I. Sistemi d ricorrenze lineari

Sia $\mathbf{A} \in M_{k,k}(\mathbb{C})$ una matrice complessa. Il sistema lineare omogeneo di ricorrenze per la successione $\{X_n\}$ di vettori di $\mathbb{C}^k$

$$\begin{cases} X_{n+1} = \mathbf{A} X_n, \quad n \geq 0, \\ X_0 \ \textit{assegnato} \end{cases}$$

ha come unica soluzione $X_n := \mathbf{A}^n X_0 \ \forall n$, come si verifica immediatamente per induzione.

Proposizione. *Assegnata una successione $\{F_n\}$ di vettori di $\mathbb{C}^k$, il sistema lineare non omogeneo di ricorrenze per la successione $\{X_n\}$ di vettori di $\mathbb{C}^k$*

$$\begin{cases} X_{n+1} = \mathbf{A} X_n + F_{n+1}, \quad n \geq 0, \\ X_0 \text{ assegnato} \end{cases}$$

ha come unica soluzione

$$X_n := \mathbf{A}^n X_0 + \sum_{j=0}^{n} \mathbf{A}^{n-j} F_j \qquad \forall n \geq 0$$

dove siè posto $F_0 := 0 \in \mathbb{C}^k$.

Dimostrazione. Infatti per ogni $n \geq 0$,

$$\begin{aligned} X_{n+1} &= \mathbf{A}^{n+1} X_0 + \sum_{j=0}^{n+1-j} \mathbf{A}^{n+1} F_j = \mathbf{A}^{n+1} X_0 + \sum_{j=0}^{n} \mathbf{A}^{n+1-j} F_j + F_{n+1} \\ &= \mathbf{A}\, \mathbf{A}^n X_0 + \mathbf{A} \sum_{j=0}^{n} \mathbf{A}^{n-j} F_j + F_{n+1} = \mathbf{A}\Big(\mathbf{A}^n X_0 + \sum_{j=0}^{n} \mathbf{A}^{n-j} F_j \Big) + F_{n+1} \\ &= \mathbf{A} X_n + F_{n+1}. \end{aligned}$$

□

Potenze di una matrice

Resta il problema di calcolare le potenze successive della matrice $\mathbf{A}$ in modo efficiente. Si osserva che

(i) se $\mathbf{B}$ è una matrice simile ad $\mathbf{A}$, $\mathbf{A} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{S}$ per qualche matrice $\mathbf{S}$ con $\det \mathbf{S} \neq 0$, allora

$$\mathbf{A}^2 = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{S}\mathbf{S}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{S} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{B}^2\mathbf{S}$$

e, per induzione,

$$\mathbf{A}^n = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{B}^n\mathbf{S} \qquad \forall n.$$

(ii) Se $\mathbf{B}$ è una matrice a blocchi quadrati sulla diagonale principale

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \boxed{\mathbf{B}_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \boxed{\mathbf{B}_2} & \dots & 0 \\ \dots & & & \\ 0 & \dots & 0 & \boxed{\mathbf{B}_r} \end{pmatrix}$$

allora

$$\mathbf{B}^n = \begin{pmatrix} \boxed{\mathbf{B}_1^n} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \boxed{\mathbf{B}_2^n} & \dots & 0 \\ \dots & & & \\ 0 & \dots & 0 & \boxed{\mathbf{B}_r^n} \end{pmatrix}$$

Siano $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ gli autovalori distinti di $\mathbf{A}$ e $m_1, m_2, \dots, m_k$ le relative molteplicità. Per ogni k sia p_k la dimensione dell'autospazio relativo a λ_k. Allora esiste un cambiamento di base $\mathbf{S}$ tale che $\mathbf{J} := \mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S}$ abbia la forma di Jordan

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \boxed{\mathbf{J}_{1,1}} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \boxed{\mathbf{J}_{1,2}} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \boxed{\mathbf{J}_{k,p_k}} \end{pmatrix}$$

dove $i = 1, \dots, k$, $j = 1, \dots, p_i$ e

$$
\mathbf{J}_{i,j} = \begin{cases} \lambda_i & \text{se } \mathbf{J}_{i,j} \text{ ha dimensione 1,} \\ \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots \\ \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_i \end{pmatrix} & \text{altrimenti.} \end{cases}
$$

Percio' $\mathbf{A}^n = \mathbf{S}\mathbf{J}^n\mathbf{S}^{-1}$, e

$$
\mathbf{J}^n = \begin{pmatrix} \boxed{\mathbf{J}^n_{1,1}} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \boxed{\mathbf{J}^n_{1,2}} & 0 & \dots & 0 \\ \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \boxed{\mathbf{J}^n_{k,p_k}} \end{pmatrix}.
$$

Resta da calcolare la potenza di ciascun blocco di Jordan. Se $\mathbf{J}' = \mathbf{J}_{i,j} = (\lambda)$ ha dimensione 1, allora evidentemente $\mathbf{J}'^n = \lambda^n$. Se invece $\mathbf{J}' = \mathbf{J}_{i,j}$ è uno dei blocchi di dimensione q maggiore o uguale a 2,

$$
\mathbf{J}' = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ \dots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix},
$$

allora

$$
\mathbf{J}' = \lambda\,\mathrm{Id} + \mathbf{B}, \qquad \mathbf{B} = (B)_{i,j}, \qquad B_{ij} = \delta_{i+1,j}.
$$

Essendo ora

$$
(\mathbf{B}^r)_{ij} = \begin{cases} \delta_{r+i,j} & \text{se } r < q, \\ 0 & \text{se } r \geq q, \end{cases}
$$

si ha $\mathbf{B}^q = 0$ e dalla formula del binomio di Newton

$$
\mathbf{J}'^n = (\lambda\,\mathrm{Id} + \mathbf{B})^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \lambda^{n-j}\mathbf{B}^j = \sum_{j=0}^{q-1} \binom{n}{j} \lambda^{n-j}\mathbf{B}^j = \lambda^n \sum_{j=0}^{q-1} \binom{n}{j} \frac{1}{\lambda^j}\mathbf{B}^j
$$

i.e.,

$$\mathbf{J'}^n = \lambda^n \begin{pmatrix} 1 & n\frac{1}{\lambda} & \binom{n}{2}\frac{1}{\lambda^2} & \dots & \binom{n}{q-1}\frac{1}{\lambda^{q-1}} \\ 0 & 1 & n\frac{1}{\lambda} & \dots & \binom{n}{q-2}\frac{1}{\lambda^{q-2}} \\ \dots & & & & \\ 0 & 0 & \dots & 1 & n\frac{1}{\lambda} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si osservi che ciascun elemento di $\mathbf{A}^n$ ha la forma

$$\sum_{j=1}^{k} \lambda_j^n p_j(t)$$

dove $\lambda_1,\ \lambda_2, \dots,\ \lambda_n$ sono gli autovalori di $\mathbf{A}$ e $p_j(t)$ è un polinomio di grado al piu' $p_j - 1$ (p_j è la molteplicità algebrica di λ_j). Segue immediatamente che per ogni $\rho > \max_i(|\lambda_i|)$ esiste una costante C_ρ tale che per ogni soluzione di $X_{n+1} = \mathbf{A}X_n$ si ha

$$|X_n| \le C_\rho \rho^n\, |X_0| \qquad \forall n.$$

In particolare

Proposizione. *Se tutti gli autovalori di* $\mathbf{A}$ *hanno modulo minore di* 1*, allora ogni soluzione di* $X_{n+1} = \mathbf{A}X_n$ *tende a zero per* $n \to +\infty$*.*

Dimostrazione. Infatti, si sceglie $\sigma > 0$ tale che $\max_{i=1,n} |\lambda_i| < \sigma < 1$. Esiste allora una costante C_σ tale che per ogni soluzione di $X_{n+1} = \mathbf{A}X_n$ si ha

$$|X_n| \le C_\sigma \sigma^n\, |X_0|, \qquad \forall n.$$

Essendo $0 < \sigma < 1$, $\sigma^n \to 0$ e la tesi è provata. $\square$