo se esiste $M > 0$ tale che $|a_n| \leq M^n \forall n$.

4.14 Esercizio. Mostrare che le serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ e $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} z^{n+1}$ hanno lo stesso raggio di convergenza.

4.d Cerchio e dominio di convergenza

Il Teorema 4.10 implica che il *dominio di convergenza* di una serie di potenze, cioè l'insieme Δ dei punti nei quali la serie converge, è il suo disco (aperto) di convergenza $\{z \mid |z| < \rho\}$ unito eventualmente con un sottoinsieme di punti sul cerchio $|z| = \rho$,

$$\{z \mid |z| < \rho\} \subset \Delta \subset \{z \mid |z| \leq \rho\}.$$

Ecco alcuni esempi

4.15 Esercizio. Come già detto, la serie geometrica $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ converge in z se e solo se $|z| < 1$. Il raggio di convergenza vale dunque 1 e il dominio di convergenza è l'interno del cerchio di convergenza.

4.16 Esercizio. La serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} z^n/n^2$ converge assolutamente, quindi converge, in ogni z con $|z| \leq 1$, poiché in questo caso $|z|^n/n^2 \leq 1/n^2$ per ogni n e $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$ converge. $\sum_{n=0}^{\infty} z^n/n^2$ non converge in z se $|z| > 1$ perché $|z|^n/n^2 \rightarrow \infty$. Pertanto $\sum_{n=1}^{\infty} z^n/n^2$ converge (e converge assolutamente) in z se e solo se $|z| \leq 1$. Per questa serie il dominio di convergenza è tutto il cerchio chiuso $\{|z| \leq 1\}$.

4.17 Esercizio. La serie $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{n+1}}{n+1}$ ha raggio di convergenza $\rho = 1$. Pertanto la serie converge assolutamente in ogni z con $|z| < 1$ e non converge in z se $|z| > 1$. Si può provare con una certa fatica, che la serie converge in ogni punto z tale che $|z| = 1$ eccetto $z = -1$. Pertanto questa volta il dominio di convergenza è $\{z \mid |z| \leq 1, z \neq -1\}$.

4.18 Esercizio. La serie di potenze $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2} z^{2n}$ ha coefficienti

$$a_n = \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ è dispari,} \\ 2^p/p^2 & \text{se } n = 2p, \end{cases}$$

e raggio di convergenza $1/\sqrt{2}$ poiché

$$\frac{1}{\rho} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{p \rightarrow \infty} \sqrt[2p]{\frac{2^p}{p^2}} = \sqrt{2}.$$

Si può anche vedere $\sum_{j=1}^{\infty} (2^n/n^2)z^{2n}$ come la serie di potenze $\sum_{n=1}^{\infty} w^n/n^2$ nella variabile $w = 2z^2$. In altri termini, cambiando variabili $w := 2z^2$, si ottiene la serie di potenze nell'Esercizio 4.16, $\sum_{n=1}^{\infty} w^n/n^2$, che converge assolutamente in ogni w tale che $|w| = 2|z|^2 \leq 1$; si conclude quindi che $\sum_{n=1}^{\infty} (2^n/n^2)z^{2n}$ converge assolutamente in ogni z con $|z| \leq 1/\sqrt{2}$ e non converge in ogni z tale che $|z| > 1/\sqrt{2}$.

Nel Capitolo 6 proveremo il seguente teorema di derivazione e integrazione termine a termine

4.19 Teorema. Sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ una serie di potenze di raggio di convergenza $\rho > 0$ e sia $S : B(0, \rho) \rightarrow \mathbb{C}$ la sua somma. Allora

- (i) S è olomorfa e C^∞ in $B(0, \rho)$, la serie derivata i.e., la serie $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$ ha lo stesso raggio di convergenza di $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ e

$$S'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n z^{n-1} \quad \forall z \in B(0, \rho).$$

- (ii) se $\gamma : [0, 1] \rightarrow B(0, \rho)$ è una curva regolare di classe C^1 , allora

$$\int_{\gamma} S(z) dz = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{\gamma(1)^{n+1} - \gamma(0)^{n+1}}{n+1}.$$

4.20 Esercizio. Provare il

Teorema (del valore finale). Sia $S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ la somma di una serie di potenze di raggio di convergenza 1. Supponiamo che

- (i) $a_n \rightarrow L$ per $n \rightarrow \infty$,
(ii) esiste una costante $C > 0$ tale che $|a_n - L| \leq C \frac{1}{n^2} \forall n$.

Allora $\lim_{\substack{z \rightarrow 1 \\ |z| < 1}} (1-z)S(z) = L$.

Dimostrazione. Infatti, sia $|z| < 1$, $z \neq 1$. Moltiplicando per z^n

$$|a_n z^n - L z^n| \leq C \frac{|z|^n}{n^2} \quad \forall n \geq 1;$$

perciò sommando in n da 0 a k e usando la disuguaglianza triangolare,

$$\left| \sum_{n=0}^k a_n z^n - L \sum_{n=0}^k z^n \right| \leq |a_0 - L| + C \sum_{n=1}^k \frac{|z|^n}{n^2} \leq |a_0 - L| + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} =: M < +\infty.$$

Mandando ora $k \rightarrow \infty$ e tenendo conto che $\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$ (abbiamo supposto che $|z| < 1$), per $k \rightarrow \infty$ si ottiene

$$\left| S(z) - \frac{L}{1-z} \right| \leq M, \quad \text{i.e.,} \quad |(1-z)S(z) - L| \leq M|1-z|.$$

Per $z \rightarrow 1$ si ottiene la tesi. □

5. Serie di potenze, II

5.a Serie di Taylor come serie di potenze

Le serie di Taylor di funzioni date sono esempi importanti di serie di potenze (reali) sulle quali testare la teoria generale.

5.1 Esercizio. Segue dalla formula di Taylor per funzioni di una variabile reale che

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x, \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sin x, \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \cos x$$

per ogni $x \in \mathbb{R}$, ed è facile convincersi che il raggio di convergenza è ∞ . La convergenza alle rispettive somme è uniforme su ogni intervallo limitato.

5.2 Esercizio (Logaritmo). Sostituendo x con $-x$ nella

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad |x| < 1,$$

si ottiene

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n, \quad |x| < 1,$$

e, integrando,

$$\log(1+x) = \int_0^x \frac{1}{1+t} dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}, \quad |x| < 1, \quad (5.1)$$

Si noti che il raggio di convergenza di $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$ è 1 essendo $1/\rho = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1/n} = 1$.

5.3 Esercizio (Arcotangente). Sostituendo x con $-x^2$ nella

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad |x| < 1,$$

e integrando termine a termine, cfr. il Teorema 4.19, si ottiene

$$\arctan x = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n} dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad |x| < 1, \quad (5.2)$$

D'altra parte si vede immediatamente che il raggio di convergenza della serie dell'arcotangente è 1.

5.4 Esercizio (Serie binomiale). Si ha

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n, \quad \alpha \in \mathbb{R}, |x| < 1, \quad (5.3)$$

dove

$$\binom{\alpha}{n} := \begin{cases} 1 & \text{if } n = 0, \\ \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} & \text{if } n \geq 1. \end{cases}$$

Si osservi che $D^n(1+x)^\alpha = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}$, e quindi la serie (5.3) è la serie di Taylor di $(1+x)^\alpha$ centrata in 0.

Poiché

$$\frac{\left| \binom{\alpha}{n+1} \right|}{\left| \binom{\alpha}{n} \right|} = \frac{|\alpha-n|}{|n+1|} \rightarrow 1 \quad \text{as } n \rightarrow \infty$$

segue per un noto criterio che anche $\sqrt[n]{a_n} \rightarrow 1$; pertanto la serie in (5.3) ha raggio di convergenza 1.

Sia $S(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$, $|x| < 1$ la somma. Derivando termine a termine, si trova

$$(1+x)S'(x) = \alpha S(x), \quad |x| < 1,$$

quindi

$$\left(\frac{S(x)}{(1+x)^\alpha} \right)' = \frac{(1+x)S'(x) - \alpha S(x)}{(1+x)^{\alpha+1}} = 0.$$

Pertanto $S(x) = c(1+x)^\alpha$ se $|x| < 1$, c essendo una costante; infine da $S(0) = 1$ segue $c = 1$.

5.5 Esercizio (Arcoseno). Sostituendo x con $-x^2$ e scegliendo $\alpha = -1/2$, si ottiene

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1/2}{n} (-1)^n x^{2n}, \quad |x| < 1$$

e integrando,

$$\begin{aligned} \arcsin x &= \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{-1/2}{n} t^{2n} dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{-1/2}{n} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \end{aligned} \quad (5.4)$$

per $|x| < 1$, e la serie in (5.4) ha raggio di convergenza 1. La serie in (5.4) in realtà converge assolutamente se $|z| = 1$. Infatti, i coefficienti della serie in (5.4), che indichiamo con $\{c_n\}$, sono nonnegativi, quindi per ogni $p \geq 1$,

$$\sum_{n=0}^p |c_n| = \sum_{n=0}^p c_n = \lim_{r \rightarrow 1^-} \sum_{n=1}^p c_n r^n \leq \lim_{r \rightarrow 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} c_n r^n = \lim_{r \rightarrow 1^-} \arcsin r = \frac{\pi}{2}.$$

5.b Funzione esponenziale

L'esponenziale complesso e^z è definito come

$$e^z = e^x(\cos y + i \sin y), \quad z = x + iy \in \mathbb{C}.$$

L'esponenziale complesso è una funzione olomorfa su \mathbb{C} con $De^z = e^z \forall z$ perché, ad esempio,

$$\frac{\partial e^z}{\partial x} = e^z, \quad \frac{\partial e^z}{\partial y} = ie^z.$$

Si vede subito che la trasformazione $z \rightarrow e^z$

- (i) manda rette orizzontali in semirette per l'origine,
- (ii) manda rette verticali in cerchi per l'origine,
- (iii) se $z = x + iy$ si ha $|e^z| \leq e^x$, in particolare e^z è limitata su ogni semipiano $\{z = x + iy \mid x < x_0\}$,
- (iv) $e^z \neq 0 \forall z \in \mathbb{C}$,
- (v) e^z non è iniettiva, infatti $e^z = e^w$ se e solo se z e w hanno parti reali uguali e parti immaginarie che differiscono di un multiplo intero di 2π ,

$$e^z = e^w \quad \text{se e solo se} \quad z - w = 2\pi ik, \quad k \in \mathbb{Z} :$$

si dice che e^z è *periodica di periodo* $2\pi i$.

Infine si ha

5.6 Proposizione. Si ha

$$e^z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \quad \forall z \in \mathbb{C}. \quad (5.5)$$

Dimostrazione. Infatti, le serie di Taylor di $\sin y$ e $\cos y$ convergono in \mathbb{R} , e quindi

$$\begin{aligned} e^{iy} = \cos y + i \sin y &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{y^{2n}}{(2n)!} + i \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{y^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iy)^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iy)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iy)^n}{n!}, \end{aligned}$$

i.e., la (5.5) per $z = iy$, $y \in \mathbb{R}$. Segue poi dal teorema sul prodotto di serie, Teorema 6.16,

$$e^{x+iy} = e^x e^{iy} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iy)^n}{n!} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n$$

dove

$$c_n := \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \frac{(iy)^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (iy)^{n-k} = \frac{1}{n!} (x + iy)^n = \frac{z^n}{n!}.$$

□

5.c Seno e coseno, seno e coseno iperbolico

Si definiscono le funzioni $\sin z$ e $\cos z$, $z \in \mathbb{C}$, e le funzioni iperboliche $\sinh z$, $\cosh z$, $z \in \mathbb{C}$ con le *formule di Eulero*

$$\begin{aligned} \cos z &:= \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, & \sin z &= \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \\ \cosh z &:= \frac{e^z + e^{-z}}{2}, & \sinh z &= \frac{e^z - e^{-z}}{2}. \end{aligned}$$

Sono tutte funzioni olomorfe in \mathbb{C} , e

$$\begin{aligned} D \sin z &= \cos z, & D \cos z &= -\sin z, \\ D \sinh z &= \cosh z, & D \cosh z &= \sinh z. \end{aligned}$$

La funzione $\cos z$ si annulla nei soli punti dell'asse reale $z = \pi/2 + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ e la funzione $\sin z$ si annulla nei soli punti dell'asse reale $z = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Si noti esplicitamente che le funzioni $\sin z$ e $\cos z$ *non* sono limitate. Dalla definizione, se $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$,

$$\frac{e^{|y|} - e^{-|y|}}{2} \leq |\cos z| = \frac{|e^{ix}e^{-y} + e^{-ix}e^y|}{2} \leq \frac{e^y + e^{-y}}{2} = \cosh y$$

e analogamente

$$\frac{e^{|y|} - e^{-|y|}}{2} \leq |\sin z| = \frac{|e^{ix}e^{-y} - e^{-ix}e^y|}{2} \leq \frac{e^y + e^{-y}}{2} = \cosh y.$$

Le funzioni $\cosh z$ e $\sinh z$ sono ottenute dal coseno e dal seno con una rotazione di $\pi/2$,

$$\cosh z = \cos(iz), \quad \sinh z = -i \sin(iz),$$

in particolare la funzione $\cosh z$ si annulla nei punti $z = i(\pi/2 + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$, sull'asse immaginario e la funzione $\sinh z$ si annulla nei punti $z = ik\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, sempre sull'asse immaginario.

Infine le funzioni trigonometriche hanno uno sviluppo in serie di potenze centrate in zero convergente su tutto \mathbb{C} . Si trova, partendo dalla (5.5)

$$\begin{aligned} \cos z &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!}, & \sin z &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}. \\ \cosh z &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!}, & \sinh z &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}. \end{aligned}$$

5.d Tangente e cotangente, tangente e cotangente iperboliche

La funzione $\tan z := \frac{\sin z}{\cos z}$ è dunque ben definita e olomorfa in $\mathbb{C} \setminus \{z = \pi/2 + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Si noti anche che $\tan z$ è limitata e lontana da zero lontano dall'asse reale. Infatti se $z = x + iy$, si ha

$$|\tan z| = \frac{|e^{ix}e^{-y} - e^{-ix}e^y|}{|e^{ix}e^{-y} + e^{-ix}e^y|} \leq \frac{e^{-y} + e^y}{e^y - e^{-y}} = \coth y, \quad (5.6)$$

da cui $|\tan z| \leq \coth y_0$ su $A := \{z \mid |\operatorname{Im}(z)| \geq y_0\}$. Analogamente

$$|\cot z| = \frac{1}{|\tan z|} = \frac{|e^{ix}e^{-y} + e^{-ix}e^y|}{|e^{ix}e^{-y} - e^{-ix}e^y|} \leq \frac{e^{-y} + e^y}{e^y - e^{-y}} = \coth y. \quad (5.7)$$

5.e Funzione logaritmo principale

Il *logaritmo principale* è definito da

$$\log z := \log |z| + i \arg z, \quad z \neq 0,$$

dove $\arg z \in [-\pi, \pi[$ è l'*argomento* di $z/|z|$, i.e., l'angolo tra la semiretta uscente dall'origine per z e il semiasse positivo delle ascisse misurato in radianti in $[-\pi, \pi[$ con $\arg 1 = 0$. Infine

Proposizione. *La determinazione principale del logaritmo, $\log z$, è definita e olomorfa in $\Omega := \mathbb{C} \setminus \{z = x + iy \mid y = 0, x \leq 0\}$. Inoltre*

$$\log(1+z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{n+1}}{n+1}, \quad |z| < 1. \quad (5.8)$$

Dimostrazione. Osserviamo che per $z \neq 0$,

$$e^{\log z} = e^{\log |z|} e^{i \arg z} = z$$

e che la funzione $\log z$ è continua in Ω . Se $w := \log z$, $w_0 := \log z_0$, $z - z_0$ piccolo, si ha

$$\frac{\log z - \log z_0}{z - z_0} = \frac{w - w_0}{e^w - e^{w_0}}$$

e $w \rightarrow w_0$ per $z \rightarrow z_0$. Perciò $\log z$ ha derivata complessa in z_0 e

$$D \log z(z_0) = \frac{1}{e^{w_0}} = \frac{1}{z_0}.$$

Questo prova che $\log z$ è olomorfa in Ω .

Poi la funzione $\log(1+z)$ è olomorfa in $|z| < 1$. Se γ è un curva regolare che congiunge 0 con z muovendo da 0, dal teorema fondamentale del calcolo si ha

$$\begin{aligned} \log(1+z) - \log 1 &= \int_{\gamma} \frac{dz}{z+1} = \int_{\gamma} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n dz \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{n+1}}{n+1} dz, \quad |z| < 1. \end{aligned}$$

□

5.f Funzione potenza

Se $\alpha \in \mathbb{R}$ si definisce per ogni $z \neq 0$ la potenza α -esima di z come

$$z^\alpha = e^{\alpha \log z} = e^{\alpha \log |z|} e^{i \alpha \arg z} = |z|^\alpha e^{i \alpha \arg z}$$

o, in forma polare,

$$\left| z^\alpha \right| = |z|^\alpha, \quad \arg z^\alpha = \alpha \arg z \pmod{2\pi}.$$

La funzione $z^\alpha : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ è evidentemente olomorfa su $A := \mathbb{C} \setminus \{z = x + iy \mid y = 0, x \leq 0\}$ con $Dz^\alpha = \alpha z^{\alpha-1}$.

Se si calcolano i limiti in un punto $z = x + i0$ del semiasse reale negativo,

$$\begin{aligned} w^\alpha &\rightarrow |z|^\alpha e^{-i\alpha\pi} && \text{se } w \rightarrow z, \Im(w) \leq 0 \\ w^\alpha &\rightarrow |z|^\alpha e^{i\alpha\pi} && \text{se } w \rightarrow z, \Im w > 0. \end{aligned}$$

Dunque z^α è continua sul semiasse negativo delle ascisse se e solo se

$$e^{-i\alpha\pi} = e^{i\alpha\pi}$$

i.e., se e solo se $\alpha \in \mathbb{Z}$. In questo caso la funzione potenza è l'ordinario elevamento a potenza (positiva o negativa), e z^α è olomorfa su tutto $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Se α non è intero, allora z^α è discontinua lungo il semiasse reale negativo.

Infine, procedendo come nel caso reale, cfr. Esercizio 5.4, si prova che

$$(1+z)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} z^n, \quad \text{se } |z| < 1.$$

5.7 Esercizio. Provare che

$$\begin{aligned} \cos(z_1 + z_2) &= \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2, & \cos^2 z + \sin^2 z &= 1, \\ \sin(z_1 + z_2) &= \cos z_1 \sin z_2 + \cos z_2 \sin z_1, & \cosh^2 z - \sinh^2 z &= 1, \\ \cos(-z) &= \cos z, \quad \sin(-z) = -\sin z, & \cos\left(z - \frac{\pi}{2}\right) &= \sin z, \\ e^z &= \cosh z + \sinh z, & e^{iz} &= \cos z + i \sin z, \\ \sin(x + iy) &= \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y, & \cos(x + iy) &= \cos x \cosh y - \sin x \sinh y. \end{aligned}$$

5.8 Esercizio. Calcolare le derivate delle funzioni tangente, cotangente, tangente iperbolica, cotangente iperbolica. Quindi scrivere e provare alcune uguaglianze relative a queste funzioni complesse.

5.g Ulteriori esempi

5.9 Esercizio. La serie $\sum_{n=0}^{\infty} n^2 z^n$ ha raggio di convergenza 1. Scrivendo

$$n^2 z^n = n(n-1)z^n + nz^n = z^2 n(n-1)z^{n-2} + znz^{n-1}$$

e sommando, si ottiene, per $|z| < 1$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^2 z^n = z^2 D^2 \left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n \right) + z D \left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n \right) = z^2 D^2 \frac{1}{1-z} + z D \frac{1}{1-z} = \dots$$

5.10 Esercizio. Calcoliamo

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n+2}{n-1} z^n.$$

Se si scrive

$$\frac{n+2}{n-1} = 1 + \frac{3}{n-1},$$

moltiplicando per z^n e sommando si ottiene

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n+2}{n-1} z^n = \sum_{n=2}^{\infty} z^n + 3z \sum_{n=2}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{n-1} = \frac{z^2}{1-z} - 3z \log(1-z),$$

usando le

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n+1}}{n+1} = -\log(1-z), \quad |z| < 1.$$

5.11 Esercizio. Calcoliamo

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n-2)} z^n.$$

Poiché

$$\frac{1}{(n+1)(n-2)} = \frac{1}{3} \frac{1}{n+1} - \frac{1}{3} \frac{1}{n-2},$$

moltiplicando per z^n e sommando, si ottiene, per $|z| < 1$,

$$\begin{aligned} \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n-2)} z^n &= \frac{1}{3z} \sum_{n=3}^{\infty} \frac{z^{n+1}}{n+1} - \frac{z^2}{3} \sum_{n=3}^{\infty} \frac{z^{n-2}}{n-2} \\ &= \frac{1}{3z} \left(-\log(1-z) - z - \frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{3} \right) + \frac{z^2}{3} \log(1-z). \end{aligned}$$

Qui abbiamo utilizzato l'uguaglianza $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n+1}}{n+1} = -\log(1-z)$ se $|z| < 1$.

5.12 Esercizio. Si può scrivere la somma della serie $\sum_{n=1}^{\infty} z^n/n^2$ come un integrale. Infatti, per $|z| < 1$ si ha

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \int_{\gamma} t^{n-1} dt = \int_{\gamma} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{n-1}}{n} dt = \int_{\gamma} \frac{1}{t} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n} dt = \int_{\gamma} \frac{\log(1-t)}{t} dt$$

essendo $\gamma(t)$ una curva che congiunge 0 con z muovendo da 0. Il calcolo è giustificato dal Teorema 4.19 osservando che tutte le serie coinvolte hanno raggio di convergenza 1.

5.13 Esercizio. Mostrare che

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)z^n &= \frac{1}{(1-z)^2}, & \sum_{n=0}^{\infty} nz^n &= \frac{z}{1-z^2}, \\ \sum_{n=0}^{\infty} n^2 z^n &= \frac{z^2+z}{(1-z)^3}, & \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n &= \frac{1}{1+z}, \\ \sum_{n=0}^{\infty} z^{2n} &= \frac{1}{1-z^2}, & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} &= \frac{1}{e}, \\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} &= \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

5.14 Esercizio. Calcolare le somme delle seguenti serie

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(1+2n)}{n!}, & \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin(1+2n)}{(2n)!}, \\ \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{n!}, & \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{3n+2}}{n!}, \\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{2n+1}, & \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{n}, \\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{n+1}, & \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n(n+1)}, \\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}, & \end{aligned}$$

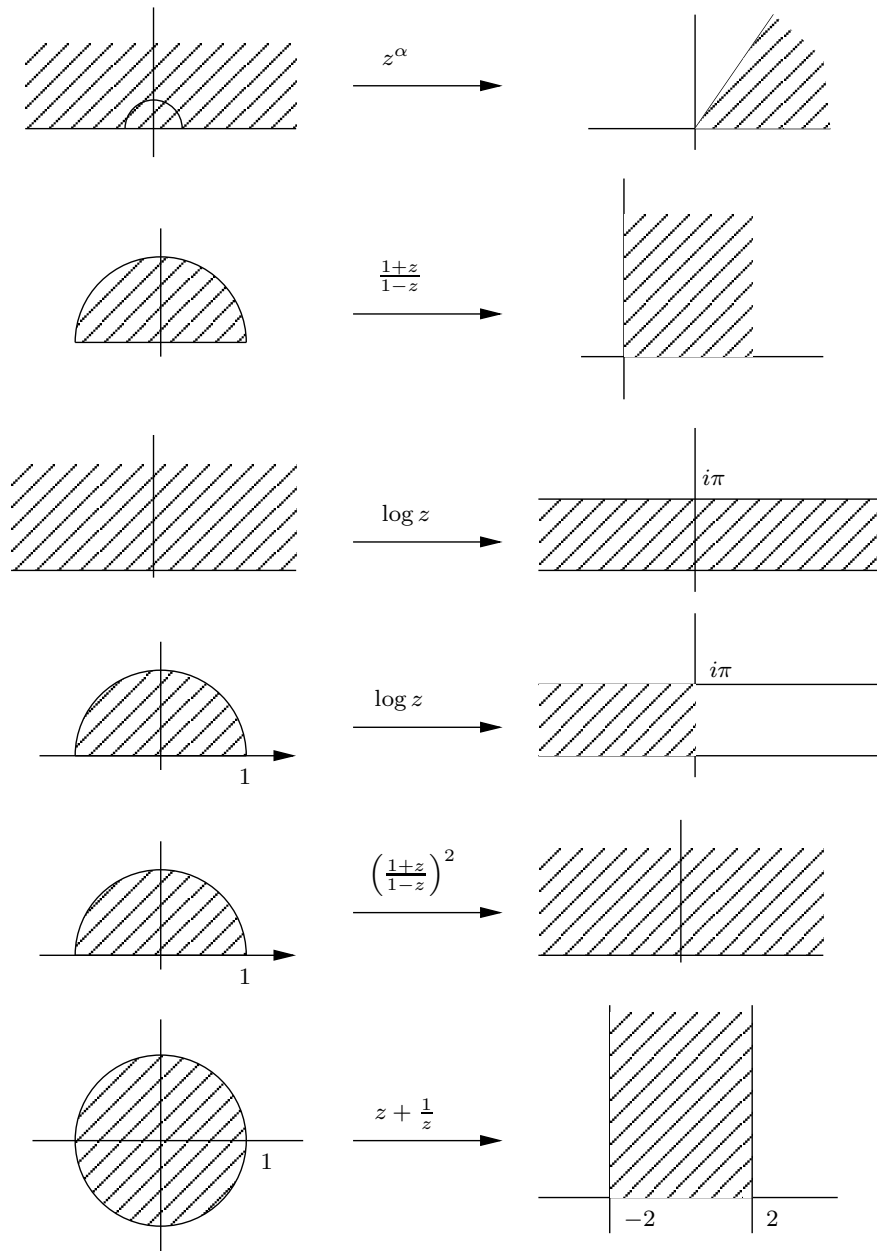


Figura 5.1. Alcune trasformazioni olomorfe.

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \quad |z| < 1,$$

$$e^z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad z \in \mathbb{C},$$

$$\log(1+z) := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{n+1}}{n+1}, \quad |z| \leq 1, \quad z \neq -1,$$

$$\sin z := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad z \in \mathbb{C},$$

$$\sinh z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad z \in \mathbb{C},$$

$$\cos z := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \quad z \in \mathbb{C},$$

$$\cosh z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \quad z \in \mathbb{C},$$

$$\arcsin z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{z^{2n+1}}{2n+1}, \quad |z| \leq 1,$$

$$\sinh^{-1} z := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{z^{2n+1}}{2n+1}, \quad |z| \leq 1, \quad z \neq \pm 1,$$

$$\arccos z := \frac{\pi}{2} - \arcsin z, \quad |z| \leq 1,$$

$$\arctan z := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{2n+1}, \quad |z| \leq 1, \quad z \neq \pm i,$$

$$\tanh^{-1} z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{2n+1}, \quad |z| \leq 1, \quad z \neq \pm 1,$$

$$\frac{1}{1-z} := \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \quad |z| < 1,$$

$$(1+z)^\alpha := \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} z^n, \quad |z| < 1,$$

dove

$$(2n)!! := \begin{cases} 1 & \text{if } n = 0, \\ 2n(2n-2)\cdots 4 \cdot 2 & \text{if } n \geq 1, \end{cases} \quad (2n+1)!! := (2n+1)(2n-1)\cdots 5 \cdot 3 \cdot 1$$

e per $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\binom{\alpha}{n} := \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}.$$

Figura 5.2. Una tabella di serie di potenze.

6. Serie di potenze, III

In questo capitolo discutiamo le proprietà fondamentali delle serie di potenze provando in particolare il teorema di derivazione e integrazione termine a termine Teorema 4.19 e alcuni risultati rilevanti sul prodotto di serie e sulle serie di prodotti.

6.a Continuità della somma

Sia $S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ la somma di una serie di potenze con raggio di convergenza $\rho > 0$. Per ogni intero n $S_n(z) := \sum_{j=0}^n a_j z^j$ è un polinomio di grado n ed una domanda ragionevole è chiedersi quali siano le proprietà di $S_n(z)$ che passano al limite. Ad esempio, si è già visto che il dominio di definizione di $S(z)$ è in generale strettamente più piccolo del campo di definizione dei polinomi in \mathbb{C} .

Ci si può chiedere se $S(z)$ sia continua sul suo dominio di definizione. È difficile resistere alla tentazione di scrivere

$$\lim_{z \rightarrow z_0} S(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{z \rightarrow z_0} S_n(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(z_0) = S(z_0). \quad (6.1)$$

È però un fatto che lo scambio dell'ordine di passaggio al limite rispetto a due variabili, i.e., l'uguaglianza

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{z \rightarrow z_0} S_n(z),$$

è in generale falsa. Ad esempio, se $S_n(x) = x^n$, $x \in [0, 1]$, si ha

$$\lim_{x \rightarrow 1} \lim_{n \rightarrow \infty} x^n = \lim_{x \rightarrow 1} 0 = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow 1} x^n = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1.$$

Il conto in (6.1) non è dunque giustificato.

6.b Convergenza uniforme

Lo scambio dei limiti in (6.1) è giustificato invece nel caso in cui si abbia una stima *uniforme* per l'errore che si commette sostituendo $S(z)$ con $S_n(z)$. Per la rilevanza che riveste questa proprietà, conviene dare una definizione.

6.1 Definizione. Siano $S_n, S : A \rightarrow \mathbb{C}$ funzioni definite su un insieme A del piano. Si dice che S_n converge ad S uniformemente in A se

$\forall \epsilon > 0 \exists \bar{n}$ tale che $\forall n \geq \bar{n}$ e $\forall z \in A$ si ha $|S_n(z) - S(z)| < \epsilon$.

Si dice che una serie di funzioni converge uniformemente in A se le somme parziali convergono (alla somma) uniformemente in A .

6.2 Osservazione. Rispetto alla *convergenza puntuale* “per ogni $z \in A$ $S_n(z) \rightarrow S(z)$ ”, la convergenza uniforme di $S_n(z)$ a $S(z)$ afferma (o richiede) che per ogni $\epsilon > 0$ c'è un indice \bar{n} indipendente da $z \in A$ sufficiente a rendere l'errore $|S_n(z) - S(z)|$ inferiore a ϵ .

Se si considera il “massimo errore” tra $S(z)$ e $S_n(z)$ al variare di $z \in A$

$$\|S - S_n\|_{\infty, A} := \sup_{z \in A} |S(z) - S_n(z)|,$$

possiamo dire che $S_n(z) \rightarrow S(z)$ uniformemente su A se e solo se la successione numerica $\|S_n - S\|_{\infty, A}$ tende a zero per $n \rightarrow \infty$. Inoltre, poiché ovviamente

$$|S_n(z) - S(z)| \leq \|S_n - S\|_{\infty, A} \quad \forall z \in A,$$

la convergenza uniforme di $S_n(z)$ a $S(z)$ in A implica la convergenza (puntuale) di $S_n(z)$ a $S(z)$ in ogni punto $z \in A$. Una conseguenza è che il limite puntuale è il solo candidato possibile ad essere limite uniforme. In generale esistono successioni di funzioni che convergono puntualmente ma non uniformemente.

6.3 Esercizio. Sia $\varphi(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione limitata con $\|\varphi\|_{\infty, \mathbb{R}} = M > 0$ e $\varphi(x) \rightarrow 0$ per $x \rightarrow -\infty$. Definiamo $S_n(x) := \varphi(x - n)$, $x \in \mathbb{R}$. Ogni $S_n(x)$ è una traslazione di $\varphi(x)$. Si vede subito che per ogni x fissato $S_n(x) = \varphi(x - n) \rightarrow 0$ per $n \rightarrow +\infty$, i.e., $\{S_n\}$ converge puntualmente a zero. Ma la convergenza non è uniforme essendo $\|S_n - S\|_{\infty, \mathbb{R}} = M > 0$.

6.c Continuità del limite uniforme

6.4 Teorema. Siano $S_n : A \rightarrow \mathbb{C}$ funzioni continue su A convergenti uniformemente in A ad una funzione $S : A \rightarrow \mathbb{C}$. Allora S è continua in A .

Dimostrazione. Siano $z_0 \in A$ e $\epsilon > 0$. Per la convergenza uniforme in A di $S_n(z)$ a $S(z)$ esiste n , $n = n(\epsilon)$, tale che $|S_n(z) - S(z)| < \epsilon$ per ogni $z \in A$. Perciò

$$\begin{aligned} |S(z) - S(z_0)| &= |S_n(z) - S_n(z_0) + S(z) - S_n(z) + S_n(z_0) - S(z_0)| \\ &\leq |S_n(z) - S_n(z_0)| + |S(z) - S_n(z)| + |S(z_0) - S_n(z_0)| \\ &\leq |S_n(z) - S_n(z_0)| + 2\epsilon. \end{aligned}$$

Poi, per la continuità di $S_n(z)$ si trova δ , $\delta = \delta(\epsilon, n(\epsilon))$ tale che per ogni $z \in A$ con $|z - z_0| < \delta$ si ha $|S_n(z) - S_n(z_0)| < \epsilon$. In definitiva $|S(z) - S(z_0)| < 3\epsilon$ per ogni $z \in A$, $|z - z_0| < \delta$. \square

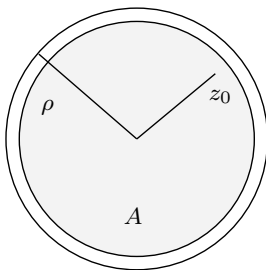


Figura 6.1.

6.d Convergenza uniforme delle serie di potenze

6.5 Teorema. Sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ una serie di potenze convergente assolutamente in z_0 . Allora la serie converge uniformemente su $\{z \mid |z| \leq |z_0|\}$.

Dimostrazione. Per ogni $|z| \leq |z_0|$ e $n \geq 1$ si ha

$$|S(z) - S_n(z)| = \left| \sum_{j=n+1}^{\infty} a_j z^j \right| \leq \sum_{j=n+1}^{\infty} |a_j| |z|^j \leq \sum_{j=n+1}^{\infty} |a_j| |z_0|^j. \quad (6.2)$$

e dunque

$$\sup_{|z| \leq |z_0|} |S(z) - S_n(z)| \leq \sum_{j=n+1}^{\infty} |a_j| |z_0|^j \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

□

Sia $B = B(0, \rho)$ una palla di \mathbb{C} e $K \subset B$ un insieme chiuso e limitato. La funzione distanza dal bordo di ∂B , $z \rightarrow \text{dist}(z, \partial B)$, $z \in K$, è continua e non negativa; segue dal teorema di Weierstrass l'esistenza di un punto $z_0 \in K$ di minima distanza di K da ∂B . Perciò la distanza di K da ∂B è strettamente positiva o, equivalentemente, esiste $r < \rho$ tale che $K \subset B(0, r)$. Segue allora dal Teorema 6.5

6.6 Corollario. Una serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ con raggio di convergenza $\rho > 0$ converge uniformemente su ogni insieme compatto contenuto all'interno del cerchio di convergenza.

6.7 Corollario. Sia $S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ la somma di una serie di potenze con raggio di convergenza ρ , allora $S(z)$ è continua in ogni punto z interno al dominio di convergenza, $|z| < \rho$.

Dimostrazione. Per ogni z_0 con $|z_0| < \rho$ si sceglie r tale che $|z_0| < r < \rho$ e sia $A := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq r\}$. Il Corollario 6.6 dà la convergenza uniforme in A delle somme parziali $S_n(z)$ a $S(z)$, e il Teorema 6.5 permette di concludere che S ristretta ad A è continua in z_0 . Poiché z_0 è interno ad A , anche $S(z)$, $z \in \{|z| < \rho\}$, è continua in z_0 . □

6.8 Esercizio. Siano $S_n : B(0, \rho) \rightarrow \mathbb{C}$, $\rho > 0$, una successione di funzioni convergente puntualmente a $S : B(0, \rho) \rightarrow \mathbb{C}$. Le affermazioni

- (i) S_n converge uniformemente a S in $B(0, \rho)$,
- (ii) S_n converge uniformemente a S su ogni compatto contenuto in $B(0, \rho)$,

non sono equivalenti. Verificarlo con le somme parziali della serie geometrica.

6.e Derivazione e integrazione di serie di potenze

Sappiamo già che per ogni intero k

$$D(a_k z^k) = k a_k z^{k-1},$$

e quindi che per ogni intero n

$$D\left(\sum_{k=0}^n a_k z^k\right) = \sum_{k=0}^n D(a_k z^k) = \sum_{k=1}^n k a_k z^{k-1}.$$

Proveremo ora che, se $S(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ è la somma di una serie di potenze di raggio positivo, allora

$$S'(z) = \sum_{k=0}^{\infty} k a_k z^{k-1} \quad \forall z, |z| < \rho.$$

6.9 Proposizione. *La serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, e la serie derivata i.e., la serie di potenze delle sue derivate, $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$, hanno lo stesso raggio di convergenza. In particolare se ρ è il raggio di convergenza della serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, allora la serie derivata $\sum_{n=0}^{\infty} n a_n z^{n-1}$ converge uniformemente in ogni cerchio chiuso strettamente contenuto in $\{|z| < \rho\}$.*

Dimostrazione. Siano ρ, σ rispettivamente i raggi di convergenza di $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ e di $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$. Supponiamo che la serie derivata converga assolutamente in z . Poiché

$$|a_n| |z|^n \leq |z| n |a_n| |z|^{n-1}$$

per $n \geq 1$, per confronto la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ converge assolutamente in z . In particolare $\rho \geq \sigma$. Viceversa sia z all'interno del cerchio di convergenza della serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, i.e. $|z| < \rho$, e sia r tale che $|z| < r < \rho$. Poiché ancora $r < \rho$, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n$ converge assolutamente. In particolare la successione $|a_n| r^n$ è limitata, $|a_n| r^n \leq M$ e dunque

$$n |a_n| |z|^{n-1} \leq n \frac{M}{r} \left(\frac{|z|}{r}\right)^{n-1}.$$

Per il criterio del confronto la serie derivata converge dunque assolutamente in z . Si conclude quindi che $\sigma \geq \rho$ e in definitiva che $\sigma = \rho$. \square

Discutiamo prima l'integrazione per serie.

6.10 Proposizione. *Siano $S_n : B(0, \rho) \rightarrow \mathbb{C}$ funzioni continue convergenti uniformemente su ogni cerchio chiuso di $B(0, \rho)$ ad una funzione $S : B(0, \rho) \rightarrow \mathbb{C}$. Allora per ogni curva $\gamma : [0, 1] \rightarrow B(0, \rho)$ di classe C^1 si ha*

$$\int_{\gamma} S_n(z) dz \rightarrow \int_{\gamma} S(z) dz.$$

Dimostrazione. Osserviamo anzitutto che S è continua per il Corollario 6.7 e che $\Gamma := \gamma([0, 1])$ è compatto. L'integrale $\int_{\gamma} S(z) dz$ è dunque ben definito.

Si ha allora

$$\left| \int_{\gamma} (S_n(z) - S(z)) dz \right| \leq \|S_n - S\|_{\infty, \Gamma} L(\gamma)$$

dove $L(\gamma)$ è la lunghezza di γ . Poiché S_n converge uniformemente a S sul compatto Γ , cfr. il Corollario 6.6, la tesi segue. \square

6.11 Teorema. Sia $S(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$, $z \in B(z_0, r)$, $r > 0$, la somma di una serie di potenze. Allora S è di classe $C^\infty(B(z_0, r))$ ed ha derivate complesse $S^{(k)}(z)$ di ogni ordine in $B(z_0, r)$. Per ogni $k = 0, 1, 2, \dots$ $S^{(k)}(z)$ è la somma della serie di potenze,

$$S^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\dots(n-k+1) a_n (z - z_0)^{n-k} \quad \forall z \in B(z_0, \rho).$$

In particolare

$$S^{(k)}(z_0) = k! a_k \quad \forall k \geq 0. \quad (6.3)$$

Il teorema si ottiene applicando induttivamente la Proposizione 6.12 seguente

6.12 Proposizione. Sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ una serie di potenze di raggio di convergenza $\rho > 0$. Allora la somma $S(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ è $C^1(B(0, \rho)) \cap \mathcal{H}(B(0, \rho))$ e

$$S'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1} \quad \forall z \in B(0, \rho).$$

Dimostrazione. La serie derivata $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$ ha raggio di convergenza ρ per la Proposizione 6.9. Sia $T(z) := \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$ la somma. Per ogni $z, w \in B(0, \rho)$, sia $\gamma : [0, 1] \rightarrow B(0, \rho)$ una curva regolare con $\gamma(0) = w$ e $\gamma(1) = z$, Poiché per ogni intero $k \geq 1$, $Dz^k = kz^{k-1}$, segue dal teorema fondamentale del calcolo, Teorema 2.3 che

$$\sum_{k=1}^n a_k z^k - \sum_{k=1}^n a_k w^k = \int_{\gamma} \sum_{k=1}^n k a_k \zeta^{k-1} d\zeta.$$

Poiché le somme parziali delle serie di potenze convergono uniformemente sui compatti strettamente contenuti nel cerchio di convergenza, si ricava passando al limite per $n \rightarrow \infty$, cfr. la Proposizione 6.10, che

$$\int_{\gamma} \sum_{k=1}^n k a_k \zeta^{k-1} d\zeta \rightarrow \int_{\gamma} T(\zeta) d\zeta,$$

e quindi

$$S(z) - S(w) = \int_{\gamma} T(\zeta) d\zeta.$$

Essendo z, w e γ arbitrari, il teorema fondamentale del calcolo, Teorema 2.3, dà che S è derivabile in senso complesso e $S'(z) = T(z) \forall z \in B(0, \rho)$. \square

6.13 Esercizio. Mostrare che $\sum_{r=0}^n r \binom{n}{r} = n2^{n-1}$.

6.f Prodotti di serie

Se $P(z) = \sum_{j=0}^p a_j z^j$ e $Q(z) = \sum_{j=0}^q b_j z^j$ sono due polinomi di grado rispettivamente p e q , $P(z)Q(z)$ è ancora un polinomio di grado $p+q$ i cui coefficienti si ottengono sommando tutti i possibili prodotti dei monomi di $P(z)$ con i monomi di $Q(z)$,

$$P(x)Q(x) = (a_0 + a_1 z + \dots + a_p z^p)(b_0 + b_1 z + \dots + b_q z^q) = \sum_{\substack{i=0, p \\ j=0, q}} a_i b_j z^{i+j}.$$

e raccogliendo i monomi dello stesso grado

$$P(z)Q(z) = \sum_{k=0}^{p+q} \left(\sum_{i+j=k} a_i b_j \right) z^k. \quad (6.4)$$

6.14 Definizione. Il prodotto di convoluzione di due successioni $a = \{a_n\}$ e $b = \{b_n\}$ è la successione denotata con $\{a * b\}_n$ definita da

$$(a * b)_n := \sum_{i+j=n} a_i b_j = \sum_{j=0}^n a_j b_{n-j}.$$

Dalla definizione

$$\begin{aligned} (a * b)_0 &= a_0 b_0, \\ (a * b)_1 &= a_0 b_1 + a_1 b_0, \\ (a * b)_2 &= a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0, \\ &\dots \end{aligned}$$

6.15 Esercizio. Il prodotto di convoluzione è estremamente utile nell'esprimere varie operazioni sulle successioni. Se $\delta_{k,n}$ è il simbolo di Kronecker

$$\delta_{k,n} = \begin{cases} 1 & \text{se } k = n, \\ 0 & \text{se } k \neq n, \end{cases}$$

e \mathbf{e}_k è la successione definita da

$$\mathbf{e}_k := \{\delta_{k,n}\} = \{0, 0, 0, 0, \dots, 1, 0, 0, \dots\},$$

si ha

$$(a * \mathbf{e}_k)_n = \begin{cases} 0 & \text{if } n < k, \\ a_{n-k} & \text{if } n \geq k, \end{cases}$$

cioè, i valori di $a * \mathbf{e}_k$ sono i valori di $\{a_n\}$ traslati di k posizioni in avanti.

$$\begin{aligned} a &= \{a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\} \\ a * \mathbf{e}_k &= \{0, 0, 0, \dots, 0, a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}. \end{aligned}$$

Se $b = \{1/2, 1/2, 0, 0, 0, \dots\}$, allora

$$(a * b)_n = \begin{cases} a_0/2 & \text{se } n = 0, \\ (a_n + a_{n-1})/2 & \text{se } n \geq 1. \end{cases}$$

Infine, se $b = \{1, 1, 1, \dots, 1, \dots\}$, allora

$$(a * b)_n = \sum_{k=0}^n a_k \quad \forall n.$$

è la somma parziale della serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

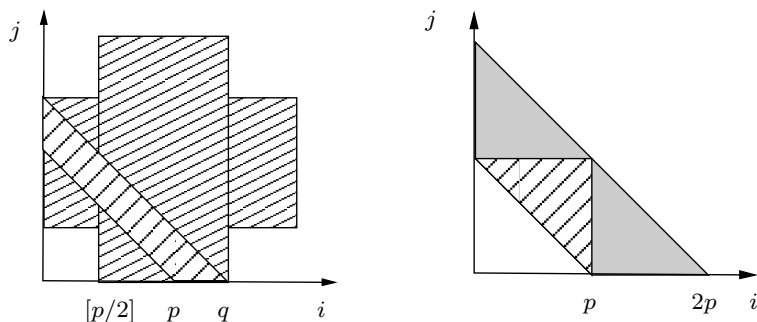


Figura 6.2.

In termini di prodotti di convoluzione la (6.4) si riassume dicendo che se $P(z) = \sum_{j=0}^p a_j z^j$, $Q(z) := \sum_{j=0}^q b_j z^j$ e se si definiscono le successioni

$$a = \{a_0, a_1, a_2, \dots, a_p, 0, 0, 0, \dots\}$$

$$b = \{b_0, b_1, b_2, \dots, b_q, 0, 0, 0, \dots\}.$$

allora

$$P(z)Q(z) = \sum_{k=0}^{p+q} (a * b)_k z^k.$$

Più in generale

6.16 Teorema. Siano $a = \{a_n\}$ e $b = \{b_n\}$ due successioni tali che le rispettive serie $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ e $\sum_{j=0}^{\infty} b_j$ siano assolutamente convergenti. Allora la serie

$$\sum_{j=0}^{\infty} (a * b)_j$$

è assolutamente convergente e $\sum_{j=0}^{\infty} (a * b)_j = \sum_{j=0}^{\infty} a_j \sum_{j=0}^{\infty} b_j$.

Dimostrazione. Siano

$$A := \sum_{j=0}^{\infty} |a_j| \quad \text{e} \quad B := \sum_{j=0}^{\infty} |b_j|.$$

Siano poi $q > p$ e $n := [p/2]$. Si ha

$$\begin{aligned} \sum_{k=p}^q |(a * b)_k| &\leq \sum_{k=p}^q \left| \sum_{i+j=k} a_i b_j \right| \leq \sum_{p \leq i+j \leq q} |a_i| |b_j| \\ &\leq \sum_{i=n}^q |a_i| \sum_{j=0}^q |b_j| + \sum_{j=n}^q |b_j| \sum_{i=0}^q |a_i| \leq B \sum_{i=n}^q |a_i| + A \sum_{j=n}^q |b_j|. \end{aligned} \tag{6.5}$$

Poiché il secondo membro tende a zero per $p, q \rightarrow +\infty$, la successione delle somme parziali della serie $\sum_{j=0}^{\infty} (a * b)_j$ è una successione di Cauchy. Il criterio di Cauchy implica dunque che la serie $\sum_{j=0}^{\infty} (a * b)_j$ converge assolutamente. Si ha poi per $p \geq 0$

$$\begin{aligned}
& \left| \sum_{k=0}^{2p} \sum_{i+j=k} a_j b_j - \sum_{j=0}^p a_j \sum_{j=0}^p b_j \right| \\
& \leq \sum_{j=p}^{2p} |b_j| \sum_{i=0}^p |a_i| + \sum_{i=p}^{2p} |a_i| \sum_{j=0}^p |b_j| \leq A \sum_{j=p}^{\infty} |b_j| + B \sum_{j=p}^{\infty} |a_j|.
\end{aligned} \tag{6.6}$$

Poiché il secondo membro tende a zero per $p \rightarrow \infty$, segue dal criterio del confronto che

$$\sum_{k=0}^{\infty} (a * b)_k = \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k \right).$$

□

6.17 Corollario. Siano $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ e $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ due serie di potenze con raggio rispettivamente ρ, σ con $\rho < \sigma$. Allora la serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} (a * b)_n z^n$ ha raggio di convergenza maggiore o uguale a ρ e

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a * b)_n z^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \right) \quad \forall z \text{ con } |z| < \rho.$$

6.18 Esercizio. Mostrare che

$$\frac{1}{(1-z)^{m+1}} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{m+k}{m} z^k, \quad \frac{z^m}{(1-z)^m} = \sum_{k=0}^m \binom{k}{m} z^k.$$

6.g Serie di prodotti

6.19 Teorema. Siano $A(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ e $B(z) := \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ le somme di due serie di potenze con raggi di convergenza rispettivamente $a > 0$ e $b > 0$. Allora la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n z^n$$

ha raggio di convergenza $\rho \geq ab$. Inoltre per ogni z con $|z| < ab$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n z^n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial^+ B(0,r)} A(w) B\left(\frac{z}{w}\right) \frac{1}{w} dw$$

dove r è un qualunque numero tale che $\frac{|z|}{b} < r < a$.

Dimostrazione. La serie $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \sigma^n$ converge assolutamente per $|\sigma| < b/|z|$ e uniformemente sui compatti del cerchio di convergenza $|\sigma| < b/|z|$. Perciò la serie di potenze in $1/w$ data da $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n w^{-n}$ converge assolutamente in $\{|w| > |z|/b\}$ e uniformemente sui compatti strettamente contenuti. In particolare la successione di funzioni

$$s_n(w) := \left(\sum_{i=1}^n a_i w^i \right) \left(\sum_{j=1}^n b_j z^j w^{-j} \right)$$

converge assolutamente sulla corona $\{w \mid |z|/b < |w| < a\}$ a $A(w)B(z/w)$ e la convergenza è uniforme sui compatti contenuti nella corona, in particolare su $\partial^+ B(0, r)$. Segue

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial^+ B(0,r)} A(w) B\left(\frac{z}{w}\right) \frac{1}{w} dw = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial^+ B(0,r)} s_n(w) dw. \tag{6.7}$$

Calcoliamo ora i termini a destra nella (6.7). Si ha

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial^+ B(0,r)} s_n(w) dw &= \sum_{i,j=0,n} a_i b_j z^j \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial^+ B(0,r)} w^{i-j-1} dw \right) \\ &= \sum_{i=1}^n a_i b_i z^i \end{aligned}$$

essendo

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial^+ B(0,r)} w^{-k-1} dw = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ikt} dt = \begin{cases} 1 & \text{se } k = 0, \\ 0 & \text{se } k \neq 0. \end{cases}$$

□

7. I teoremi fondamentali sulle funzioni olomorfe

In questo paragrafo proviamo i teoremi fondamentali sulle funzioni olomorfe. In particolare proveremo che le funzioni olomorfe sono tutte e sole quelle funzioni che sono localmente la somma di una serie di potenze.

7.a Domini regolari

Un aperto connesso di \mathbb{C} si chiama anche un *dominio* di \mathbb{C} . Diciamo che A è un *dominio regolare* se A è un dominio la cui frontiera è l'unione delle immagini di un numero finito di curve semplici chiuse C^1 a tratti che si toccano eventualmente sugli estremi. In particolare, per tutti i punti x del bordo ∂A tranne al più un numero finito, è definita la normale esterna ad A in x ; indicheremo quindi con $\partial^+ A$ una curva C^1 a tratti che percorre il bordo di A in senso antiorario, i.e., lasciando alla sua destra la normale esterna ad A . La curva $\partial^+ A$, pur non essendo univocamente definita, si chiama con un qualche abuso di linguaggio la *frontiera orientata in senso antiorario*, di A . In ogni caso, se $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ è continua, l'integrale

$$\int_{\partial^+ A} f(z) dz$$

è univocamente definito, non dipendendo dalla parametrizzazione scelta nel percorrere ∂A in senso antiorario.

Sia Ω un aperto e $A \subset \Omega$ un dominio regolare di \mathbb{C} . È falso in generale che se $R \subset \Omega$ è un rettangolo, allora $A \cap R$ sia ancora un dominio regolare di \mathbb{C} , cfr. Figura 7.1. Diremo che $A \subset \subset \Omega$ è un *dominio elementare* per Ω se esiste una quadrettatura di \mathbb{C} tale che per ogni quadrato aperto R della quadrettatura tale che $R \cap A \neq \emptyset$ si abbia

- (i) $R \subset \Omega$,
- (ii) $R \cap A$ sia un dominio regolare di \mathbb{C} .

Non è il caso di discutere questa definizione, anche perché a posteriori risulterà del tutto superflua. Per quel che segue basta osservare che i domini piccoli $A \subset \subset \Omega$, i rettangoli $R \subset \subset \Omega$, le palle $B(z, r) \subset \subset \Omega$, le corone $A(z, r, R) := \{w \in \mathbb{C} \mid r < |w - z| < R\} \subset \subset \Omega$ e gli insiemi del tipo $A := B(z_0, r) \setminus \overline{B(z, \delta)}$ con $B(z, \delta) \subset B(z_0, r) \subset \subset \Omega$ sono domini elementari.

7.1 Proposizione. *Sia $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione continua definita su un dominio $\Omega \subset \mathbb{C}$. Sono fatti equivalenti*

- (i) per ogni rettangolo $R \subset \Omega$ con i lati paralleli agli assi, si ha $\int_{\partial^+ R} f(z) dz = 0$,

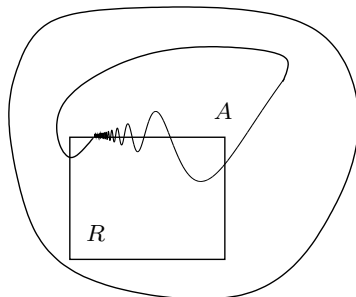


Figura 7.1. A è un dominio elementare, ma $A \cap R$ non lo è.

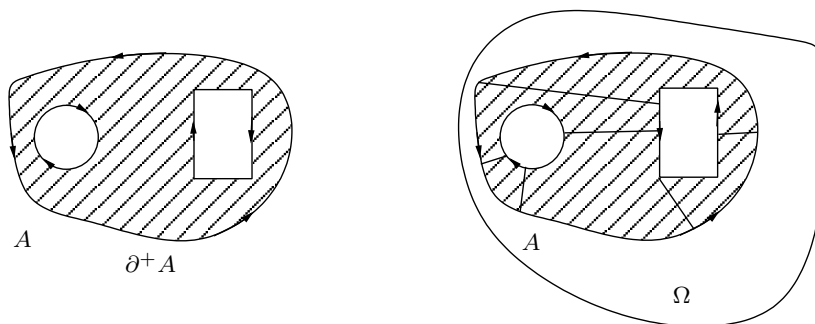


Figura 7.2. (a) Un dominio $A \subset \mathbb{C}$. (b) A è un dominio elementare in Ω .

(ii) per ogni dominio elementare A in Ω si ha

$$\int_{\partial^+ A} f(z) dz = 0.$$

Dimostrazione. Va provato che (i) implica (ii). Sia R un rettangolo con i lati paralleli agli assi contenuto in Ω . Segue da (i) e dalla Proposizione 2.9 che f ha una primitiva olomorfa $F_R(z)$ su R e quindi

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_0^1 f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt = \int_0^1 \frac{d}{dt} F(\gamma(t)) = F(\gamma(1)) - F(\gamma(0))$$

per ogni curva γ C^1 a tratti contenuta in R , in particolare

$$\int_{\partial^+ A} f(z) dz = 0$$

per ogni dominio ammissibile $A \subset R$. Se ora $A = \cup_{i=1}^N A_i$ con A_i domini disgiunti contenuti ciascuno in un rettangolo $R_i \subset \Omega$, si osserva che gli archi di curva in comune a più di un A_i sono percorsi esattamente due volte con orientazione opposta. Perciò gli integrali sui tratti in comune si elidono e quindi

$$\int_{\partial^+ A} f(z) dz = \sum_{i=1}^N \int_{\partial^+ A_i} f(z) dz = 0.$$

□

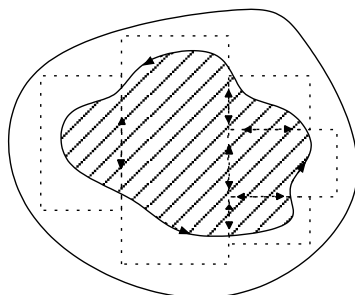


Figura 7.3. Illustrazione della dimostrazione della Proposizione 7.1.

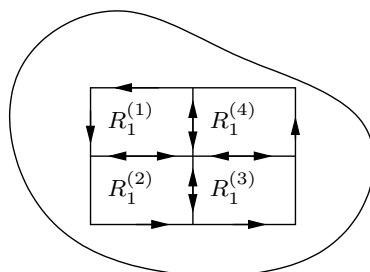


Figura 7.4. Illustrazione della dimostrazione del teorema di Goursat.

7.b Teorema di Goursat

7.2 Teorema (Goursat). Sia Ω un dominio di \mathbb{C} e $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Allora f ha localmente primitive olomorfe e

$$\int_{\partial+A} f(z) dz = 0$$

per ogni dominio elementare $A \subset \Omega$.

Dimostrazione. Per la Proposizione 7.1, basta provare che per ogni rettangolo $R \subset \Omega$ con i lati paralleli agli assi, si ha $\int_{\partial+R} f(z), dz = 0$. Diamo la dimostrazione dovuta a Edouard Goursat (1858–1936).

Sia R un rettangolo con lati paralleli agli assi strettamente contenuto in Ω . L'integrale $\int_{\partial+R} f(z) dz$ è allora ben definito (f è continua in Ω). Supponiamo

$$\eta(R) := \int_{\partial+R} f(z) dz \neq 0. \tag{7.1}$$

Dividiamo R in quattro rettangoli uguali $R_1^{(1)}, \dots, R_1^{(4)}$. Poiché i segmenti dei bordi comuni a due rettangoli si elidono, si ha

$$\eta(R) = \sum_{i=1}^4 \eta(R_1^{(i)}).$$

Segue che per almeno uno di essi $R_1 := R_1^{(j)}$

$$|\eta(R_1)| \geq \frac{1}{4} |\eta(R)|$$

Dividendo R_1 in quattro e procedendo per induzione, si costruisce una successione di rettangoli R_n uno dentro l'altro tali che $\text{diag}(R_n) = 2^{-n} \text{diag}(R)$, $\text{Perimetro}(R_n) = 2^{-n} \text{Perimetro}(R)$ e

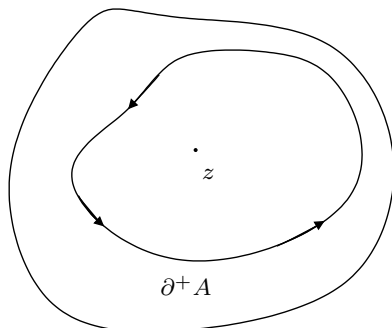


Figura 7.5. $\partial^+ A$.

$$|\eta(R_n)| \geq 4^{-n} |\eta(R)|. \tag{7.2}$$

Sia ora $z^* = \cap_n \overline{R_n}$. Dalla definizione di olomorfia, per ogni $\epsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ e \bar{n} tali che per ogni $n \geq \bar{n}$ si ha $\overline{R_n} \subset B(z^*, \delta)$ e

$$|f(z) - f(z^*) - f'(z^*)(z - z^*)| \leq \epsilon |z - z^*| \quad \forall z \in B(z^*, \delta)$$

da cui per ogni n sufficientemente grande si ha

$$\begin{aligned} |\eta(R_n)| &= \left| \int_{\partial^+ R_n} (f(z) - f(z^*) - f'(z^*)(z - z^*)) dz \right| \\ &\leq \epsilon \int_{\partial^+ R_n} |z - z^*| dz \leq \epsilon \text{diag}(R_n) \text{ Perimetro}(R_n) \\ &\leq c 4^{-n} \epsilon. \end{aligned}$$

Si ottiene quindi dalla (7.2) che $|\eta(R)| \leq c\epsilon$. Essendo ϵ arbitrario, si conclude che $\eta(R) = 0$. \square

7.3 Esercizio. Siano Ω un dominio di \mathbb{C} e $z_0 \in A \subset B \subset \Omega$. Se A e B sono domini ammissibili per Ω , allora

$$\int_{\partial^+ A} f(z) dz = \int_{\partial^+ B} f(z) dz \quad \forall f \in \mathcal{H}(\Omega).$$

7.c Formula di Cauchy

7.4 Teorema (Formula di Cauchy, I). Se $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, vale la formula di Cauchy: per ogni dominio elementare $A \subset \subset \Omega$ e ogni $z \in A$ si ha

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial^+ A} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Dimostrazione. La funzione $f(\zeta)/(\zeta - z)$ è olomorfa in $\Omega \setminus \{z\}$. Sia δ_0 sufficientemente piccolo in modo che $B(z, \delta_0) \subset A$. Per ogni $\delta, 0 < \delta \leq \delta_0$ l'insieme $A \setminus \overline{B(z, \delta)}$ è un dominio elementare per $\Omega \setminus \{z\}$. Segue dal Teorema 7.2

$$\int_{\partial^+ B(z, \delta)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \int_{\partial^+ A} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \quad \forall \delta \leq \delta_0.$$

D'altra parte, essendo f continua in z ,

$$\left| \int_{\partial^+ B(z, \delta)} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta \right| \leq \frac{1}{\delta} (2\pi \delta) \sup_{\zeta \in B(z, \delta)} |f(\zeta) - f(z)| = o(1) \quad \text{per } \delta \rightarrow 0.$$

Inoltre, parametrizzando $\partial^+ B(z, \delta)$ con $\zeta = z + \delta e^{i\theta}$, $\theta \in [0, 2\pi[$, si trova

$$\int_{\partial^+ B(z, \delta)} \frac{d\zeta}{\zeta - z} = \int_0^{2\pi} \frac{\delta i e^{i\theta}}{\delta e^{i\theta}} d\theta = 2\pi i \quad \forall \delta.$$

In conclusione, per $\delta \rightarrow 0$,

$$\int_{\partial^+ A} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = f(z) \int_{\partial^+ B(z, \delta_0)} \frac{1}{\zeta - z} d\zeta + o(1) = 2\pi i f(z) + o(1)$$

Segue che $o(1)$ è identicamente nullo e quindi la tesi. \square

7.d Formula di Cauchy e serie di potenze

Segue dalla formula di Cauchy e dal teorema di derivazione sotto il segno di integrale che ogni $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ è $C^\infty(\Omega)$ e per ogni dominio elementare $A \subset \Omega$ e ogni $z \in A$

$$f^{(k)}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial^+ A} f(\zeta) \frac{d^k}{dz^k} \frac{1}{(\zeta - z)} dz = \frac{k!}{2\pi i} \int_{\partial^+ A} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}} dz. \quad (7.3)$$

Di più, si ha

7.5 Teorema. *Sia $\Omega \subset \mathbb{C}$ un dominio. Ogni funzione $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ è localmente la somma di una serie di potenze. Precisamente per ogni $z_0 \in \Omega$*

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k, \quad z \in B(z_0, \rho),$$

dove $\rho := \text{dist}(z_0, \partial\Omega)$ e per ogni k

$$a_k := \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial^+ A} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} d\zeta, \quad (7.4)$$

essendo A un arbitrario dominio elementare per Ω contenente z_0 .

Proviamo prima il seguente

7.6 Lemma. *Sia $f : \overline{B(z_0, r)} \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione continua su $\overline{B(z_0, r)}$ tale che*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial^+ B(z_0, r)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \quad \forall z \in B(z_0, r).$$

Allora $f(z)$ è la somma della serie di potenze complessa

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k, \quad \forall z \in B(z_0, r)$$

dove per ogni k

$$a_k := \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial^+ B(z_0, r)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} d\zeta$$

Dimostrazione. Per ogni ζ con $|\zeta - z_0| = r$ si ha

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - z_0} \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}} = \frac{1}{\zeta - z_0} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^k.$$

e la convergenza è totale (al variare di ζ) essendo $|\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}| = \frac{|z - z_0|}{r} < 1$. Perciò integrando termine a termine,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial^+ B(z_0, r)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial^+ B(z_0, r)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} d\zeta \right) (z - z_0)^k.$$

□

Dimostrazione del Teorema 7.5. Se $z \in B(z_0, \rho)$ e r è tale che $|z - z_0| < r < \rho$. Per la formula di Cauchy

$$f(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial^+ B(z_0, r)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - w} d\zeta \quad \forall w \in B(z_0, r).$$

Segue quindi dal Lemma 7.6 che $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$ con

$$a_k := \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial^+ B(z_0, r)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} d\zeta.$$

Si osserva ora che la funzione $g(\zeta) := f(\zeta)/(\zeta - z_0)^{k+1}$ è olomorfa in $\Omega \setminus \{z_0\}$ e dunque se $B(z_0, \epsilon) \subset A$

$$\int_{\partial^+ B(z_0, r)} g(\zeta) d\zeta = \int_{\partial^+ B(z_0, \epsilon)} g(\zeta) d\zeta = \int_{\partial^+ A} g(\zeta) d\zeta.$$

applicando il Teorema 7.2 rispettivamente ai domini ammissibili per $B(z_0, r) \setminus B(z_0, \epsilon)$ e $A \setminus B(z_0, \epsilon)$. □

Essendo ogni funzione olomorfa localmente la somma di una serie di potenze, la sua derivata è anch'essa localmente la somma di una serie di potenze, quindi una funzione olomorfa per la Proposizione 6.12

7.7 Corollario. *Sia Ω un dominio di \mathbb{C} . Se $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, allora $f' \in \mathcal{H}(\Omega)$. Quindi $f \in C^\infty(\Omega)$ e tutte le derivate complesse di f sono olomorfe in Ω .*

Segue inoltre

7.8 Corollario. *Sia $f : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione. Sono fatti equivalenti*

- (i) $f \in \mathcal{H}(\Omega)$,
- (ii) f ha localmente primitive olomorfe,
- (iii) $\int_{\partial^+ A} f(z) dz = 0$ per ogni dominio elementare A per Ω ,
- (iv) vale la formula di Cauchy: per ogni dominio elementare A per Ω si ha

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial^+ A} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \quad \forall z \in A,$$

- (v) f è localmente la somma di una serie di potenze.

Dimostrazione. (i) \Rightarrow (ii) è il Teorema 7.2. L'equivalenza fra (ii) (iii) è contenuta nella Proposizione 7.1. L'implicazione (i) \Rightarrow (iv), (iv) \Rightarrow (v), (v) \Rightarrow (i) sono rispettivamente i Teoremi 7.4, 7.5 e 6.11.

Resta da provare che (iii) \Rightarrow (i). Se vale la (iii) f è localmente la derivata di una funzione olomorfa. È quindi a sua volta una funzione olomorfa per il Corollario 7.7. □

7.9 Osservazione. L'implicazione f olomorfa $\Rightarrow f \in C^1(\Omega)$ è riferita in letteratura come *teorema di Goursat*, mentre l'equivalenza tra (i) e (iii) è nota come *teorema di Morera*.

7.e Punti singolari e raggio di convergenza

7.10 Definizione. Sia $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ olomorfa e $z_0 \in \partial\Omega$. Si dice che z_0 è un punto singolare per f se non esiste un intorno $B(z_0, \delta)$ di z_0 e una funzione olomorfa \hat{f} definita in $B(z_0, \delta)$ tale che $\hat{f} = f$ in $B(z_0, \delta) \cap \Omega$.

Il teorema seguente dà una proprietà della somma di una serie di potenze complessa.

7.11 Teorema. Sia $f : B(z_0, \rho) \rightarrow \mathbb{C}$ la somma di una serie di potenze di raggio di convergenza $\rho > 0$,

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k.$$

Esiste almeno un punto $\zeta \in \partial B(z_0, \rho)$ singolare per f .

Dimostrazione. Sia $\Omega \supset B(z_0, \rho)$ l'aperto più grande sui cui è possibile estendere f . Per definizione ogni punto $\zeta \in \partial\Omega$ è un punto singolare per f . Poiché l'estensione di f ha sviluppo in serie di potenze centrate in z_0 con raggio $d(z_0, \partial\Omega)$, deve necessariamente essere $\rho = \text{dist}(z_0, \partial\Omega)$. Essendo $\partial\Omega$ chiuso, esiste almeno un punto $\zeta_0 \in \partial\Omega$ tale che $|\zeta_0 - z_0| = \rho$. Per costruzione $\zeta_0 \in \partial\Omega \cap \partial B(z_0, \rho)$ i.e., è un punto singolare per f su $\partial B(z_0, \rho)$. \square

8. Qualche conseguenza

8.a Teorema di Liouville

Sia $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Dalle (6.3) e (7.4) o dalla (7.3) seguono le *stime di Cauchy*

$$|f^{(k)}(z_0)| \leq \frac{k!}{r^k} \max_{\partial B(z_0, r)} |f(z)| \quad (8.1)$$

per ogni $z_0 \in \Omega$ e $r < \text{dist}(z_0, \partial\Omega)$ Sono stime particolarmente stringenti. Segue ad esempio il famoso

8.1 Teorema (Liouville). *Le uniche funzioni olomorfe e limitate in tutto \mathbb{C} sono le costanti.*

Dimostrazione. Supponiamo che $|f(z)| \leq M \forall z \in \mathbb{C}$. Si ha allora per ogni $r > 0$ e ogni $z \in \mathbb{C}$

$$|f'(z)| \leq \frac{M}{r}$$

e quindi $f'(z) = 0$ per ogni $z \in \mathbb{C}$. Segue dal teorema fondamentale del calcolo che f è costante. \square

Una applicazione del teorema di Liouville dà una nuova dimostrazione del

8.2 Teorema (fondamentale dell'algebra). *Un polinomio complesso di grado n ha n radici.*

Dimostrazione. Basta provare che ogni polinomio complesso non costante ha almeno una radice. Supponiamo dunque per assurdo che $P(z)$ sia un polinomio non costante e che $P(z) \neq 0 \forall z$. Allora $1/P(z)$ è olomorfa su tutto \mathbb{C} . Essendo d'altra parte P non costante, $\lim_{|z| \rightarrow \infty} |P(z)| = +\infty$ e $1/P(z)$ sarebbe limitata. Seguirebbe dal teorema di Liouville che $1/P(z)$ è costante. Un assurdo. \square

Abbiamo in realtà provato

8.3 Teorema. *Sia $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione olomorfa su tutto \mathbb{C} con $|f(z)| \geq M > 0$ per $|z| > R$. Allora o $f(z)$ è costante o f ha uno zero.*

8.b Principio di identità

Se una funzione olomorfa f in Ω ha in un punto z_0 tutte le derivate nulle, per la (6.3) f è la somma della serie di potenze nulla e quindi è nulla in un intorno di z_0 . L'insieme

$$X(f) := \left\{ z \in \Omega \mid f^{(k)}(z) = 0 \ \forall k \right\}$$

è allora aperto. Poiché d'altra parte $X(f)$ è evidentemente chiuso, si conclude che $X(f)$ è la componente connessa di Ω che contiene z_0 . Perciò $X(f) = \Omega$. Si è provato che

8.4 Teorema (Principio di identità). *Se f e g sono funzioni olomorfe in un dominio (connesso) Ω e in un punto $z_0 \in \Omega$ si abbia $f^{(k)}(z_0) = g^{(k)}(z_0)$ per ogni k , allora $f = g$ in Ω .*

Per $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ sia

$$Z(f) := \left\{ z \in \Omega \mid f(z) = 0 \right\}$$

l'insieme degli zeri di f . Si ha anche

8.5 Teorema. *Sia $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ non identicamente nulla in un dominio $\Omega \subset \mathbb{C}$. Allora $Z(f)$ è discreto e senza punti di accumulazione.*

Dimostrazione. Essendo $Z(f)$ chiuso, basta provare che $Z(f)$ è discreto. Sia $z_0 \in Z(f)$. Sia k il primo intero non negativo per cui $f^{(k)}(z_0) \neq 0$. Si scrive allora in un intorno U di z_0

$$f(z) = \sum_{j=k}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} (z - z_0)^j = (z - z_0)^k g(z)$$

con $g(z_0) \neq 0$. Essendo $g(z) \neq 0$ in un intorno U di z_0 , f non ha altri zeri in U . \square

In conclusione si ha

8.6 Teorema (Principio di identità). *Siano f e g olomorfe in un dominio $\Omega \subset \mathbb{C}$. Sono fatti equivalenti*

- (i) $f = g$ in Ω ,
- (ii) esiste $z_0 \in \Omega$ tale che $\forall k$ si ha $f^{(k)}(z_0) = g^{(k)}(z_0)$,
- (iii) l'insieme $\{z \in \Omega \mid f(z) = g(z)\}$ ha almeno un punto di accumulazione.

8.c Principio di massimo

Sia Ω un dominio limitato di \mathbb{C} e $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Se $\overline{B(z_0, r)} \subset \Omega$, abbiamo dalla formula di Cauchy

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) d\theta. \quad (8.2)$$

Si dice che f ha la *proprietà della media*. Una conseguenza di (8.2) è

8.7 Teorema (Principio di massimo). *Sia $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Se $|f|$ ha un massimo relativo interno, allora f è costante.*

Dimostrazione. Sia z_0 un punto di massimo relativo interno per $|f|$. Ovviamente

$$\begin{aligned} \Re(f(z_0) - f(z)) &\geq 0 && \text{per } z \in B(z_0, r_0), \\ \Re(f(z_0) - f(z)) &= 0 && \text{se e solo se } f(z) = f(z_0). \end{aligned}$$

Per ogni $r < r_0$ fissato, per la proprietà della media, la funzione non negativa $t \rightarrow \Re(f(z_0) - f(z_0 + re^{i\theta}))$, $t \in [0, 2\pi]$ ha integrale nullo,

$$\int_0^{2\pi} \Re(f(z_0) - f(z_0 + re^{i\theta})) d\theta = 0;$$

conseguentemente $f(z) = f(z_0)$ su tutto il cerchio $\partial B(z_0, r)$ e, per l'arbitrarietà di r , f è costante in $B(z_0, r_0)$. Essendo Ω connesso, si deduce che f è costante in Ω . \square

Una conseguenza immediata è il cosiddetto

8.8 Teorema (Principio di massimo). *Se $f \in \mathcal{H}(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$, allora*

$$|f(z)| \leq \sup_{\partial\Omega} |f(z)| \quad \forall z \in \overline{\Omega}$$

e, se f non è costante,

$$|f(z)| < \sup_{\partial\Omega} |f(z)| \quad z \in \Omega.$$

8.9 Corollario. *Sia $F \in \mathcal{H}(\Omega)$ e sia $B(z_0, r) \subset\subset \Omega$ una palla. Se*

$$|f(z_0)| < \min\{|f(\zeta)| \mid \zeta \in \partial B(z_0, r)\}$$

allora f ha uno zero in $B(z_0, r)$.

Dimostrazione. Per assurdo $f \neq 0$ in $B(z_0, r)$, la funzione $g(z) := 1/f(z)$ sarebbe olomorfa in aperto Ω' tale che $B(z_0, r) \subset\subset \Omega'$. Si avrebbe allora dal principio di massimo che

$$|g(z_0)| \leq \sup_{\zeta \in \partial B(z_0, r)} |g(\zeta)|$$

i.e.

$$\min\{|f(\zeta)| \mid \zeta \in \partial B(z_0, r)\} \leq |f(z_0)|.$$

Un assurdo. \square

8.d Invertibilità di funzioni olomorfe

8.10 Teorema (Inversa locale di una funzione olomorfa). *Siano $\Omega \subset \mathbb{C}$ aperto, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ olomorfa e $z_0 \in \Omega$. Se $f'(z_0) \neq 0$, allora*

- (i) *esiste un intorno U_{z_0} di z_0 tale che $f : U_{z_0} \rightarrow \mathbb{C}$ è aperta e invertibile,*
- (ii) *l'inversa $g := (f|_{U_{z_0}})^{-1}$ di $f|_{U_{z_0}}$ è olomorfa in $f(U_{z_0})$ e*

$$g'(w) = \frac{1}{f'(g(w))} \quad \forall w \in f(U_{z_0}).$$

Dimostrazione. Identifichiamo \mathbb{R}^2 con \mathbb{C} e indichiamo con f la stessa funzione $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Essendo f olomorfa,

$$\mathbf{D}f(z) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

se $f_x := a + ib$. Perciò

$$0 \neq |f'(z)|^2 = |f_x(z)|^2 = a^2 + b^2 = \det \mathbf{D}f(z).$$

Poiché ogni funzione olomorfa è di classe C^1 , cfr. Corollario 7.7, segue dal teorema di invertibilità che esiste U_{z_0} tale che $f|_{U_{z_0}}$ è aperta, invertibile con inversa $g \in C^1(f(U_{z_0}))$. Resta da provare che g è olomorfa. Siano $v, w \in f(U_{z_0})$ e $s := g(v)$, $z = g(w)$ in U_{z_0} . Poiché g è continua se $v \rightarrow w$ allora $s = g(v) \rightarrow z = g(w)$ e quindi per $v \rightarrow w$ si ha

$$\frac{g(v) - g(w)}{v - w} = \frac{s - z}{f(s) - f(z)} \rightarrow \frac{1}{f'(z)}.$$

□

Si dimostra anche con un certo lavoro che

8.11 Teorema. *Sia $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ biunivoca. Allora f' non è mai zero, $f(\Omega)$ è aperto e $f^{-1} : f(\Omega) \rightarrow \Omega$ è olomorfa con $Df^{-1}(y) = 1/f'(f^{-1}(f(y)))$.*

9. Funzioni olomorfe e campi irrotazionali

Le funzioni olomorfe descrivono i campi irrotazionali piani.

9.a Potenziali e primitive olomorfe

Sia Ω aperto in \mathbb{C} e $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Decomponendo f in parte reale e immaginaria $f = u + iv$

$$f(z) dz = (u + iv)(dx + idy) = (udx - vdy) + i(vdx + udy). \quad (9.1)$$

i.e., le parti reale e immaginaria di $f(z) dz$ sono forme differenziali reali in Ω , e le componenti (v, u) della parte immaginaria si ottengono ruotando le componenti $(u, -v)$ della parte reale in senso antiorario di $\pi/2$. Inoltre se $\gamma : [0, 1] \rightarrow \Omega$ è una curva C^1 a tratti e $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$, si ha

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(z) dz &:= \int_0^1 f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt = \int_0^1 (ux' - vy') dt + i \int_0^1 (uy' + vx') dt \\ &= \int_{\gamma} (u dx - v dy) + i \int_{\gamma} (u dy + v dx) \end{aligned}$$

è proprio l'integrale lungo γ , o *lavoro*, dei campi $E + iE^\perp$, $E := (u, -v)$ e $E^\perp := (v, u)$. Sia $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, $f = u + iv$, e siano α e $\beta : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ potenziali di classe C^1 rispettivamente per i campi $(u, -v)$ e (v, u) , i.e.,

$$\begin{cases} \alpha_x = u, \\ \alpha_y = -v, \end{cases} \quad \begin{cases} \beta_x = v, \\ \beta_y = u. \end{cases}$$

che possiamo riscrivere come

$$\begin{cases} F_x = \alpha_x + i\beta_x = u + iv = f, \\ F_y = \alpha_y + i\beta_y = -v + iu = if. \end{cases}$$

Perciò F è olomorfa e si conclude

9.1 Proposizione. $f = u + iv \in \mathcal{H}(\Omega)$ ha una primitiva olomorfa in Ω se e solo se i campi $(u, -v)$ e (v, u) sono conservativi in Ω . Inoltre $F \in \mathcal{H}(\Omega)$ e $F' = f$ in Ω se e solo se $\Re(F(z))$ e $\Im(F(z))$ sono rispettivamente potenziali per i campi $(u, -v)$ e (v, u) in Ω .

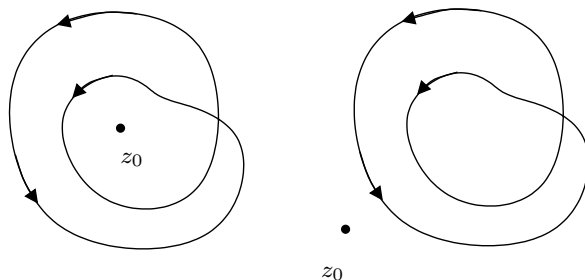


Figura 9.1. (a) $I(\gamma, z_0) = 2$, (b) $I(\gamma, z_0) = 0$.

9.b Funzioni olomorfe e forme chiuse

Sia $f = u + iv : \Omega \subset \mathbb{C}$ differenziabile. Ricordiamo che f è olomorfa se e solo se sono verificate le equazioni di Cauchy–Riemann.

$$\begin{cases} u_y = v_x, \\ u_x = -v_y. \end{cases}$$

Osserviamo che queste sono le condizioni che dicono che i campi $(u, -v)$ e (v, u) sono irrotazionali e dunque, ricordando anche che le funzioni olomorfe sono C^1 , otteniamo

9.2 Proposizione. *Sia $f = u + iv : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$. Allora $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ se e solo se f è di classe C^1 e i campi $(u, -v)$ e (v, u) sono irrotazionali.*

La teoria dei campi irrotazionali si applica quindi al calcolo degli integrali di linea di funzioni olomorfe. Perciò

9.3 Teorema (Invarianza per omotopia). *Siano $\Omega \subset \mathbb{C}$ aperto e $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Se $\gamma, \delta : [0, 1] \rightarrow \Omega$ sono due curve C^1 a tratti omotope fra loro in Ω , allora*

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\delta} f(z) dz,$$

9.c Indice di allacciamento

Sia $\gamma : [0, 1] \rightarrow \Omega$ una curva chiusa di classe C^1 a tratti, e sia $z \in \mathbb{C}$ con z non appartenente all'immagine di γ . L'indice di allacciamento di γ rispetto a z , è il numero

$$I(\gamma, z) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{d\zeta}{\zeta - z}.$$

9.4 Esercizio. Se $\gamma(t) := z + e^{ikt}$, $t \in [0, 2\pi]$ e $k \in \mathbb{Z}$, allora

$$I(\gamma, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{ike^{ikt}}{e^{ikt}} dt = k.$$

9.5 Esercizio. Sia $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ una curva C^1 che non passa per z , e

$$\gamma(t) \quad \text{e} \quad \delta(t) := z + \frac{\gamma(t) - z}{|\gamma(t) - z|}$$

la curva “proiettata da z sul cerchio di centro z e raggio 1. Si vede subito che la retrazione di $\mathbb{C} \setminus \{z\}$ su $\partial B(z, 1)$,

$$h(t, s) = (1 - s)\gamma(t) + s\delta(t), \quad t, s \in [0, 1].$$

è una omotopia tra γ e δ in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Poiché $\zeta \rightarrow \frac{1}{\zeta - z}$ è olomorfa in $\mathbb{C} \setminus \{z\}$, segue dal Teorema 9.3 che

$$I(\gamma, z) = I(\delta, z).$$

Si può provare

9.6 Teorema. Siano $\gamma, \delta : [0, 1] \rightarrow \Omega$ due curve regolari e $z \in \Omega$.

- (i) l'indice di allacciamento attorno a z è lo stesso per curve omotope in $\mathbb{C} \setminus \{z\}$,
- (ii) l'indice di allacciamento è un intero,
- (iii) per ogni intero $k \in \mathbb{Z}$ esiste una curva passante per $z_0 \neq z$ con indice di allacciamento intorno a z uguale a k ,
- (iv) due curve sono omotope in $\mathbb{C} \setminus \{z\}$ se e solo se hanno lo stesso indice di allacciamento attorno a z .

Una semplice applicazione dell'indice di allacciamento è la seguente generalizzazione della formula di Cauchy.

9.7 Teorema (formula di Cauchy, II). Sia Ω un dominio di \mathbb{C} e $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Se $\gamma : [0, 1] \rightarrow \Omega$ è una curva chiusa C^1 a tratti in Ω , allora

$$I(\gamma, z)f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

per ogni $z \notin \gamma([0, 1])$.

Dimostrazione. Sia $r > 0$ tale che $B(z, r) \subset \Omega$ e sia $k := I(\gamma, z)$. Allora γ è omotopa in $\mathbb{C} \setminus \{z\}$ a $\delta(t) := z + re^{ikt}$, $t \in [0, 2\pi]$ perché $I(\gamma, z) = k = I(\delta, z)$. Dalla periodicità di e^{it} e dalla formula di Cauchy, Teorema 7.2, segue che

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta &= \int_{\delta} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \int_0^{2\pi} \frac{f(e^{ikt})}{e^{ikt}} ike^{ikt} dt = ik \int_0^{2\pi} f(e^{ikt}) dt \\ &= k \int_{\partial^+ B(z, r)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = 2\pi k i f(z). \end{aligned}$$

□

9.8 Esercizio. Sia $\Omega \subset \mathbb{C}$ aperto e A un dominio ammissibile per Ω . Allora

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \begin{cases} f(z) & \text{se } z \in A, \\ 0 & \text{se } z \notin \overline{A}. \end{cases}$$

[Sugg. Mostrare che

$$I(\partial^+ A, z) = \begin{cases} 1 & \text{se } z \in A, \\ 0 & \text{se } z \notin \overline{A}. \end{cases}$$

10. Singolarità puntuali

Cominciamo con una osservazione sugli zeri di una funzione olomorfa. Diciamo che $z_0 \in \Omega$ è uno zero di ordine m per $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ se lo sviluppo di f in serie di potenze centrato in z_0 ha la forma

$$f(z) = \sum_{k=m}^{\infty} a_k (z - z_0)^k = (z - z_0)^m \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+m} (z - z_0)^k$$

con $a_m \neq 0$. Perciò

10.1 Proposizione. *Siano $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ e $z_0 \in \Omega$. Sono fatti equivalenti*

- (i) f ha uno zero di ordine m in z_0 ,
- (ii) $f(z_0) = f'(z_0) = f''(z_0) = \dots = f^{(m-1)}(z_0) = 0$ e $f^{(m)}(z_0) \neq 0$,
- (iii) esiste $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ tale che $f(z) = (z - z_0)^m g(z)$ con $g(z_0) \neq 0$,
- (iv) m è il più grande intero k per cui $f(z)/(z - z_0)^k$ ha una singolarità eliminabile in z_0 .

Sia $\Omega \subset \mathbb{C}$ aperto e $z_0 \in \Omega$. Se $f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus \{z_0\})$, si dice che z_0 è una *singolarità* per f . Si dice che $f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus \{z_0\})$ si estende in modo olomorfo in z_0 se esiste una funzione $F \in \mathcal{H}(\Omega)$ tale che $F = f$ su $\Omega \setminus \{z_0\}$. Se $f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus \{z_0\})$ si estende in modo olomorfo a tutto Ω , si dice che z_0 è una *singolarità eliminabile* per f . Una singolarità z_0 *non eliminabile* per $f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus \{z_0\})$ si chiama anche *punto singolare* per f .

Distinguiamo tre casi

10.a Singolarità eliminabili

10.2 Teorema (Estensione di Riemann). *Sia $f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus \{z_0\})$. Sono fatti equivalenti*

- (i) z_0 è una singolarità eliminabile per f ,
- (ii) f si estende in modo olomorfo in z_0 ,
- (iii) f è limitata in un intorno di z_0 ,
- (iv) $\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)f(z) = 0$.

Dimostrazione. Ovviamente (i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (iv). Proviamo che (iv) \Rightarrow (i). Siano

$$g(z) := \begin{cases} (z - z_0)f(z) & \text{se } z \in \mathbb{C} \setminus \{z_0\} \\ 0 & \text{se } z = z_0 \end{cases}, \quad \text{e} \quad h(z) := (z - z_0)g(z).$$

L'ipotesi (iv) è equivalente alla continuità di $g(z)$ in z_0 , conseguentemente

$$h(z) - h(0) = h(z) = (z - z_0)g(z_0) + (z - z_0)o(1) \quad \text{per } z \rightarrow z_0.$$

In altre parole $h(z)$ è derivabile in senso complesso in z_0 con $h'(z_0) = g(z_0) = 0$. Perciò $h \in \mathcal{H}(\Omega)$, e per la Proposizione 10.1

$$h(z) = (z - z_0)^2 k(z).$$

con $k \in \mathcal{H}(\Omega)$. Perciò

$$(z - z_0)^2 f(z) = h(z) = (z - z_0)^2 k(z),$$

e quindi la funzione $k(z)$ è una estensione di f a tutto Ω . □

10.3 Corollario. Siano $z_0 \in \Omega$ e $f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus \{z_0\})$.

(i) z_0 è una singolarità eliminabile per f se e solo se

$$\limsup_{z \rightarrow z_0} |f(z)| < +\infty.$$

(ii) z_0 è un punto singolare per f se e solo se

$$\limsup_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = +\infty.$$

10.b Poli

Sia $z_0 \in \Omega$ un punto singolare per $f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus \{z_0\})$.

10.4 Definizione. Sia m intero, $m \geq 1$. Si dice che z_0 è un polo di ordine m per $f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus \{z_0\})$, o che f ha un polo di ordine m in z_0 , se e solo se z_0 è una singolarità eliminabile per $(z - z_0)^m f(z)$ e non lo è per $(z - z_0)^k f(z)$ per ogni k , $0 \leq k < m$.

In base al teorema di estensione di Riemann,

10.5 Proposizione. f ha un polo di ordine m in z_0 se e solo se m è il più piccolo intero k per cui $|(z - z_0)^k f(z)|$ è limitata in un intorno di z_0 .

Le singolarità polari di una funzione olomorfa sono assai ben caratterizzate. Si dimostra

10.6 Teorema. $f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus \{z_0\})$ ha un polo in z_0 se e solo se $\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = +\infty$. Inoltre, dato $m \geq 1$, sono fatti equivalenti tra loro

- (i) f ha un polo di ordine m in z_0 ,
- (ii) esiste $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ con $g(z_0) \neq 0$ tale che

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^m} \quad \text{per } z \in \Omega \setminus \{z_0\},$$

- (iii) $f(z) = \sum_{k=-m}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$ in un intorno di z_0 ,
- (iv) esistono $r > 0$ tale che $B(z_0, r) \subset \Omega$ e $h \in \mathcal{H}(B(z_0, r))$ priva di zeri in $B(z_0, r) \setminus \{z_0\}$ e con uno zero di ordine m in z_0 tale che $f = 1/h$ in $B(z_0, r) \setminus \{z_0\}$,

(v) esistono $B(z_0, r) \subset \Omega$ e costanti positive λ, Λ dipendenti anche da r tali che

$$\lambda \frac{1}{|z - z_0|^m} \leq |f(z)| \leq \Lambda \frac{1}{|z - z_0|^m} \quad \forall z \in B(z_0, r) \setminus \{z_0\}.$$

10.7 Corollario. $f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus \{z_0\})$ ha un polo in z_0 se e solo

$$\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = +\infty.$$

10.c Singolarità essenziali

Quando un punto singolare isolato z_0 non è eliminabile e non è un polo, allora si dice che z_0 è una *singolarità essenziale*. Come conseguenza dei Corollari 10.3 e 10.7 si ottiene che z_0 è una *singolarità essenziale se e solo se*

$$\liminf_{z \rightarrow z_0} |f(z)| < +\infty, \quad \limsup_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = +\infty.$$

In realtà si ha

10.8 Proposizione. z_0 è una singolarità essenziale per $f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus \{z_0\})$ se e solo se

$$\liminf_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = 0, \quad \limsup_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = +\infty.$$

Dimostrazione. Se per assurdo fosse $\liminf_{z \rightarrow z_0} |f(z)| > 0$, $1/|f(z)|$ sarebbe limitata in un intorno di z_0 . Dunque z_0 sarebbe una singolarità eliminabile per $1/f(z)$. Seguirebbe che $|f(z)| \rightarrow \lambda \in \mathbb{R}$ per $z \rightarrow z_0$, e z_0 sarebbe o una singolarità eliminabile o un polo per f , un assurdo. \square

Dunque f ha una singolarità essenziale in z_0 se e solo se $|f(z)|$ oscilla essenzialmente tra 0 e ∞ in *ogni* intorno di z_0 .

10.d Singolarità all'infinito

10.9 Definizione. Si dice che $f : \{|z| > R\} \rightarrow \mathbb{C}$ ha una *singolarità eliminabile*, un *polo di ordine* $m \geq 1$ o una *singolarità essenziale all'infinito* se $f(1/z)$ ha rispettivamente una *singolarità removibile*, un *polo* o una *singolarità essenziale* in 0.

10.10 Esercizio. Mostrare che

- (i) z^n ha un polo all'infinito di ordine n ,
- (ii) $e^{1/z}$ ha una singolarità essenziale in 0, equivalentemente, e^z ha una singolarità essenziale all'infinito.

10.11 Esercizio. Se P, Q sono polinomi e z_0 è uno zero di ordine m di Q e se $P(z_0) \neq 0$, allora z_0 è un polo di ordine m per $f(z) := P(z)/Q(z)$.

10.12 Esercizio. Provare che $1/\sin z$ ha singolarità polari nei punti $z = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

10.13 Esercizio. Mostrare che la funzione $\frac{z}{e^z - 1}$ ha una singolarità eliminabile in zero e poli di ordine 1 in tutti i punti $z_k = i2k\pi$, $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Segue che

$$\frac{z}{e^z - 1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} z^k, \quad |z| < 2\pi.$$

I numeri $\{B_k\}$ sono detti *numeri di Bernoulli*. Mostrare che valgono le formule di ricorrenza

$$\begin{cases} B_0 := 1, \\ \sum_{j=0}^n \binom{n+1}{j} B_j = 0 \quad \forall n \geq 1. \end{cases} \quad (10.1)$$

Dedurre che

$$B_0 = 1, \quad B_1 = -\frac{1}{2}, \quad B_2 = \frac{1}{6}, \quad B_3 = 0, \quad B_4 = -\frac{1}{30}, \quad B_5 = 0.$$

10.14 Esercizio. Provare che una funzione $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus \{z_1, z_2, \dots, z_n\})$ non costante ha almeno un punto singolare, al finito o all'infinito.

10.15 Esercizio. La somma della serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ ha una singolarità in $z = 1$.

10.16 Esercizio. La somma della serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$ ha una singolarità in $z = 1$. Perché?

10.17 Esercizio. Mostrare che 0 è una singolarità eliminabile per le funzioni

$$\frac{\sin z}{z}, \quad \frac{z}{\tan z}, \quad \cot z - \frac{1}{z}, \quad \frac{1}{e^z - 1} - \frac{1}{\sin z}.$$

10.18 Esercizio. Mostrare che $z = 0$ è un polo per le funzioni

$$\frac{z}{1 - \cos z}, \quad \frac{z}{(e^z - 1)^2},$$

mentre $z = \infty$ è una singolarità essenziale per le funzioni

$$\sin z, \quad e^z, \quad e^{-z^2},$$

e $z = 0$ è una singolarità essenziale per

$$z^2 \cos \frac{\pi}{z}, \quad z(e^{1/z} - 1).$$

10.e Sviluppi di Laurent

Si chiama *serie di Laurent centrata in z_0* la somma di una serie di potenze nella variabile $z - z_0$ di raggio di convergenza ρ_2 e di una serie di potenze nella variabile $1/(z - z_0)$ di raggio di convergenza $1/\rho_1$ con $\rho_1 < \rho_2$.

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k := \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k + \sum_{k=1}^{\infty} a_{-k} \frac{1}{(z - z_0)^k}. \quad (10.2)$$

Segue dai teoremi sulle serie di potenze che

(i) la serie di Laurent (10.2) converge assolutamente nella corona aperta

$$A(z_0, \rho_1, \rho_2) := \left\{ z \mid \rho_1 < |z - z_0| < \rho_2 \right\},$$

e uniformemente in ogni compatto $K \subset A(z_0, \rho_1, \rho_2)$.

(ii) la somma della serie di Laurent (10.2) è olomorfa in $A(z_0, \rho_1, \rho_2)$,

In questo contesto sono da considerarsi corone il disco puntato ($\rho_1 = 0, \rho_2 < \infty$), il piano puntato ($\rho_1 = 0, \rho_2 = \infty$) e l'esterno di un cerchio ($\rho_1 > 0, \rho_2 = \infty$).

Mostriamo ora che ogni funzione olomorfa in una corona $A(z_0, \rho_1, \rho_2)$ è la somma di una serie di Laurent.

10.19 Teorema. *Sia f olomorfa nella corona $A(z_0, \rho_1, \rho_2)$, $0 \leq \rho_1 < \rho_2 \leq \infty$. Allora*

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \quad \forall z \in A(z_0, \rho_1, \rho_2)$$

dove $\forall k \in \mathbb{Z}$

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(z_0, r)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} d\zeta \quad (10.3)$$

essendo r scelto arbitrariamente in $]\rho_1, \rho_2[$.

Dimostrazione. L'unicità dello sviluppo segue dal principio di indentità per le funzioni olomorfe. Il calcolo dello sviluppo è invece conseguenza della formula di Cauchy. Infatti, per ogni $z \in A(z_0, \rho_1, \rho_2)$ siano $r_1 < r_2$ tali che $\rho_1 < r_1 < |z - z_0| < r_2 < \rho_2$. Dalla formula di Cauchy,

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial^+ A(z_0, r_1, r_2)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)} d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial^+ B(z_0, r_2)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial^+ B(z_0, r_1)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)} d\zeta. \end{aligned} \quad (10.4)$$

Se $\zeta \in B(z_0, r_2)$ si ha

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - z} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^k}{(\zeta - z_0)^{k+1}}$$

totalmente in $\partial B(z_0, r_2)$. Analogamente per $z \in \partial B(z_0, r_1)$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\zeta - z} &= \frac{-1}{z - z_0} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\zeta - z_0}{z - z_0} \right)^k = \frac{-1}{z - z_0} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\zeta - z_0}{z - z_0} \right)^k \\ &= - \sum_{k=-\infty}^{-1} \frac{(z - z_0)^k}{(\zeta - z_0)^{k+1}} \end{aligned}$$

totalmente in $\partial B(z_0, r_1)$. Sviluppando termine a termine i due integrali in (10.4), si ottiene perciò

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$$

in $A(z_0, r_1, r_2)$, con

$$a_k = \begin{cases} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial^+ B(z_0, r_2)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} d\zeta & \text{se } k \geq 0, \\ \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial^+ B(z_0, r_1)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} d\zeta & \text{se } k < 0. \end{cases}$$

Poiché d'altra parte

$$\int_{\partial^+ B(z_0, r)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} d\zeta$$

non dipende da r per ogni $\rho_1 < r < \rho_2$ ($\frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^k}$ è olomorfa in $A(z_0, \rho_1, \rho_2)$), la tesi segue. \square

Ogni funzione $f \in \mathcal{H}(B(z_0, r) \setminus \{z_0\})$ con un polo di ordine m in z_0 , ha uno sviluppo di Laurent

$$f(z) = \frac{a_{-m}}{(z - z_0)^m} + \frac{a_{-m+1}}{(z - z_0)^{m-1}} + \cdots + \frac{a_{-1}}{z - z_0} + a_0 + a_1(z - z_0) + \cdots$$

con parte singolare (la parte dello sviluppo con potenze negative di $(z - z_0)$) finita, cfr. Teorema 10.6.

10.f Teorema dei residui

Sia Ω aperto, $z_0 \in \Omega$ e $f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus \{z_0\})$. Ricordiamo il teorema di Goursat:

$$\int_{\partial^+ A} f(z) dz = 0$$

per ogni dominio elementare A strettamente contenuto in $\Omega \setminus \{z_0\}$. Perciò

$$\int_{\partial^+ B(z_0, r)} f(z) dz$$

non dipende dalla scelta di r fintanto che f è olomorfa in $B(z_0, r) \setminus \{z_0\}$; si chiama *residuo di f in z_0*

$$\text{Res}(f, z_0) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial^+ B(z_0, r)} f(z) dz$$

Analogamente, se A è limitato e $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus \bar{A})$, si chiama *residuo all'infinito* di f il numero

$$\text{Res}(f, \infty) := -\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial^+ B(0, r)} f(z) dz$$

dove r è scelto in modo che $\bar{A} \subset B(z_0, r)$. Cambiando variabile,

$$\text{Res}(f, \infty) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial^- B(0, r)} f\left(\frac{1}{\zeta}\right) \frac{1}{\zeta^2} d\zeta = -\text{Res}\left(f\left(\frac{1}{z}\right) \frac{1}{z^2}, 0\right).$$

Ancora dal teorema di Goursat,

10.20 Teorema (dei residui, I). Siano A un dominio ammissibile per $\Omega \subset \mathbb{C}$, $\{z_1, z_2, \dots, z_n\} \subset A$ punti singolari per $f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus \{z_1, z_2, \dots, z_n\})$. Allora

$$\int_{\partial^+ A} f(z) dz = 2\pi i \sum_{j=1}^n \text{Res}(f, z_j).$$

10.21 Teorema (dei residui, II). Siano Ω un dominio limitato, $A \supset \Omega$ un dominio ammissibile per Ω^c , $\{z_1, z_2, \dots, z_n\} \subset A$ punti singolari per $f \in \mathcal{H}(\Omega^c \setminus \{z_1, z_2, \dots, z_n\})$. Allora

$$\int_{\partial^+ A} f(z) dz = -2\pi i \left(\text{Res}(f, \infty) + \sum_{j=1}^n \text{Res}(f, z_j) \right).$$

In particolare

10.22 Corollario. *Siano $z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ e $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus \{z_1, z_2, \dots, z_n\})$. Allora*

$$\operatorname{Res}(f, \infty) + \sum_{i=1}^n \operatorname{Res}(f, z_i) = 0.$$

10.g Calcolo dei residui

Dal Teorema 10.19 segue

10.23 Proposizione. *Sia $f \in \mathcal{H}(B(z_0, r) \setminus \{z_0\})$ e $f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$ $z \in B(z_0, r)$, $z \neq z_0$, il suo sviluppo di Laurent con centro z_0 . Allora*

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = a_{-1}.$$

Il calcolo del residuo di f in un punto z_0 può farsi quindi utilizzando lo sviluppo in serie di f con centro in z_0 . Ad esempio

(i)

$$\operatorname{Res}\left(\frac{1}{(z - z_0)^m}, z_0\right) = \begin{cases} 1 & \text{se } m = 1, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

(ii) *f ha una singolarità eliminabile in z_0 . Se f è prolungabile in senso olomorfo in z_0 , allora $\operatorname{Res}(f, z_0) = 0$.*

(iii) *f ha un polo semplice in z_0 . Se f ha un polo semplice in z_0 , allora*

$$f(z) = \frac{a_{-1}}{z - z_0} + a_0 + a_1(z - z_0) + \dots$$

Moltiplicando per $z - z_0$, si trova

$$(z - z_0)f(z) = a_{-1} + O(|z - z_0|) \quad \text{per } z \rightarrow z_0$$

vale a dire

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)f(z).$$

In questo caso $f(z) = g(z)/h(z)$ dove g e h sono olomorfe in un intorno di z_0 , $g(z_0) \neq 0$ e $h(z)$ ha un polo semplice in z_0 . Inoltre $h'(z_0) \neq 0$; segue

$$(z - z_0) \frac{g(z)}{h(z)} = \frac{z - z_0}{h(z) - h(z_0)} g(z) \rightarrow \frac{g(z_0)}{h'(z_0)} \quad \text{per } z \rightarrow z_0.$$

i.e.,

$$\operatorname{Res}\left(\frac{g(z)}{h(z)}, z_0\right) = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}.$$

(iv) f ha un polo multiplo in z_0 . Sia f una funzione olomorfa in $A(z_0, 0, \delta)$ con un polo di ordine m in z_0 . Allora

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^m}, \quad g(z_0) \neq 0.$$

moltiplicando per $(z - z_0)^m$, si ottiene una funzione con una singolarità eliminabile,

$$(z - z_0)^m f(z) = g(z), \quad z \neq z_0.$$

Il coefficiente a_{-1} dello sviluppo di Laurent di f è dunque il coefficiente di $(z - z_0)^{m-1}$ dello sviluppo di g . Pertanto

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}(f, z_0) = a_{-1} &= \frac{D^{m-1}(g)(z_0)}{(m-1)!} \\ &= \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} D^{m-1} \left((z - z_0)^m f(z) \right) (z_0). \end{aligned}$$

Un altro modo è procedere induttivamente calcolando successivamente tutto lo sviluppo singolare. Infatti se

$$f(z) = \frac{a_{-m}}{(z - z_0)^m} + \cdots + \frac{a_{-1}}{z - z_0} + h(z)$$

si ha

$$\begin{cases} a_{-m} = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^m f(z), \\ a_{-m+1} = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^{m-1} \left(f(z) - \frac{a_{-m}}{(z - z_0)^m} \right) \\ \dots \\ a_{-1} = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) \left(f(z) - \sum_{k=-m}^{-2} a_k (z - z_0)^k \right) \end{cases}$$

Si può dunque procedere induttivamente nel modo seguente: se $f(z) = g(z)/(z - z_0)^m$ con $g(z_0) \neq 0$, si pone $h_m(z) = g(z)$, e si definisce induttivamente per $j = m, m-1, \dots, 1$

$$\begin{cases} \lambda_j := g_j(z_0), \\ g_{j-1}(z) := \frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0}. \end{cases}$$

Si ha allora

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^m} = \frac{\lambda_m}{(z - z_0)^m} + \cdots + \frac{\lambda_1}{z - z_0} + h_0(z).$$

Infine, nel caso di un rapporto di polinomi, si può procedere induttivamente con l'algoritmo di Hermite.

10.24 Esercizio. Calcolare i residui di

$$f(z) = \frac{z^2 - 2z}{(z + 1)^2(z^2 + 4)}, \quad f(z) = \frac{e^z}{\sin z}.$$

in tutti i punti di $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

11. Calcolo di integrali con il metodo dei residui

Si vogliono calcolare integrali definiti senza esplicitare una primitiva dell'integrando. Se l'integrando è la restrizione di una funzione olomorfa in Ω con eventualmente qualche discontinuità, si può pensare all'intervallo di integrazione come alla frontiera orientata, o ad un pezzo della frontiera orientata, di un dominio ammissibile. La formula dei residui potrebbe quindi permettere di calcolare l'integrale. Abbiamo qui raccolto alcuni casi interessanti. Il lettore è avvisato che non vi sono regole generali, valide in ogni caso.

11.a Integrali trigonometrici

Si voglia calcolare integrali del tipo

$$\int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t) dt,$$

dove R è una funzione razionale.

Si interpreta l'integrale come l'integrale sulla frontiera orientata di $B(0, 1)$. Poiché su $B(0, 1)$ si ha

$$\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) = \cos \theta, \quad \frac{1}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right) = \sin \theta, \quad \text{se } z := e^{i\theta},$$

ponendo

$$f(z) := \frac{1}{iz} R\left(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right)$$

si ottiene

$$\int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t) dt = \int_{\partial^+ B(0,1)} f(z) dz.$$

Se f non ha poli su $\partial B(0, 1)$, si ottiene dal teorema dei residui, Teorema 10.20,

$$\int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t) dt = \int_{\partial^+ B(0,1)} f(z) dz = 2\pi i \sum_{z \in B(0,1)} \text{Res}(f, z).$$

11.1 Esercizio. Mostrare che se $a > |b|$ si ha

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{a + b \sin \theta} d\theta = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - b^2}}.$$

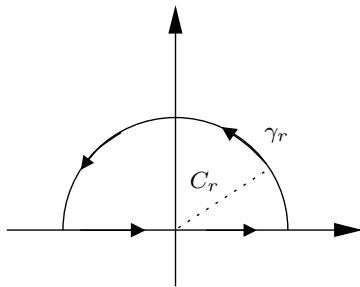


Figura 11.1. Circuito di integrazione per integrali impropri.

Riscriviamo l'integrale come un integrale di linea sul bordo del cerchio unitario. Ricordando che $\sin y = \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i}$, si ha

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{a + b \sin \theta} d\theta = \int_{\partial^+ B(0,1)} \frac{dz}{iz(a + b(z - z^{-1})/2i)} = \int_{\partial^+ B(0,1)} \frac{2 dz}{bz^2 + 2iaz - b}$$

La funzione $bz^2 + 2iaz - b$ si annulla nei due punti

$$z_1 := \frac{-a + \sqrt{a^2 - b^2}}{b}i, \quad z_2 := \frac{-a - \sqrt{a^2 - b^2}}{b}i.$$

e di questi solo il primo z_1 si trova all'interno del cerchio unitario. Si tratta evidentemente di un polo semplice per $f(z) = \frac{2 dz}{bz^2 + 2iaz - b}$ e quindi

$$\text{Res}(f, z_1) = \frac{2}{2bz_1 + 2ia} = \dots = \frac{1}{\sqrt{a^2 - b^2}i}.$$

Dal teorema dei residui si conclude che

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a + b \sin \theta} = \frac{2\pi i}{\sqrt{a^2 - b^2}i} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - b^2}}.$$

11.2 Esercizio. Provare che

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos k\theta}{5 + 3 \cos \theta} d\theta = \frac{(-1)^k \pi}{2 \cdot 3^k}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\alpha x}}{a^2 + x^2} dx = \frac{\pi}{a} e^{\alpha a}.$$

11.3 Esercizio. Calcolare

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial^+ B(0,3)} \frac{e^{zt}}{z^2(z^2 + 2z + 2)} dz.$$

11.4 Esercizio. Mostrare che

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{1 - 2p \cos t + p^2} = \begin{cases} \frac{2\pi}{1-p^2} & \text{se } |p| < 1, \\ \frac{2\pi}{p^2-1} & \text{se } |p| > 1, \end{cases} \quad p \in \mathbb{C} \setminus \partial B(0, 1),$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{(p + \cos t)^2} = \frac{2\pi p}{(\sqrt{p^2 - 1})^3}, \quad p > 1.$$

11.b Integrali impropri

Si voglia calcolare un integrale improprio del tipo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt.$$

Supponiamo di avere una funzione $f(z)$ olomorfa sul semipiano superiore $\{z \mid \Im z > 0\}$ tranne al più in un numero finito di punti, nessuno dei quali è reale, e tale che $zf(z) \rightarrow 0$ per $|z| \rightarrow \infty$. In particolare f è olomorfa fuori da una palla di centro 0 e raggio sufficientemente grande. Dal Teorema 10.20 per $r \gg 1$

$$\int_{-r}^r f(x) dx + \int_{\gamma_r} f(z) dz = 2\pi i \sum_{\Im z > 0} \text{Res}(f, z)$$

essendo C_r il semicerchio in Figura 11.1 e γ_r il suo bordo superiore orientato in senso antiorario. Posto $M(r) := \sup_{z \in \gamma_r} |f(z)|$, dall'ipotesi segue che

$$\left| \int_{\gamma_r} f(z) dz \right| \leq M(r) \cdot \pi r \rightarrow 0 \quad \text{per } r \rightarrow \infty$$

e quindi f ha integrale improprio su \mathbb{R} e

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{-r}^r f(x) dx = 2\pi i \sum_{\text{Im } z > 0} \text{Res}(f, z).$$

La ricetta precedente si applica in particolare al rapporto di due polinomi $f = \frac{P}{Q}$ in cui Q non ha zeri reali.

11.5 Esercizio. Si calcoli

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^6}.$$

Sia dunque C_r il semicerchio in Figura 11.1 di raggio $r \gg 1$. Dato che le radici di $z^6 + 1 = 0$ sono sei distinte $z_k := e^{\frac{i(2k+1)\pi}{6}}$, $k = 0, \dots, 5$, esse sono tutte poli semplici di $f(z) := 1/(1+z^6)$. Di questi solo $z_0, z_1, z_2 \in C_r$. Il residuo di f in z_k , $k = 0, 1, 2$, vale

$$\text{Res}(f, z_k) = \frac{1}{6z_k^5} = \frac{1}{6} e^{-i \frac{5(2k+1)\pi}{6}}$$

Segue dal teorema dei residui che

$$\int_{-r}^r \frac{dx}{1+x^6} + \int_{\gamma_r} \frac{dz}{1+z^6} = \frac{2\pi i}{6} \sum_{k=0}^2 e^{-i \frac{5(2k+1)\pi}{6}} = \frac{2\pi}{3}.$$

essendo $\gamma_r(t) := re^{it}$, $t \in [0, \pi]$. Poiché per $r \rightarrow \infty$ si ha evidentemente che $\int_{\gamma_r} \frac{dz}{1+z^6} \rightarrow 0$, si conclude che

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^6} = \frac{\pi}{3}.$$

11.6 Esercizio. Mostrare che

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^4} dx &= \frac{\pi}{\sqrt{2}}, \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^4+a^4)^2} &= \frac{3\sqrt{2}}{8} \frac{\pi}{a^7}, \quad a > 0, \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)^2(x^2+2x+2)} dx, \\ \int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x^q} dx &= \frac{1}{p} \frac{\frac{p}{q}\pi}{\sin\left(\frac{p}{q}\pi\right)}, \end{aligned}$$

per ogni $p, q \in \mathbb{N}$, $0 < p < q$.

11.c Integrali di tipo Fourier

11.7 Proposizione (Integrali di tipo Fourier). Sia $f : \Omega := \{z = x + iy \mid y \geq 0\} \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione continua e olomorfa all'interno di Ω , con un numero finito di punti singolari in Ω nessuno dei quali è reale e tale che $|f(z)| \rightarrow 0$ per $|z| \rightarrow \infty$, $z \in \Omega$. Allora per ogni $\omega > 0$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{-r}^r f(x) e^{i\omega x} dx = 2\pi i \sum_{z \in \Im z > 0} \text{Res}(f(z)e^{i\omega z}, z). \quad (11.1)$$

Analogamente, sia $f : \Omega := \{z = x + iy \mid y \leq 0\} \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione continua in Ω e olomorfa all'interno di Ω , con un numero finito di punti singolari nessuno dei quali è reale e tale che $|f(z)| \rightarrow 0$ per $|z| \rightarrow \infty$, $z \in \Omega$, e sia $\omega > 0$. Allora

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{-r}^r f(x) e^{-i\omega x} dx = 2\pi i \sum_{z \in \Im z < 0} \text{Res}(f(z)e^{-i\omega z}, z). \quad (11.2)$$

Proviamo la prima parte del teorema, la seconda parte essendo del tutto simile. Premettiamo

11.8 Lemma. Sia $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione olomorfa definita su $\Omega := (\mathbb{C} \setminus B(0, R)) \cap \{z = x + iy \mid y \geq 0\} \rightarrow \mathbb{C}$. Sia γ_r il bordo orientato superiore del semicerchio C_r in figura, $r > R$. Allora

$$\int_{\gamma_r} f(z) e^{i\omega z} dz \rightarrow 0 \quad \text{per } r \rightarrow \infty.$$

Dimostrazione. Si ha

$$\int_{\gamma_r} f(z) e^{i\omega z} dz = \int_0^\pi f(re^{i\theta}) e^{i\omega r \cos \theta} e^{-\omega r \sin \theta} i r d\theta$$

quindi

$$\left| \int_{\gamma_r} f(z) e^{i\omega z} dz \right| \leq M(r) \int_0^\pi e^{-\omega r \sin \theta} r d\theta$$

dove si è posto $M(r) := \sup_{z \in \gamma_r} |f(z)|$. Basta allora provare che l'integrale a destra è limitato indipendentemente da r . Usando la *diseguaglianza di Jordan* $\frac{2}{\pi} \leq \frac{\sin \theta}{\theta} \leq 1$ per $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, segue infatti

$$\int_0^\pi e^{-\omega r \sin \theta} r d\theta = 2 \int_0^{\pi/2} e^{-\omega r \sin \theta} r d\theta \leq \frac{\pi}{2\omega} (1 - e^{-r\omega}).$$

□

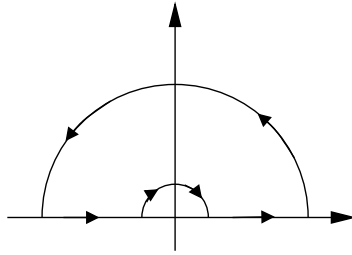


Figura 11.2. Cammino di integrazione per e^{it}/t per il calcolo dell'integrale di Eulero in Esercizio 11.11.

Dimostrazione della Proposizione 11.7. Scegliendo ora r così grande che i poli di f siano tutti nel semicerchio C_r , f è olomorfa in $(\mathbb{C} \setminus B(0, R)) \cap \{\Im(z) > 0\}$. Se $r > R$, si ottiene dalla formula dei residui

$$\int_{-r}^r f(x)e^{i\omega x} dx + \int_{\gamma_r} f(z)e^{i\omega z} dz = 2\pi i \sum_{\Im z > 0} \text{Res}(f, z).$$

Per $r \rightarrow \infty$ il secondo integrale tende a zero per il Lemma 11.8 e quindi la tesi. \square

11.9 Esercizio. Mostrare che per $k > 0$ si ha

$$\int_0^\infty \frac{\cos kx}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{2} e^{-k}.$$

Si osservi che $\frac{\cos(kz)}{1+z^2}$ non tende a zero per $|z| \rightarrow \infty$. Il metodo della sezione precedente, Paragrafo 11.b non è dunque applicabile. Ricordiamo che $\cos z = (e^{iz} + e^{-iz})/2$. La funzione $f(z) := e^{ikz}/(1+z^2)$ ha poli semplici in $z = \pm i$. Considerando il circuito in Figura 11.1, si ha

$$\int_{-r}^r \frac{e^{ikx} dx}{1+x^2} + \int_{\gamma_r} \frac{e^{ikz}}{1+z^2} dz = \text{Res}(f, i) = 2\pi i \frac{e^{-k}}{2i} = \pi e^{-k}.$$

Mandando quindi $r \rightarrow \infty$, il secondo integrale a sinistra tende a zero, pertanto

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{ikx}}{1+x^2} = \pi e^{-k}.$$

Analogamente, utilizzando il circuito simmetrico di quello in Figura 11.1 rispetto all'asse x , si trova

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{-ikx}}{1+x^2} dx = \pi e^{-k}.$$

In conclusione

$$2 \int_0^\infty \frac{\cos kx}{1+x^2} dx = \int_{-\infty}^\infty \frac{\cos kx}{1+x^2} dx = \pi e^{-k}.$$

11.10 Esercizio. Si provi che se $a > 0$ e $b > 0$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iax}}{x-ib} dx = 2\pi i e^{-ab}, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iax}}{x+ib} dx = 0.$$

Da queste sommando e sottraendo ritrovare le *formule di Laplace*

$$\int_0^\infty \frac{\beta \cos \alpha x}{x^2 + \beta^2} dx = \int_0^\infty \frac{x \sin \alpha x}{x^2 + \beta^2} dx = \frac{1}{2} \pi e^{-\alpha \beta}, \quad \alpha, \beta > 0.$$

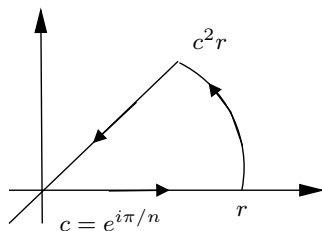


Figura 11.3. Circuito di integrazione per e^{iz^2} per il calcolo dell'integrale di Fresnel.

11.11 Esercizio. Per $\alpha = 1, \beta = 0$, le formule di Laplace dell'Esercizio 11.10 suggeriscono che

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_0^r \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

Si provi quest'ultima formula escludendo lo zero con un semicerchio con raggio piccolo. [Sugg. Considerare la funzione $f(z) := \frac{e^{iz}}{z}$, integrare sul cammino $\gamma_{\epsilon, r}$ in Figura 11.2 e usare l'Esercizio 11.12 e il Lemma 11.8.]

11.12 Esercizio. Mostrare che, se g è olomorfa e γ_ϵ è il cammino bordo superiore del semicerchio $B(0, \epsilon) \cap \{y > 0\}$ orientato in senso antiorario, allora

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\epsilon} \frac{g(z)}{z} dz = \frac{g(z_0)}{2} = \frac{1}{2} \text{Res} \left(\frac{g(z)}{z}, z \right).$$

11.13 Esercizio Integrali (impropri) di Fresnel. Sono definiti come integrali generalizzati da

$$\int_0^\infty \sin x^2 dx, \quad \int_0^\infty \cos x^2 dx.$$

Si considera la funzione $f(z) := e^{iz^2}$ che non ha poli su \mathbb{C} e si integra lungo la curva in Figura 11.3 composta delle tre curve

$$\gamma_1(t) = t, \quad t \in [0, r], \quad \gamma_2(t) = \frac{t(1+i)}{\sqrt{2}}, \quad t \in [0, r]$$

e $\gamma_3(t) := re^{it}, \quad t \in [0, \pi/4]$. Si ha allora

$$\int_{\gamma_1} f(z) dz - \int_{\gamma_2} f(z) dz + \int_{\gamma_3} f(z) dz = 0$$

e d'altra parte

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_1} f(z) dz &= \int_0^r e^{ix^2} dx \\ \int_{\gamma_2} f(z) dz &= \frac{1+i}{\sqrt{2}} \int_0^r e^{-t^2} dt \rightarrow \frac{1+i}{\sqrt{2}} \int_0^\infty e^{-t^2} dt = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} (1+i) \\ \int_{\gamma_3} f(z) dz &= \int_0^{\pi/4} ire^{ir^2\theta^2} e^{i\theta} d\theta \end{aligned}$$

Poiché $i(\cos\theta + i\sin\theta)^2 = i\cos(2\theta) - r^2\sin 2\theta$ il terzo integrale si stima in modulo con

$$\int_0^{\pi/4} re^{-r^2\sin(2\theta)} d\theta \leq \int_0^{\pi/4} re^{-r^2\frac{4}{\pi}\theta} d\theta = \frac{\pi}{4r} (1 - e^{-r^2})$$

e dunque converge a zero per $r \rightarrow \infty$. In definitiva mandando $r \rightarrow \infty$ si conclude che l'integrale improprio di e^{ix^2} su $(0, +\infty)$ esiste e

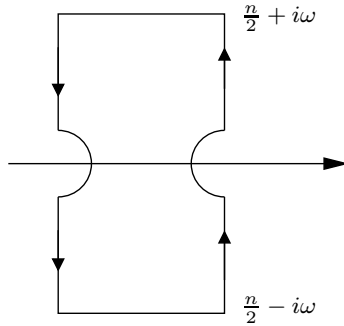


Figura 11.4. Cammino di integrazione per il calcolo delle somme di Gauss.

$$\int_0^\infty e^{ix^2} dx = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_0^r e^{ix^2} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} (1 + i).$$

Con un cambiamento di variabile, $x = \sqrt{t}$, $t > 0$ si ottiene anche

$$\int_0^\infty \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}}, \quad \int_0^\infty \frac{\cos t}{\sqrt{t}} dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

11.d Somme di Gauss

Sono definite da

$$S_n := \sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{2\pi i k^2}{n}}$$

Sia

$$f(z) := \frac{2 \exp(2\pi z^2/n)}{e^{2\pi i z} - 1}$$

i cui poli $0, \pm 1, \pm 2, \dots$ sono semplici con residui rispettivi $\frac{1}{\pi i} e^{2\pi i k^2/n}$. Integrando sul percorso in Figura 11.4, si trova

$$S_n = 2i(1 + i^{3n})\sqrt{n} \int_0^\infty e^{-2\pi i t^2} dt,$$

per cui

$$\sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{2\pi i k^2}{n}} = \frac{1}{2}(1 + i)(1 + i^{3n})\sqrt{n}.$$

11.14 Esercizio. Calcolare lo sviluppo asintotico di $\int_x^\infty e^{-t} t dt$.

11.e Somme di serie numeriche

11.15 Teorema (Somme di serie di funzioni). Sia $f(z)$ una funzione olo-morfa su \mathbb{C} con eventuali singolarità puntuali fuori dai punti $0, \pm 1, \pm 2, \dots$ tale che per qualche $M, \alpha > 1$ si abbia $|f(z)| \leq M/|z|^\alpha$ per ogni z con $|z| \gg 1$. Allora

(i) la serie $\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)$ converge assolutamente e

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = - \sum_{z \text{ polo di } f} \operatorname{Res} \left(\frac{\pi f(z)}{\tan(\pi z)}, z \right),$$

(ii) la serie $\sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n f(n)$ converge assolutamente e

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n f(n) = - \sum_{z \text{ polo di } f} \operatorname{Res} \left(\frac{\pi f(z)}{\sin(\pi z)}, z \right),$$

Premettiamo la

11.16 Proposizione. Sia f una funzione continua con $|f(z)| \leq M/|z|^\alpha$ per qualche $M > 0$ e $\alpha > 1$ per ogni $|z| \gg 1$ e sia Q_n il quadrato

$$Q_n := \left\{ z = x + iy \mid |x|, |y| \leq n + \frac{1}{2} \right\}$$

Allora $\int_{\partial^+ Q_n} f(z) \frac{1}{\tan(\pi z)} dz \rightarrow 0$ per $n \rightarrow \infty$.

Dimostrazione. Verifichiamo che $1/\tan(\pi z)$ è limitata su $\partial^+ Q_n$ indipendentemente da n . Sia $z = x + iy \in \partial^+ Q_n$ e distinguiamo due casi: se $|y| \geq 1/2$ allora, cfr. (5.7),

$$|\cot(\pi z)| \leq \coth(\pi|y|) = \frac{1 + e^{-2\pi|y|}}{1 - e^{-2\pi|y|}} \leq \frac{1 + e^{-\pi}}{1 - e^{-\pi}} =: C_1$$

mentre se $|y| < 1/2$, allora necessariamente $|x| = n + 1/2$ e quindi $\cot(\pi(x + iy)) = \cot(\pi/2 + i\pi y) = \tanh(\pi y)$ da cui

$$|\cot(\pi z)| \leq \tanh \pi|y| \leq 1$$

e dunque $|\cot(\pi z)| \leq C := \max(C_1, 1)$ su ∂Q_n . Segue

$$\left| \int_{\partial^+ Q_n} f(z) \cot(\pi z) dz \right| \leq \frac{8CM}{\left(n + \frac{1}{2}\right)^\alpha} \left(n + \frac{1}{2}\right) \rightarrow 0$$

per $n \rightarrow \infty$. □

Dimostrazione del Teorema 11.15. Dimostriamo (i). Sia $g(z) = f(z)\pi \cot(\pi z)$. e sia $Q_n := \{x + iy \mid |x|, |y| \leq n + 1/2\}$. Segue dal teorema dei residui e dalla Proposizione 11.16 che f non ha poli in Q_n per n grande e che

$$\sum_{z \in Q_n} \operatorname{Res} \left(\pi f(z) \cot(\pi z) \right) \rightarrow 0 \quad \text{per } n \rightarrow \infty.$$

Poiché i punti singolari k , $k \in \mathbb{Z}$, di $\cot(\pi z)$ sono poli di ordine 1 e f è per ipotesi olomorfa in un intorno di k

$$\operatorname{Res}(g(z), k) = \operatorname{Res} \left(f(z) \pi \frac{\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)} \right) = f(k) \frac{\pi \cos(\pi k)}{\pi \cos(\pi k)} = f(k)$$

Perciò

$$\sum_{k=-n}^n f(k) + \sum_{\substack{z \in Q_n \\ z \text{ polo di } f}} \operatorname{Res}(g(z), z) \rightarrow 0 \quad \text{per } n \rightarrow \infty.$$

Poiché la serie $\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k)$ converge assolutamente, la tesi segue.

Si procede analogamente per la (ii). □

11.17 Esercizio. Calcolare

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \quad \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90},$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^2 + a^2} = \frac{\pi}{a} \coth a, \quad a \in \mathbb{R},$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12},$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^4 + 4a^4} = \frac{\pi}{4a^3} \left(\frac{\sinh 2\pi a + \sin 2\pi a}{\cosh 2\pi a - \cos 2\pi a} \right)$$

11.18 Esercizio. Si provi che

$$\int_0^{\infty} \frac{\log(1+x^2)}{1+x^2} dx = \pi \log 2, \quad \int_0^{\infty} \frac{(\log x)^2}{1+x^2} dx = \frac{\pi^3}{8}.$$

11.19 Esercizio. Provare che

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 \pi x}{x^2} dx = \pi^2,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 \pi x}{(a+x^2)(1-x^2)} dx = \frac{\pi}{8} (1 - e^{-2\pi}) + \frac{\pi^2}{4},$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\alpha x}}{e^{2x} - 1} dx = \frac{\pi}{2} \cot \frac{\pi \alpha}{2}.$$

12. Equazioni alle differenze lineari

In questo capitolo analizziamo le cosiddette equazioni lineari alle differenze finite, o *ricorrenze lineari*. Sono l'analogo discreto delle *equazioni differenziali lineari* e si possono risolvere esplicitamente.

12.a Equazioni del primo ordine

Sia data una successione f_n e si voglia trovare una successione $\{x_n\}$ tale che

$$\begin{cases} x_0 \text{ dato,} \\ x_{n+1} = x_n + f_{n+1}, \forall n \geq 0, \end{cases}$$

Facendo il conto per $n = 1, 2, 3, \dots$, ci si convince subito che la ricorrenza precedente altro non è che il processo di somma, e in effetti si verifica facilmente per induzione che $\{x_n\}$ è data da

$$x_n := x_0 + \sum_{j=1}^n f_j.$$

Una generalizzazione è la seguente

12.1 Proposizione. *Dato $a \in \mathbb{R}$ e $\{f_n\}$, allora la successione soluzione $\{x_n\}$ di*

$$\begin{cases} x_0 \text{ dato,} \\ x_{n+1} = ax_n + f_{n+1}, \forall n \geq 0, \end{cases} \quad (12.1)$$

esiste ed è unica per il principio di induzione. Inoltre $\{x_n\}$ è data

$$x_n := a^n x_0 + \sum_{j=1}^n a^{n-j} f_j \quad (12.2)$$

Dimostrazione. Per ogni intero n si ha

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= a^{n+1} x_0 + \sum_{j=1}^{n+1} a^{n+1-j} f_j = a^{n+1} x_0 + \sum_{j=1}^n a^{n+1-j} f_j + f_{n+1} \\ &= a \left(a^n x_0 + \sum_{j=1}^n a^{n-j} f_j \right) + f_{n+1} = ax_n + f_{n+1}. \end{aligned}$$

□

Si osservi che $a := \{a^n\}$ e $f := \{f_n\}$ dove si è posto $f_0 = 0$, allora x_n si scrive come

$$x_n = a^n x_0 + (a * f)_n.$$

12.b Equazioni del secondo ordine omogenee

Una equazione alle differenze del secondo ordine *omogenea* ha la forma

$$a x_{n+2} + b x_{n+1} + c x_n = 0, \quad (12.3)$$

dove a, b e c sono costanti e $a \neq 0$. Siamo interessati a trovare tutte le soluzioni di (12.3), o, equivalentemente, siamo interessati alla soluzione $\{x_n\}$ di

$$\begin{cases} x_0 = \alpha, & x_1 = \beta, \\ a x_{n+2} + b x_{n+1} + c x_n = 0, & n \geq 0, \end{cases} \quad (12.4)$$

dove α e $\beta \in \mathbb{R}$ sono assegnati. Si osserva che, come per le equazioni differenziali ordinarie omogenee del secondo ordine, le successioni soluzioni costituiscono uno spazio vettoriale a coefficienti complessi. Inoltre è facile convincersi che, se λ è una soluzione della cosiddetta *equazione caratteristica*,

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0,$$

allora $\{\lambda^n\}$ è una soluzione della (12.3): infatti,

$$a\lambda^{n+2} + b\lambda^{n+1} + c\lambda^n = \lambda^n(a\lambda^2 + b\lambda + c) = 0.$$

Siano ora λ_1, λ_2 le due radici dell'equazione caratteristica. In corrispondenza dei due casi di radici distinte e di radici coincidenti, definiamo le successioni $\{u_n\}, \{v_n\}$ come

$$\begin{aligned} u_n &= \lambda_1^n, & v_n &= \lambda_2^n & \text{se } \lambda_1 \neq \lambda_2, \\ u_n &= \lambda_1^n, & v_n &= n\lambda_1^n & \text{se } \lambda_1 = \lambda_2. \end{aligned} \quad (12.5)$$

Si ha

12.2 Proposizione. *La successione $\{x_n\}$ data da $x_n = c_1 u_n + c_2 v_n$ dove c_1, c_2 risolvono il sistema*

$$c_1 u_0 + c_2 v_0 = \alpha, \quad c_1 u_1 + c_2 v_1 = \beta. \quad (12.6)$$

è la soluzione di (12.4).

Dimostrazione. (i) *Radici distinte* Per linearità $\{x_n\}$, $x_n = c_1 \lambda_1^n + c_2 \lambda_2^n$ è soluzione di (12.3). Inoltre, essendo $\lambda_1 \neq \lambda_2$, per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, si trovano (c_1, c_2) risolvendo il sistema (12.6) in (c_1, c_2) .

(iii) *Radici coincidenti* Sia $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$. Poiché in questo caso $2a\lambda + b = 0$, si ha

$$\begin{aligned} a(n+2)\lambda^{n+2} - b(n+1)\lambda^{n+1} - cn\lambda^n \\ = n\lambda^n(a\lambda^2 + b\lambda + c) + \lambda^n(2a\lambda + b) = 0, \end{aligned}$$

i.e., $\{n\lambda^n\}$ è soluzione di (12.3). Pertanto tutte le successioni $\{x_n\}$, $x_n := \lambda^n(c_1 + c_2 n) = c_1 u_n + c_2 v_n$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, sono soluzioni di (12.3) e, poiché il sistema in (12.6) è risolvibile in (c_1, c_2) , abbiamo la soluzione di (12.4). \square

12.c Equazioni del secondo ordine non omogenee

Consideriamo la ricorrenza

$$\begin{cases} x_0 = \alpha, & x_1 = \beta, \\ a x_{n+2} + b x_{n+1} + c x_n = f_{n+1}, \end{cases} \quad (12.7)$$

dove $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $\{f_n\}$ è data. Supponiamo che $f_0 = 0$.

12.3 Proposizione. Sia $\{w_n\}$ la successione soluzione di

$$\begin{cases} w_0 = 0, & w_1 = 1, \\ a w_{n+2} + b w_{n+1} + c w_n = 0, & n \geq 0. \end{cases} \quad (12.8)$$

Allora $\{x_n\}$ definita da

$$x_n := \frac{1}{a} \{(w * f)_n\} = \frac{1}{a} \sum_{j=0}^n w_{n-j} f_j,$$

è soluzione di

$$\begin{cases} x_0 = 0, & x_1 = 0, \\ a x_{n+2} + b x_{n+1} + c x_n = f_{n+1}, & n \geq 0. \end{cases}$$

Dimostrazione. Infatti,

$$\begin{aligned} a \sum_{j=0}^{n+2} w_{n+2-j} f_j + b \sum_{j=0}^{n+1} w_{n+1-j} f_j + c \sum_{j=0}^n w_{n-j} f_j \\ = a w_0 f_{n+2} + a w_1 f_{n+1} + b w_0 f_{n+1} \\ + \sum_{j=0}^n (a w_{n+2-j} + b w_{n+1-j} + c w_{n-j}) f_j \\ = a f_{n+1}. \end{aligned}$$

□

Per la linearità concludiamo

12.4 Teorema. Con le notazioni della Proposizioni 12.2 e 12.3, le soluzioni della equazione alle differenze del secondo ordine

$$a x_{n+2} + b x_{n+1} + c x_n = f_{n+1}$$

sono date dalle successioni $\{x_n\}$ definite da

$$x_n = c_1 u_n + c_2 v_n + \frac{1}{a} (w * f)_n, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{C}.$$

12.d Sistemi di equazioni alle differenze

Sia $\mathbf{A} \in M_{k,k}(\mathbb{C})$ una matrice complessa. Il sistema lineare omogeneo di ricorrenze per la successione $\{X_n\}$ di vettori di \mathbb{C}^k

$$\begin{cases} X_{n+1} = \mathbf{A}X_n, & n \geq 0, \\ X_0 \text{ assegnato} \end{cases}$$

ha come unica soluzione $X_n := \mathbf{A}^n X_0 \forall n$, come si verifica immediatamente per induzione.

12.5 Proposizione. *Assegnata una successione $\{F_n\}$ di vettori di \mathbb{C}^k , il sistema lineare non omogeneo di ricorrenze per la successione $\{X_n\}$ di vettori di \mathbb{C}^k*

$$\begin{cases} X_{n+1} = \mathbf{A}X_n + F_{n+1}, & n \geq 0, \\ X_0 \text{ assegnato} \end{cases}$$

ha come unica soluzione

$$X_n := \mathbf{A}^n X_0 + \sum_{j=0}^{n-1} \mathbf{A}^{n-j} F_{j+1} \quad \forall n \geq 0$$

dove si è posto $F_0 := 0 \in \mathbb{C}^k$.

Dimostrazione. Infatti per ogni $n \geq 0$,

$$\begin{aligned} X_{n+1} &= \mathbf{A}^{n+1} X_0 + \sum_{j=0}^{n+1-j} \mathbf{A}^{n+1-j} F_j = \mathbf{A}^{n+1} X_0 + \sum_{j=0}^n \mathbf{A}^{n+1-j} F_j + F_{n+1} \\ &= \mathbf{A} \mathbf{A}^n X_0 + \mathbf{A} \sum_{j=0}^n \mathbf{A}^{n-j} F_j + F_{n+1} = \mathbf{A} \left(\mathbf{A}^n X_0 + \sum_{j=0}^n \mathbf{A}^{n-j} F_j \right) + F_{n+1} \\ &= \mathbf{A} X_n + F_{n+1}. \end{aligned}$$

□

12.6 Equazioni alle differenze e sistemi. Si noti che ogni equazione alle differenze di ordine k

$$x_{n+k} + a_{k-1}x_{n+k-1} + \cdots + a_0x_n = f_{n+1}, \quad n \geq 0 \quad (12.9)$$

può essere trasformata in un sistema $k \times k$ di equazioni alle differenze del primo ordine. Infatti se si indica con X_n il vettore di \mathbb{C}^k

$$X_n := (x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+k-1})^T,$$

si verifica che

$$X_{n+1} = \mathbf{A}X_n + F_{n+1} \quad (12.10)$$

dove $F_n = (0, 0, \dots, 0, f_n)^T \in \mathbb{C}^k$ e

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{k-1} \end{pmatrix}$$

e viceversa se $\{X_n\}$ è soluzione del sistema (12.10), allora la successione delle sue prime componenti $\{x_n\}$, $x_n := X_n^1 \forall n$, è soluzione di (12.9). In questo modo la teoria delle equazioni di ordine superiore è ricondotta allo studio dei sistemi del primo ordine. Come vedremo le soluzioni di (12.10) dipendono dagli autovalori di \mathbf{A} . A questo proposito si dimostra che

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \text{Id}) = \sum_{j=0}^{k-1} a_j \lambda^j,$$

detto il *polinomio caratteristico* dell'equazione alle differenze.

12.e Potenze di una matrice

Resta il problema di calcolare le potenze successive della matrice \mathbf{A} in modo efficiente. Si osserva che

- (i) se \mathbf{B} è una matrice simile ad \mathbf{A} , $\mathbf{A} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{S}$ per qualche matrice \mathbf{S} con $\det \mathbf{S} \neq 0$, allora

$$\mathbf{A}^2 = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{S}\mathbf{S}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{S} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{B}^2\mathbf{S}$$

e, per induzione,

$$\mathbf{A}^n = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{B}^n\mathbf{S} \quad \forall n.$$

- (ii) Se \mathbf{B} è una matrice a blocchi quadrati sulla diagonale principale

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \boxed{\mathbf{B}_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \boxed{\mathbf{B}_2} & \dots & 0 \\ \dots & & & \\ 0 & \dots & 0 & \boxed{\mathbf{B}_r} \end{pmatrix}$$

allora

$$\mathbf{B}^n = \begin{pmatrix} \boxed{\mathbf{B}_1^n} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \boxed{\mathbf{B}_2^n} & \dots & 0 \\ \dots & & & \\ 0 & \dots & 0 & \boxed{\mathbf{B}_r^n} \end{pmatrix}$$

Siano $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ gli autovalori distinti di \mathbf{A} e m_1, m_2, \dots, m_k le relative molteplicità. Per ogni k sia p_k la dimensione dell'autospazio relativo a λ_k . Allora esiste un cambiamento di base \mathbf{S} tale che $\mathbf{J} := \mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S}$ abbia la forma di Jordan

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \boxed{\mathbf{J}_{1,1}} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \boxed{\mathbf{J}_{1,2}} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \boxed{\mathbf{J}_{k,p_k}} \end{pmatrix}$$

dove $i = 1, \dots, k, j = 1, \dots, p_i$ e

$$\mathbf{J}_{i,j} = \begin{cases} \lambda_i & \text{se } \mathbf{J}_{i,j} \text{ ha dimensione } 1, \\ \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & & & & & \\ \dots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_i \end{pmatrix} & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Perciò $\mathbf{A}^n = \mathbf{S}\mathbf{J}^n\mathbf{S}^{-1}$, e

$$\mathbf{J}^n = \begin{pmatrix} \boxed{\mathbf{J}_{1,1}^n} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \boxed{\mathbf{J}_{1,2}^n} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \boxed{\mathbf{J}_{k,p_k}^n} \end{pmatrix}.$$

Resta da calcolare la potenza di ciascun blocco di Jordan. Se $\mathbf{J}' = \mathbf{J}_{i,j} = (\lambda)$ ha dimensione 1, allora evidentemente $\mathbf{J}'^n = \lambda^n$. Se invece $\mathbf{J}' = \mathbf{J}_{i,j}$ è uno dei blocchi di dimensione q maggiore o uguale a 2,

$$\mathbf{J}' = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ \dots & & & & \\ 0 & \dots & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix},$$

allora

$$\mathbf{J}' = \lambda \text{Id} + \mathbf{B}, \quad \mathbf{B} = (B)_{i,j}, \quad B_{ij} = \delta_{i+1,j}.$$

Essendo ora

$$(\mathbf{B}^r)_{ij} = \begin{cases} \delta_{r+i,j} & \text{se } r < q, \\ 0 & \text{se } r \geq q, \end{cases}$$

si ha $\mathbf{B}^q = 0$ e dalla formula del binomio di Newton

$$\mathbf{J}'^n = (\lambda \text{Id} + \mathbf{B})^n = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \lambda^{n-j} \mathbf{B}^j = \sum_{j=0}^{q-1} \binom{n}{j} \lambda^{n-j} \mathbf{B}^j = \lambda^n \sum_{j=0}^{q-1} \binom{n}{j} \frac{1}{\lambda^j} \mathbf{B}^j$$

i.e.,

$$\mathbf{J}'^n = \lambda^n \begin{pmatrix} 1 & n\frac{1}{\lambda} & \binom{n}{2}\frac{1}{\lambda^2} & \dots & \binom{n}{q-1}\frac{1}{\lambda^{q-1}} \\ 0 & 1 & n\frac{1}{\lambda} & \dots & \binom{n}{q-2}\frac{1}{\lambda^{q-2}} \\ \dots & & & & \\ 0 & 0 & \dots & 1 & n\frac{1}{\lambda} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si osservi che ciascun elemento di \mathbf{A}^n ha la forma

$$\sum_{j=1}^k \lambda_j^n p_j(n)$$

dove $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ sono gli autovalori di \mathbf{A} e $p_j(t)$ è un polinomio di grado al più $p_j - 1$ (p_j è la molteplicità algebrica di λ_j). Segue immediatamente che per ogni $\rho > \max_i(|\lambda_i|)$ esiste una costante C_ρ tale che per ogni soluzione di $X_{n+1} = \mathbf{A}X_n$ si ha

$$|X_n| \leq C_\rho \rho^n |X_0| \quad \forall n.$$

In particolare

12.7 Teorema. *Se tutti gli autovalori di \mathbf{A} hanno modulo minore di 1, allora ogni soluzione di $X_{n+1} = \mathbf{A}X_n$ tende a zero per $n \rightarrow +\infty$.*

Dimostrazione. Infatti, si sceglie $\sigma > 0$ tale che $\max_{i=1,n} |\lambda_i| < \sigma < 1$. Esiste allora una costante C_σ tale che per ogni soluzione di $X_{n+1} = \mathbf{A}X_n$ si ha

$$|X_n| \leq C_\sigma \sigma^n |X_0|, \quad \forall n.$$

Essendo $0 < \sigma < 1$, $\sigma^n \rightarrow 0$ e la tesi è provata. \square

13. La \mathcal{Z} -trasformata

13.a \mathcal{Z} -trasformata

Sia $a = \{a_n\}$ una successione crescente al più esponenzialmente, $|a_n| \leq CR^n$ per qualche C e $R > 0$. La serie di potenze associata $\sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n$ ha raggio di convergenza $\rho \geq 1/R$ e la corrispondente serie di potenze in $1/z$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{1}{z^n}, \quad (13.1)$$

converge assolutamente in $\{|z| > 1/\rho\}$ alla funzione olomorfa A data da

$$A(z) = S\left(\frac{1}{z}\right), \quad S(w) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n, \quad |z| > 1/\rho. \quad (13.2)$$

La funzione $A(z)$ in (13.2) si chiama la \mathcal{Z} -trasformata della successione $\{a_n\}$ e il numero

$$r := \frac{1}{\rho} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

si chiama il *raggio di convergenza* della \mathcal{Z} -trasformata.

La \mathcal{Z} -trasformata è uno strumento di routine in combinatorica, nel calcolo delle probabilità e in molte questioni applicate, come ad esempio il campionamento e lo studio dei filtri digitali. Le sue proprietà discendono banalmente dalle proprietà delle serie di potenze e dalla teoria delle funzioni olomorfe per la somma (13.2). Tuttavia conviene metterle in evidenza ed eseguire qualche calcolo esplicito.

Sia $A(z)$ la \mathcal{Z} -trasformata della successione $\{a_n\}$ con raggio di convergenza r_a .

13.1 Esercizio. Indichiamo con δ_k la successione di Kronecker $\delta_k := \underbrace{\{0, \dots, 0, 1, 0, 0, \dots\}}_k$.

la sua \mathcal{Z} trasformata è evidentemente

$$A(z) := \frac{1}{z^k}, \quad \text{con } r_a = 0.$$

13.2 Esercizio (Campioni costanti). Se $a_n = 1 \forall n$, allora evidentemente $r_a = 1$ e

$$A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^n} = \frac{1}{1 - 1/z} = \frac{z}{z - 1}, \quad |z| > 1.$$

13.3 Esercizio (Campioni lineari). Se $a_n = n \forall n$, allora derivando termine a termine,

$$\begin{aligned} A(z) &:= \sum_{n=0}^{\infty} n \frac{1}{z^n} = z \sum_{n=0}^{\infty} n z^{-n-1} = -z \sum_{n=0}^{\infty} D(z^{-n}) \\ &= -zD\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^n}\right) = -zD\left(\frac{z}{z-1}\right) = \frac{z}{(z-1)^2}, \quad |z| > 1. \end{aligned}$$

13.4 Esercizio. Poichè $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n+1}}{n+1} = -\log(1-z)$, $|z| < 1$, la \mathcal{Z} -trasformata della successione $\{\frac{1}{n+1}\}$ ha raggio di convergenza 1 e

$$A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \frac{1}{z^n} = z \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \frac{1}{z^{n+1}} = z \log \frac{z}{z-1}, \quad |z| > 1.$$

13.5 Esercizio (Campioni esponenziali). Se $a_n = q^n$, allora $r_a = |q|$ e

$$A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} q^n \frac{1}{z^n} = \frac{z/q}{z/q-1} = \frac{z}{z-q}, \quad |z| > |q|.$$

Ad esempio se $a_n = e^{in\omega}$, allora $A(z) = \frac{z}{z-e^{i\omega}}$, $|z| > 1$.

Usando le proprietà delle serie di potenze è facile convincersi che

13.6 Proposizione. Sia $A(z)$ la \mathcal{Z} -trasformata della successione $\{a_n\}$ con raggio di convergenza r_a . Allora la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{1}{z^n}$

- (i) converge assolutamente ad A in $|z| > r_a$,
- (ii) converge uniformemente sui domini strettamente contenuti in $|z| > r_a$,
- (iii) è olomorfa in $|z| > r_a$ e

$$A'(z) = -\sum_{n=0}^{\infty} n a_n \frac{1}{z^{n+1}}, \quad |z| > r_a.$$

Dimostrazione. Le (i) e (ii) seguono evidentemente dalla (13.2). Inoltre, essendo $S'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n z^{n-1}$ si ricava, sempre dalla (13.2), e dal teorema di derivazione termine a termine per le serie di potenze, che

$$A'(z) = -S'\left(\frac{1}{z}\right) \frac{1}{z^2} = -\frac{1}{z^2} \sum_{n=0}^{\infty} n a_n \frac{1}{z^{n-1}} = -\sum_{n=0}^{\infty} n a_n \frac{1}{z^{n+1}}.$$

□

13.7 Proposizione (Linearità). Siano $A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{1}{z^n}$, $B(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \frac{1}{z^n}$ rispettivamente le \mathcal{Z} -trasformate delle successioni $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ con raggi di convergenza r_a e r_b . Allora per ogni $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ la \mathcal{Z} -trasformata di $\{\lambda a_n + \mu b_n\}$ ha raggio di convergenza minore o uguale a $\max(r_a, r_b)$ e

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\lambda a_n + \mu b_n) \frac{1}{z^n} = \lambda A(z) + \mu B(z), \quad |z| > \max(r_a, r_b).$$

13.8 Proposizione (Prodotto). Siano $A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{1}{z^n}$, $B(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \frac{1}{z^n}$ rispettivamente le \mathcal{Z} -trasformate delle successioni $a := \{a_n\}$, $b := \{b_n\}$ con raggi di convergenza r_a e r_b . Allora la \mathcal{Z} -trasformata di $\{(a * b)_n\}$ ha raggio di convergenza minore o uguale a $\max(r_a, r_b)$ e

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a * b)_n \frac{1}{z^n} = A(z) B(z), \quad |z| > \max(r_a, r_b).$$

Dimostrazione. Dal Corollario 6.17 segue che la serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} (a * b)_n w^n$ ha raggio di convergenza maggiore o uguale di $\min(1/r_a, 1/r_b)$ e che

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a * b)_n w^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n w^n \right), \quad |w| < \min(1/r_a, 1/r_b).$$

Sostituendo w con $1/z$ si ottiene la tesi. \square

13.9 Proposizione (Serie di prodotti). Siano $A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{1}{z^n}$, $B(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \frac{1}{z^n}$ rispettivamente le \mathcal{Z} -trasformate delle successioni $a := \{a_n\}$ e $b := \{b_n\}$ con raggi di convergenza r_a e r_b . Allora la \mathcal{Z} -trasformata di $\{a_n b_n\}$ ha raggio di convergenza minore o uguale a $r_a r_b$ e per ogni z con $|z| > r_a r_b$ si ha

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n \frac{1}{z^n} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial^+ B(0, \rho)} A(w) B\left(\frac{z}{w}\right) \frac{1}{w} dw,$$

dove ρ è un numero tale che $r_a < \rho < |z|/r_b$.

Dimostrazione. La serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n \zeta^n$$

ha raggio di convergenza maggiore o uguale a $1/(r_a r_b)$ e se $|\zeta| < 1/(r_a r_b)$ allora

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n \zeta^n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial^+ B(0, t)} A(1/s) B\left(\frac{s}{\zeta}\right) \frac{1}{s} ds$$

essendo t un numero tale che $r_b |\zeta| < t < 1/r_a$. Cambiando variabile $w = 1/s$ nell'integrale e prendendo $\rho := 1/t$, si ha

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial^+ B(0, t)} A(1/s) B\left(\frac{s}{\zeta}\right) \frac{1}{s} ds - \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial^- B(0, \rho)} A(w) B\left(\frac{1}{w\zeta}\right) \frac{1}{w} dw$$

e, scegliendo $\zeta = 1/z$, si ottiene la tesi. \square

Supponiamo di avere una successione $\{a_n\}$ e di operare su di essa. È utile conoscere come viene modificata la \mathcal{Z} -trasformata. Siano $A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{1}{z^n}$ e $B(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \frac{1}{z^n}$ le \mathcal{Z} -trasformate delle successioni $a := \{a_n\}$ e $b := \{b_n\}$ con raggi di convergenza r_a e r_b rispettivamente.

13.10 Esercizio. Se $b_n := \{ \underbrace{(0, \dots, 0)}_k, a_0, a_1, a_2, \dots \}$ è la traslazione in avanti di k posti,

allora $r_b = r_a$ e

$$B(z) = \sum_{n=k}^{\infty} a_n \frac{1}{z^{n+k}} = \frac{1}{z^k} A(z), \quad |z| > r_a.$$

13.11 Esercizio. Sia $b_n = a_{n+k}$ la traslazione all'indietro di k posti. Allora $r_b = r_a$ e

$$B(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+k} \frac{1}{z^n} = z^k \left(A(z) - a_0 - \frac{a_1}{z} - \frac{a_2}{z^2} - \dots - \frac{a_{k-1}}{z^{k-1}} \right), \quad |z| > r_a.$$

13.12 Esercizio (Campionamento lineare). Se $b_n = na_n$, allora $r_b = r_a$ e

$$B(z) = \sum_{n=0}^{\infty} na_n \frac{1}{z^n} = -zA'(z), \quad |z| > r_a.$$

13.13 Esercizio (Campionamento esponenziale). Se $b_n = a_n q^n$, allora $r_b = |q| r_a$

$$B(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{1}{(z/q)^n} = A\left(\frac{z}{q}\right), \quad |z| > |q| r_a.$$

13.14 Esercizio (Campioni periodici). Una successione $\{b_n\}$ si dice periodica di periodo p se $b_{n+p} = b_n \forall n$. Poiché $\{b_n\}$ è limitata e periodica, il raggio di convergenza della \mathcal{Z} -trasformata è necessariamente 1. Indichiamo con $A(z)$ la \mathcal{Z} -trasformata della successione

$$a_n := \begin{cases} b_n & \text{se } 0 \leq n < p, \\ 0 & \text{se } n \geq p. \end{cases}$$

Evidentemente $A(z) := \sum_{n=0}^{p-1} a_n \frac{1}{z^n}$ con $r_a = 0$ e

$$\begin{aligned} B(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} b_n \frac{1}{z^n} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{n=kp}^{(k+1)p} b_n \frac{1}{z^n} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{p-1} b_n \frac{1}{z^{n+kp}} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{z^{kp}} \left(\sum_{n=0}^{p-1} b_n \frac{1}{z^n} \right) = A(z) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{z^{kp}} \quad \text{prodotto di convoluzione} \\ &= \frac{z^p}{z^p - 1} A(z), \quad |z| > 1. \end{aligned}$$

13.15 Esercizio. Calcolare la \mathcal{Z} -trasformata e il relativo raggio di convergenza per le seguenti successioni

$$a_n = \cos(\omega n), \quad a_n n \sin(\omega n),$$

13.16 Esercizio. Sia $A(z)$ la \mathcal{Z} -trasformata di una successione $\{a_n\}$ con raggio di convergenza r_a . Calcolare la \mathcal{Z} -trasformata e il rispettivo raggio di convergenza per le successioni

$$\begin{aligned} b_n &= a_n(1+n), & b_n &= a_n \frac{1+n}{2+n}, \\ b_n &= a_n \cos(\omega n), & b_n &= a_n n \sin(\omega n), \\ b_n &= a_{n-1}(1+n), & b_n &= \frac{a_n + a_{n-1}}{2}, \\ b_n &= \begin{cases} a_n & \text{se } n \leq p, \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases} & b_n &= \begin{cases} a_n & \text{se } n \text{ è pari,} \\ 0 & \text{se } n \text{ è dispari,} \end{cases} \\ b_n &= \begin{cases} a_n & \text{se } n \text{ è divisibile per } 3, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases} \end{aligned}$$

13.b \mathcal{Z} -antitrasformata

Sia $A(z)$, $|z| > r$ una funzione olomorfa, allora $S(w) := f(1/w)$ è olomorfa in $0 < |w| < 1/r$. Se $f(1/w)$ ha una singolarità eliminabile in 0, i.e., se

$$\lim_{w \rightarrow 0} wA(1/w) = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{A(z)}{z} = 0,$$

la funzione $S(w) := A(1/w)$ è olomorfa in tutto il disco $|w| < 1/r$ e dunque ha uno sviluppo in serie di potenze centrato in 0 con raggio di convergenza $1/r$,

$$A(1/w) = S(w) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n.$$

I coefficienti a_n sono univocamente individuati da A . Dalla formula di Cauchy, cfr. Teorema 7.5,

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial^+ B(0,t)} \frac{S(s)}{s^{n+1}} ds$$

dove t è un qualunque numero tale che $0 < t < 1/r$. Cambiando variabile, ponendo $s = 1/w$ nell'integrale e ponendo $\rho := 1/t$, si ottiene

$$a_n = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial^- B(0,\rho)} A(w)w^{n-1} dw = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial^+ B(0,\rho)} A(w)w^{n-1} dw,$$

o, con il linguaggio dei residui,

$$a_n = -\text{Res}(A(z)z^{n-1}, \infty) \quad \forall n.$$

La formula precedente è svantaggiosa quando si vuole calcolare tutti (o molti) degli a_n perché richiede di calcolare il residuo di una infinità di funzioni con un ordine di singolarità all'infinito diverso per ogni n . La questione si semplifica molto se A è olomorfa in tutto \mathbb{C} eccetto che in un numero finito di punti $\{p_1, p_2, \dots, p_k\}$, come nel caso, frequente nelle applicazioni, in cui $A(z) = \frac{A(z)}{B(z)}$ è un quoziente di polinomi. In questo caso, essendola somma dei residui nulla,

$$a_n = -\text{Res}(f(z)z^{n-1}, \infty) = \sum_{j=1}^k \text{Res}(f(z)z^{n-1}, p_j)$$

e dunque il calcolo degli $\{a_n\}$ si fa calcolando i residui di $A(z)z^{n-1}$ sulle singolarità di A , dove l'ordine della singolarità è indipendente da n .

13.c Equazioni alle differenze e \mathcal{Z} -trasformata

Il metodo della \mathcal{Z} -trasformata è utile nel trovare le soluzioni di *equazioni alle differenze lineari*.

13.17 Esercizio (Numeri di Fibonacci). Consideriamo il caso della successione $\{f_n\}$ dei numeri di Fibonacci definita da

$$\begin{cases} f_{n+2} = f_{n+1} + f_n, & n \geq 0, \\ f_0 = 0, f_1 = 1, \end{cases}$$

che si calcola essere, cfr. Capitolo 12,

$$f_n := \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right), \quad n \geq 0. \quad (13.3)$$

Ritroviamo il risultato con il cosiddetto *metodo della z -trasformata*. Si osservi anzitutto per induzione che $f_n \leq 2^n$ e quindi la serie

$$F(z) := \sum_{n=0}^{\infty} f_n \frac{1}{z^n},$$

z -trasformata di $\{f_n\}$, converge per $|z| > 2$. Moltiplicando l'equazione per $1/z^n$ e sommando su n , si trova

$$z^2(F(z) - f_0 - f_1/z) - z(F(z) - f_0) - F(z) = 0,$$

i.e.,

$$F(z) = \frac{z}{z^2 - z - 1} \quad \text{almeno in } |z| > 2.$$

La formula di Cauchy per coefficienti delle serie di Laurent dà quindi,

$$f_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial+B(0,r)} \frac{z^n}{z^2 - z - 1} dz$$

dove r è arbitrario con $r > 2$. Perciò

$$f_n = -\text{Res}(g_n(z), \infty), \quad g_n(z) = \frac{z^n}{z^2 - z - 1}.$$

Il calcolo della successione dei residui all'infinito delle $\{g_n\}$ è ancora un processo iterativo, come lo era a priori il calcolo di $\{f_n\}$: il tutto sembrerebbe dunque inutile. Tuttavia, tutte le funzioni $g_n(z)$ sono olomorfe in $\mathbb{C} \setminus \{a, b\}$ dove

$$a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad b = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

sono le radici dell'equazione $z^2 - z - 1 = 0$. Dal teorema di Morera nella forma del Corollario 10.22

$$\text{Res}(g_n(z), \infty) + \text{Res}(g_n(z), a) + \text{Res}(g_n(z), b) = 0,$$

da cui

$$f_n = \text{Res}(g_n(z), a) + \text{Res}(g_n(z), b).$$

Essendo a e b poli semplici per g_n ,

$$\text{Res}(g_n(z), a) = a^n \frac{1}{2a-1} = \frac{1}{\sqrt{5}} a^n, \quad \text{Res}(g_n(z), b) = b^n \frac{1}{2b-1} = -\frac{1}{\sqrt{5}} b^n,$$

e quindi la (13.3).

Più in generale, consideriamo una *equazione alle differenze lineare di ordine k*

$$a_k x_{n+k} + a_{k-1} x_{n+k-1} + \cdots + a_0 x_n = f_{n+1}, \quad n \geq 0 \quad (13.4)$$

Supponiamo che le \mathcal{Z} -trasformate $X(z)$ e $F(z)$ delle successioni $\{x_n\}$ e $\{f_n\}$ (si pone per comodità $f_0 = 0$) esistano ed abbiano rispettivamente raggi di convergenza r_x e r_f . Moltiplicando l'equazione n -esima per $\frac{1}{z^n}$, o equivalentemente, usando la linearità della \mathcal{Z} -trasformata e la formula per lo shift all'indietro, si trova

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \frac{1}{z^n} = \sum_{j=0}^k a_j z^j \left(A(z) - \sum_{i=0}^{j-1} \frac{x_i}{z^i} \right) = P(z)A(z) - \sum_{j=0}^n a_j \left(\sum_{i=0}^{j-1} \frac{x_i}{z^i} \right),$$

essendo $P(z) := \sum_{j=0}^k a_j z^j$ il cosiddetto *polinomio caratteristico* dell'equazione.

Si conclude perciò

13.18 Proposizione. *Sia $F(z)$ la \mathcal{Z} -trasformata della successione $\{f_n\}$ dove si è posto $f_0 = 0$ con raggio di convergenza r_f e sia r_P tale che $1/P(z)$ è olomorfa in $\{|z| > 1/r_P\}$. Allora la \mathcal{Z} -trasformata $X(z)$ di una soluzione $\{x_n\}$ di (13.4) ha raggio di convergenza minore o uguale a $\max(r_F, r_P)$ e*

$$X(z) = \frac{1}{P(z)} \left(F(z) + \sum_{n=0}^{k-1} x_n \frac{1}{z^n} \right).$$

13.d Sistemi di equazioni alle differenze e \mathcal{Z} -trasformata

Il metodo delle serie di potenze, o della \mathcal{Z} -trasformata che dir si voglia, non è limitato alle solo equazioni scalari. Si possono infatti considerare serie di potenze a coefficienti vettori di \mathbb{C}^N

$$\sum_{k=0}^{\infty} f_k z^k, \quad f_k \in \mathbb{C}^N, \quad (13.5)$$

Si definisce allora il raggio di convergenza ρ di (13.5) come

$$\frac{1}{\rho} := \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|f_n|}$$

e si prova, come per le serie a coefficienti complessi, che la serie di potenze (13.5) converge assolutamente in ogni punto z con $|z| < \rho$. Segue che la serie (13.5) converge puntualmente in \mathbb{C}^N ad una funzione $S(z)$,

$$S(z) := \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n \in \mathbb{C}^N, \quad |z| < \rho.$$

Questo vuole dire che, se $f_k := (f_k^1, f_k^2, \dots, f_k^N)$ e $S(z) := (S^1(z), S^2(z), \dots, S^N(z))$, si ha

$$S^i(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_k^i z^n, \quad |z| > \rho.$$

Si può dunque applicare la teoria delle serie di potenze lavorando componente per componente. In particolare ogni componente di S è olomorfa su $|z| > r$ e

$$f_n = -\text{Res}(z^{n-1} f(z), \infty) \quad \forall n.$$

Inoltre, se (le componenti di) $f(z)$ è olomorfa in \mathbb{C} meno un numero finito di punti p_1, p_2, \dots, p_k , allora

$$f_n = \sum_{j=1}^k \operatorname{Res}(z^{n-1}f(z), p_j).$$

Un caso particolare di serie di potenze a coefficienti vettoriali è quello delle serie a coefficienti matrici, $\mathbf{F}_k \in M_{M \times N}(\mathbb{C})$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{F}_n z^n. \tag{13.6}$$

Introducendo una norma per le matrici, ad esempio la norma $\|\mathbf{F}\|_2$ o la norma dell'operatore lineare associato, $x \rightarrow \mathbf{F}x$,

$$|\mathbf{F}| := \sup_{\substack{x \in \mathbb{C}^N \\ x \neq 0}} \frac{|\mathbf{F}x|}{|x|},$$

si chiama raggio di convergenza ρ della serie di potenze (13.6) il numero

$$\frac{1}{\rho} := \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|\mathbf{F}_n|}$$

Di nuovo, la serie di potenze (13.5) converge assolutamente in z se $|z| < \rho$ e dunque converge puntualmente in $M_{M,N}(\mathbb{C})$ ad una funzione $\mathbf{S} : \{|z| < \rho\} \rightarrow M_{N,N}(\mathbb{C})$

$$\mathbf{S}(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{F}_n z^n \in M_{N,N}(\mathbb{C}), \quad |z| < \rho,$$

è equivalente a

$$S_{ij}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (\mathbf{F}_n)_{ij} z^n, \quad |z| > \rho,$$

se $\mathbf{F}_k = [(\mathbf{F}_k)_{ij}]$ e $S(z) = [S_{ij}(z)]$. Si può dunque applicare la teoria delle serie di potenze (e delle funzioni olomorfe) a ciascuna componente.

Ripetendo la dimostrazione del Teorema 6.16 si prova

13.19 Teorema. *Sia $\mathbf{A}(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{A}_n z^n$ una serie a coefficienti matrici $M \times N$ $a = \{\mathbf{A}_n\}$, con raggio di convergenza ρ_a e sia $\sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n$ una serie a coefficienti vettori, $f_n \in \mathbb{C}^N$, con raggio di convergenza ρ_f . Allora la serie*

$$\sum_{n=0}^{\infty} g_n z^n, \quad g_n = (a * f)_n := \sum_{k=0}^n \mathbf{A}_{n-k} f_k$$

ha raggio di convergenza $\rho \geq \min(\rho_a, \rho_f)$ e

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a * f)_n z^n = \mathbf{A}(z)F(z).$$

Prima di guardare ai sistemi di ricorrenza torna utile la seguente

13.20 Proposizione. Sia $\mathbf{A} \in M_{N,N}(\mathbb{C})$. Allora per $|z| > |\mathbf{A}|$, la matrice $\text{Id} - \frac{1}{z}\mathbf{A}$ è invertibile e

$$\left(\text{Id} - \frac{1}{z}\mathbf{A}\right)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{A}^n \frac{1}{z^n}, \quad |z| > |\mathbf{A}|.$$

Dimostrazione. Essendo $|z| > |\mathbf{A}|$, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} |\mathbf{A}|^n \left|\frac{1}{z^n}\right| < +\infty$ e dunque $|\mathbf{A}|^n \left|\frac{1}{z^n}\right| \rightarrow 0$ per $n \rightarrow \infty$. D'altra parte si ha

$$\left(\text{Id} - \frac{1}{z}\mathbf{A}\right) \sum_{p=0}^n \mathbf{A}^p \frac{1}{z^p} = \text{Id} - \mathbf{A}^{n+1} \frac{1}{z^{n+1}} \quad (13.7)$$

segue che

$$\left| \left(\text{Id} - \frac{1}{z}\mathbf{A}\right) \sum_{p=0}^n \mathbf{A}^p \frac{1}{z^p} - \text{Id} \right| = |\mathbf{A}^{n+1}| \frac{1}{|z|^{n+1}} \rightarrow 0$$

per $n \rightarrow \infty$, i.e., la tesi. \square

Consideriamo il sistema $N \times N$ di ricorrenze

$$\begin{cases} X_0 & \text{dato} \\ X_{n+1} = \mathbf{A}X_n + F_{n+1} & n \geq 0, \end{cases}$$

di cui abbiamo trovato la soluzione per induzione,

$$X_n = \mathbf{A}^n X_0 + \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{A}^{n-k} F_k, \quad \forall n.$$

Vogliamo ritrovare il risultato mediante la \mathcal{Z} -trasformata. Siano $X(z)$ e $F(z)$ rispettivamente le \mathcal{Z} -trasformate di $\{X_n\}$ e $\{F_n\}$ (si è al solito posto $F_0 = 0$) e siano r_X e r_F i rispettivi raggi di convergenza. Moltiplicando ciascuna equazione per $\frac{1}{z^n}$ e sommando, si ottiene

$$z(X(z) - X_0) = \mathbf{A}X(z) + zF(z), \quad |z| > r_F.$$

i.e.,

$$\left(\text{Id} - \frac{1}{z}\mathbf{A}\right)X(z) = F(z) + X_0.$$

se ora $|z| > \|\mathbf{A}\|$ la matrice $\text{Id} - \frac{1}{z}\mathbf{A}$ è invertibile, per la Proposizione 13.20 e dunque $X(z)$ ha raggio di convergenza $r_X = \max(\|\mathbf{A}\|, r_F)$ e

$$X(z) = \left(\text{Id} - \frac{1}{z}\mathbf{A}\right)^{-1}(F(z) + X_0). \quad (13.8)$$

da cui

$$X_n = -\text{Res}(z^{n-1}X(z), \infty).$$

Gli $\{X_n\}$ si calcola esplicitamente con la Proposizione 13.20. Infatti,

$$\left(\text{Id} - \frac{1}{z}\mathbf{A}\right)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{A}^n \frac{1}{z^n}$$

e quindi, usando anche il Teorema 13.19,

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} (\mathbf{A}^n X_0) \frac{1}{z^n} + \left(\sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{A}^n \frac{1}{z^n} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} F_n \frac{1}{z^n} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\mathbf{A}^n X_0 + \sum_{j=0}^n \mathbf{A}^{n-j} F_j \right) \frac{1}{z^n}, \end{aligned}$$

i.e.,

$$X_n = \mathbf{A}^n X_0 + \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{A}^{n-k} F_k \quad \forall n.$$

14. Indice analitico

- Z-trasformata
 - del prodotto di convoluzione di matrici, 92
- \mathcal{Z} -antitrasformata, 89
- \mathcal{Z} -trasformata, 85
 - campionamento
 - esponenziale, 88
 - lineare, 88
 - periodico, 88
 - campioni
 - costanti, 85
 - esponenziali, 86
 - lineari, 86
 - convergenza, 86
 - del prodotto di convoluzione, 87
 - di prodotti, 87
 - linearità, 86
 - traslazione all'indietro, 88
 - traslazione in avanti, 87
- arcoseno, 24
- arcotangente, 12, 23
- condizioni
 - di conformalità, 4
- convergenza
 - uniforme, 33
- coseno
 - reale, 23
- derivata
 - complessa, 1
- differenziabilità
 - complessa, 2
- differenziale
 - olomorfo, 55
- diseguaglianza
 - Jordan, 70
- distanza, 17
- equazione
 - Cauchy-Riemann, 4
- Equazioni alle differenze
 - metodo della \mathcal{Z} -trasformata
 - per equazioni, 89
 - per sistemi, 91
 - equazioni alle differenze
 - di ordine superiore, 80
 - primo ordine, 77
 - secondo ordine, 78
 - sistemi, 80
- esponenziale
 - reale, 23
- formula
 - Cauchy, 46, 57
 - Laplace, 71
- funzione
 - olomorfa
 - principio di identità, 52
 - stima di Cauchy, 51
 - sviluppabilità in serie, 47
- funzione olomorfe, 1
- funzioni
 - olomorfe, 1
- funzioni olomorfe
 - esponenziale, 24
 - funzioni iperboliche, 25, 26
 - funzioni trigonometriche, 25, 26
 - inversa locale, 53
 - invertibilità locale, 53
 - principio di massimo, 52, 53
 - residuo, 64
 - calcolo, 65
 - singolarità
 - all'infinito, 61
 - eliminabili, 59
 - essenziali, 61
 - poli, 60
 - stima
 - del sup, 53
 - sviluppabilità in serie di Laurent, 63
- indice di allacciamento, 56
- integrali
 - Fresnel, 72
 - impropri, 69
 - tipo Fourier, 70
 - trigonometrici, 67
- limite
 - uniforme, 33
 - continuità, 34

- logaritmo
 - reale, 23
- logaritmo
 - reale, 11
- matrici
 - a blocchi, 81
 - forma di Jordan, 81
 - potenze, 81
- norma, 17
- numeri
 - e , 15
 - Bernoulli, 62
 - Fibonacci, 90
 - irrazionalità di e , 15
- primitiva olomorfa, 8
- principio
 - di identità, 52
 - di massimo
 - per funzioni olomorfe, 52, 53
- prodotto
 - alla Cauchy, 38
 - convoluzione, 38
- proprietà
 - della media
 - per funzioni olomorfe, 52
- residuo, 64
- seno
 - reale, 23
- serie
 - dominio di convergenza, 21
 - Laurent, 62
- serie di potenze
 - raggio di convergenza, 20
 - serie binomiale, 24
- serie potenze
 - convergenza uniforme, 33
- simbolo
 - Kronecker, 38
- somme di Gauss, 73
- spazio di Banach, 17
- spazio normato, 17
 - serie, 18
 - convergenza assoluta, 18
- stime
 - di Cauchy, 51
- successione
 - prodotto di convoluzione, 38
- teorema
 - di estensione di Riemann, 59
 - di stabilità per sistemi di equazioni alle differenze lineari, 83
 - fondamentale del calcolo, 8
 - fondamentale dell'algebra, 51
 - Goursat, 45, 48
- Liouville, 51
- Morera, 48
- passaggio al limite sotto il segno di integrale, 36
- residui, 64
- sviluppo in serie dell'inversa di una matrice, 93