15. Serie Numeriche

I processi di *somma infinita* compaiono fin dall'antichità. Aristotele nella *Fisica* è cosciente del fatto che la *serie* geometrica

$$1 + q + q^2 + q^3 + \dots$$

ha somma finita se $|q| < 1$ e François Viète (1540–1603) calcola nel 1593

$$1 + q + q^2 + q^3 + \dots = \frac{1}{1-q}.$$

Nel medioevo Nicole d' Oresme (1323–1382) dimostra che la *serie armonica*

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$$

è divergente. I processi infiniti di somma sono anche utilizzati per confutare i paradossi di Zenone. Ma è con la nascita del Calcolo ad opera di Sir Isaac Newton (1643–1727) e Gottfried von Leibniz (1646–1716) che le serie infinite diventano parte integrante del calcolo differenziale e integrale.

In questo capitolo illustriamo alcuni metodi per lo studio della convergenza dei processi di somma infinita o *serie*, discutendo vari esempi.

Il processo di somma

Data una successione $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$, si puo' costruire una nuova successione $\{s_n\}$ sommando via via i termini della successione $\{a_n\}$, i.e., ponendo

$$\begin{cases} s_0 = a_0, \\ s_{n+1} = s_n + a_{n+1}, \quad \forall n \geq 0, \end{cases} \tag{15.1}$$

cioè

$$s_n := a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{j=0}^{n} a_j.$$

La successione $\{s_n\}$ si chiama la *successione delle somme parziali di a_n* o anche serie della successione a_n e si usa indicarla con il simbolo

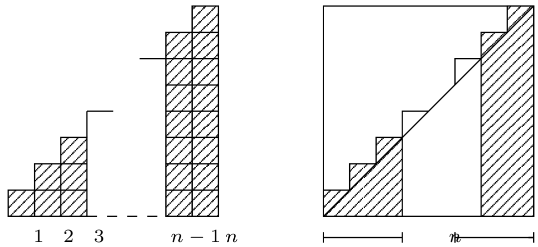

Figura 15.1. $\sum_{j=1}^{n} j = n(n+1)/2$.

$$\sum_{j=0}^{\infty} a_j.$$

Insomma la frase *si consideri la serie* $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$, è sinonimo di *si consideri la successione delle somme parziali* $\sum_{j=0}^{n} a_j$, $n \geq 0$ *della successione* a_n.

15.1 Esempio (Somma dei primi n naturali). Per ogni naturale n c'è una *formula chiusa*, i.e. una formula algebrica con un numero di operazioni da effettuare indipendente da n, per la somma dei primi n naturali. Si ha

$$S_1(n) := 1 + 2 + \cdots + n = \sum_{j=0}^{n} j = \frac{n(n+1)}{2}. \tag{15.2}$$

Se ne possono dare varie dimostrazioni.

(i) Sembra che la seguente dimostrazione sia stata data da Gauss all'età di sette anni. Si scrive

$$\begin{array}{ccccccccccc} S_1(n) & = & 1 & + & 2 & + & \dots & + & (n-1) & + & n \\ S_1(n) & = & n & + & (n-1) & + & \dots & + & 2 & + & 1, \end{array}$$

e sommando le due eguaglianze si ottiene

$$2S_1(n) = (n+1) + (n+1) + \cdots + (n+1) = n(n+1).$$

(ii) Disponendo quadrati di lato 1 come in Figura 15.1, l'area totale dei quadrati tratteggiati è

$$S_1(n) = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}.$$

(iii) La successione $x_n := n(n+1)/2$, $n \geq 0$, soddisfa le

$$\begin{cases} x_0 = 0, \\ x_{n+1} = x_n + (n+1), \quad \forall n \geq 0. \end{cases}$$

che definiscono appunto $S_1(n)$.

15.2 Esempio (Somma dei termini di una progressione geometrica). Sia $x \in \mathbb{R}$. La serie

$$\sum_{j=0}^{\infty} x^j$$

si chiama serie geometrica di ragione x. È appunto la somma della *progressione geometrica* $1, x, x^2, x^3, \ldots$. C'è una formula chiusa per le somme parziali della progressione geometrica.

15.3 Proposizione. *Si ha*

$$\sum_{j=0}^{n} x^j = \begin{cases} \dfrac{q^{n+1}-1}{q-1} & \text{se } x \neq 1, \\ n+1 & \text{se } x = 1. \end{cases}$$

Dimostrazione. Se $q = 1$ ovviamente $\sum_{j=0}^{n} q^j = n+1$. Se invece $q \neq 1$, si puo' procedere in molti modi. Ad esempio si puo' osservare che

$$1 - x^{n+1} = (1-x)(1 + x + x^2 + \cdots + x^n) \qquad \forall n$$

oppure mostrare per sostituzione che la successione

$$x_n := \frac{q^{n+1}-1}{q-1}, \qquad n \geq 0,$$

verifica le ricorrenze del processo di somma,

$$\begin{cases} x_0 = 1, \\ x_{n+1} = x_n + q^{n+1}, \qquad \forall n \geq 0. \end{cases}$$

□

15.4 Esempio (Serie telescopiche). Siano $\{b_n\}$ una successione e sia $\{a_n\}$ definita da si abbia

$$a_0 = 0, \qquad a_n = b_{n-1} - b_n, \quad \forall n \geq 1.$$

Evidentemente

$$\sum_{j=0}^{n} a_j = \sum_{j=1}^{n} a_j == (b_0 - b_1) + (b_1 - b_2) + \cdots + +(b_{n-2} - b_{n-1}) + (b_{n-1} - b_n = b_0 - b_n.$$

Un esempio è la serie $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j(j+1)}$ di Pietro Mengoli (1626–1686). Infatti $\frac{1}{j(j+1)} = \frac{1}{j} - \frac{1}{j+1}$, $\forall j \geq 1$ e dunque

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j(j+1)} = 1 - \frac{1}{n+1} \qquad \forall n \geq 1.$$

Il trucco precedente permette di riscrivere una successione come la somma dei suoi incrementi successivi.

Somma di una serie

15.a Serie convergenti, divergenti, indeterminate

Sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $a_n \in \mathbb{R}$, una serie numerica.

15.5 Definizione. *Si chiama* somma della serie *il limite, se esiste, delle somme parziali della serie. In questo caso la somma si indica con il simbolo* $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$,

$$\sum_{j=0}^{\infty} a_j := \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n} a_j.$$

Si possono verificare 3 situazioni tra loro esclusive.

(i) Il $\lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n} a_j$ non esiste. In questo caso si dice che *la serie è indeterminata.*
(ii) $\lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n} a_j = L \in \mathbb{R}$. In questo caso si dice che *la serie converge ad* L,
(iii) $\lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n} a_j = +\infty$ (risp. $-\infty$). In questo caso si dice che *la serie diverge a* $+\infty$ *(*risp. $-\infty$*).*

15.b Serie e integrali impropri

Il concetto di somma di una serie può essere interpretato come un caso particolare di integrale improprio, cfr. Capitolo 11. Infatti ad una successione $\{a_n\}$ di numeri reali, associamo la funzione costante a tratti $\varphi : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ definita da

$$\varphi(x) = a_n \qquad \text{se } n-1 \le x < n,$$

evidentemente φ è misurabile e per ogni $n \ge 0$ si ha

$$\sum_{j=1}^{n} a_j = \int_0^n \varphi(x)\, dx. \tag{15.3}$$

15.6 Proposizione. $\lim_{x\to+\infty} \int_0^x \varphi(x)\, dx$ *esiste se e solo se esiste il limite di successione* $\lim_{n\to\infty} \int_0^n \varphi(x)\, dx$. *In questo caso i due limiti sono uguali. In particolare la serie* $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ *converge se e solo se* φ *è integrabile in senso improprio su* $[0, \infty[$.

Dimostrazione. Sia $F(x) := \int_0^x \varphi(s)\, ds$. Se esiste il limite di $F(x)$ per $x \to \infty$, segue dal teorema di collegamento, Teorema 14.17, che $F(n) \to \infty$ per $n \to \infty$ e i due limiti coincidono. Supponiamo ora che la successione $\{F(n)\}$ converga ad L per $n \to \infty$. Per ogni $x \ge 0$, indichiamo con n_x la parte intera di x e osserviamo che si ha

$$F(x) = F(n_x) + a_{n_x}(x - n_x)$$

da cui

$$\begin{cases} \phi(n) \le \phi(x) \le \phi(n+1) & \text{se } a_n \ge 0 \\ \phi(n+1) \le \phi(x) \le \phi(n) & \text{se } a_n \le 0. \end{cases} \tag{15.4}$$

In ogni caso

$$\min(F(n_x), F(n_x+1)) \le F(x) \le \max(F(n_x), F(n_x+1))$$

e quindi, per $x \to \infty$, $F(x) \to L$ per il criterio del confronto. □

Concludiamo questa sezione con una condiziine necessaria per la convergenza di una serie.

15.7 Proposizione. *Sia* $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ *una serie convergente. Allora* $a_j \to 0$.

Dimostrazione. Evidentemente per ogni $n \geq 0$ si ha

$$a_n = \sum_{j=0}^{n} a_j - \sum_{j=0}^{n-1} a_j.$$

Se $\sum_{j=0}^{n} a_j \to L \in \mathbb{R}$, usando la regola per il calcolo dei limite della somma si trova che a_n ha limite $L - L = 0$. □

Attenzione, la condizione $a_n \to 0$ *non* implica in generale che la serie $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ converge, cfr. ad esempio la serie armonica in Paragrafo 15.d.

Alcuni esempi

15.c La serie geometrica

Dalla Proposizione 15.3 segue immediatamente

15.8 Proposizione (Serie geometrica). *La serie geometrica di ragione* $x \in \mathbb{R}$

- *converge se* $|x| < 1$ *a* $\frac{1}{1-x}$,
- *diverge a* $+\infty$ *se* $x \geq 1$,
- *è indeterminata se* $x < -1$.

15.d La serie armonica

La serie armonica è data da

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots.$$

Non è nota una forma chiusa per le somme parziali della serie armonica. Pero' con i metodi del calcolo, è facile ottenere stime per difetto e per eccesso delle somme parziali

$$H_n := \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j}.$$

Sia $\varphi : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ la funzione

$$\varphi(x) = \frac{1}{j} \qquad \text{se } j - 1 \leq x < j.$$

Dalla (15.3), $\sum_{j=k}^{n} 1/j = \int_{k-1}^{n} \varphi(x)\, dx$. D'altra parte

$$\frac{1}{x+1} \leq \varphi(x) \leq \frac{1}{x} \qquad \forall x > 0,$$

n	H_n	$H_n/\log n - 1$	$H_n - \log n$
10	2.92896825396825	2.7e-01	0.626383160974208
30	3.99498713092039	1.7e-01	0.593789749258235
100	5.18737751763962	1.3e-01	0.582207331651529
300	6.2826638802995	1.0e-01	0.578881405643301
1000	7.48547086055034	8.4e-02	0.577715581568206
3000	8.58374988995917	7.2e-02	0.577382322308925
10000	9.78760603604434	6.3e-02	0.577265664068161
30000	10.8861849921199	5.6e-02	0.577232331475626
100000	12.0901461298633	5.0e-02	0.577220664893053

Figura 15.2. $H_n = \sum_{j=1}^n 1/j$, $H_n/\log n - 1$ e $H_n - \log n$.

e dunque
$$\int_0^n \frac{1}{1+x}\,dx \le H_n = 1 + \sum_{j=2}^n \frac{1}{j} \le 1 + \int_1^n \frac{1}{x}\,dx.$$
Abbiamo provato

15.9 Proposizione. *Le somme parziali $\{H_n\}$ della serie armonica soddisfano le stime*
$$\log(1+n) \le H_n \le 1 + \log n. \tag{15.5}$$
H_n è dunque asintotica a $\log n$, $H_n/\log n \to 1$. In particolare la serie armonica diverge a $+\infty$, anche se le sue somme parziali aumentano in modo esasperatamente lento, cfr. Figura 15.2.

15.10 Costante di Eulero-Mascheroni. Posto ora $\gamma_n := H_n - \log n$, dalla (15.5) segue che $0 < \gamma_n < 1$. Inoltre
$$\gamma_n = 1 + \int_1^n \Big(\varphi(x) - \frac{1}{x}\Big)\,dx.$$
Essendo appunto $\varphi(x) \le 1/x$ $\forall x$, γ_n è decrescente. D'altra parte essendo $1/x$ convessa, per $x \in [j-1, j]$ si ha
$$\frac{1}{x} \le \Big(\frac{1}{j} - \frac{1}{j-1}\Big)\Big(x - \frac{1}{j}\Big) + \frac{1}{j}$$
e dunque
$$\frac{1}{x} - \varphi(x) \le \Big(\frac{1}{j} - \frac{1}{j-1}\Big)\Big(x - \frac{1}{j}\Big).$$
Integrando
$$\gamma_n = 1 + \int_1^n \Big(\varphi(x) - \frac{1}{x}\Big)\,dx \ge 1 - \frac{1}{2}\sum_{j=2}^n \Big(\frac{1}{j-1} - \frac{1}{j}\Big) = 1 - \frac{1}{2}\Big(1 - \frac{1}{n}\Big) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}.$$
In conclusione

Proposizione. *Le somme parziali H_n della serie armonica sono una successione asintotica a $\log n$. Inoltre $H_n - \log n$ è decrescente e ha un limite γ in $[1/2, 1[$. γ si chiama la* costante di Eulero-Mascheroni. *Con la notazione di Landau,*
$$H_n = \log n + \gamma + o(1) \qquad \textit{per } n \to \infty.$$

Una valore approssimato di γ è 0.57721566.... Si ha anche

$$\frac{H_n}{\log n} = 1 + \frac{\gamma}{\log n} + o\Big(\frac{1}{\log n}\Big)$$

È così spiegata la lentezza nella convergenza $H_n/\log n \to 1$ che si riscontra nella Figura 15.2.

15.e I numeri con la virgola

Per ogni $x \geq 0$ si costruisce la sua *rappresentazione decimale* $x = q_0, q_1 q_2 q_3 \dots$ calcolando iterativamente

$$x_0 := x, \quad q_0 := [x_0], \qquad \begin{cases} x_{j+1} := x_j - \frac{q_j}{10^j} \\ q_{j+1} := [10^{j+1} x_{j+1}] \end{cases} \quad \forall j \geq 0.$$

Ricordiamo che $[x]$ indica il più grande intero minore o uguale a x. Per induzione si prova che per ogni $j > 0$ $q_j \in \{0, \dots, 9\}$ e $0 \leq x_j < 10^{-j+1}$. Infatti è chiaro che da $x_1 = x_0 - [x_0] < 1$ e da $0 \leq x_j < 10^{-j+1}$ segue dall'iterazione che $q_{j+1} \in \{0, 1, \dots, 9\}$ e che

$$0 \leq x_{j+1} = \frac{10^j x_j - [10^j x_j]}{10^j} < \frac{1}{10^j}.$$

In particolare $x_j \to 0$ per $j \to \infty$. Inoltre

$$q_0 + \sum_{j=1}^{N} \frac{q_j}{10^j} = q_0 + \sum_{j=1}^{N} (x_j - x_{j+1}) = q_0 + x_1 - x_{N+1} = x - x_{N+1}$$

e dunque per $N \to \infty$

$$x = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{q_j}{10^j} = q_0 + \frac{q_1}{10} + \frac{q_2}{100} + \frac{q_3}{1000} + \dots$$

o, come si usa scrivere, $x = q_0, q_1 q_2 q_3 \dots$.

Viceversa ogni *allineamento decimale* i.e. ogni serie del tipo $\sum_{j=0}^{\infty} q_i/10^i$, $q_i \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$, $\forall i \geq 1$ è convergente a un numero non negativo. Evidentemente la serie ha limite perché è a termini positivi, e converge perché

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{q_j}{10^j} \leq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{9}{10^j} = \frac{9}{10} \, \frac{1}{1 - 1/10} = 1.$$

L'algoritmo per la costruzione dell'allineamento decimale può non terminare o terminare dopo N passi, i.e. $x_j = q_j = 0$ $\forall j > N$. Quest'ultima eventualità accade se e solo se $x = \frac{k}{10^N}$, $k \in \{0, \dots, 10^N - 1\}$. In particolare esistono numeri razionali con allineamento decimale infinito: ad esempio $1/3 = 0,333333\dots$. Inoltre si ha

15.11 Proposizione. *Due allineamenti decimali differenti $q_0, q_1 q_2 \dots$ e $h_0, h_1 h_2 \dots$ hanno sempre somme differenti eccetto il caso in cui esiste un intero N tale che*

$$q_N = 1 + h_N \quad \text{e} \quad q_i = 0,\ h_i = 9\ \forall i > N,$$

o viceversa, i.e. $h_N = q_N + 1$ e $q_i = 9$, $h_i = 0$ $\forall i > N$.

Dimostrazione. Supponiamo che $q_0 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{q_j}{10^j} = h_0 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{h_j}{10^j}$ i.e.

$$q_0 - h_0 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{q_j - h_j}{10^j} = 0.$$

Se non è $q_j = h_j$ $\forall j$, sia N il primo indice per cui $q_N \neq h_N$. Dovrà allora essere

$$\frac{q_N - h_N}{10^N} = - \sum_{j=N+1}^{\infty} \frac{q_j - h_j}{10^j} =: -R_N$$

e poiché $|R_N| \leq 10^{-N}$ necessariamente $|q_N - h_N| = 1$. Se ad esempio $q_N = 1 + h_N$ allora

$$-R_N = - \sum_{j=N+1}^{\infty} \frac{q_j - h_j}{10^j} = 1,$$

e $q_j - h_j = -9$ $\forall j > N$, i.e. $q_j = 0$ e $h_j = 9$ $\forall j \geq 1$. □

15.12 Esempio. $0.234765799999\dots$ e 0.2347658 sono lo stesso numero razionale.

15.f Altri esempi

15.13 Esempio (Serie telescopiche). Dall'Esempio 15.4

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j(j+1)} = 1 - \frac{1}{n+1},$$

e quindi mandando n all'infinito

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j(j+1)} = 1.$$

Più in generale se a_n è una successione, si ha

$$\sum_{j=0}^{n} (a_j - a_{j+1}) = a_0 - a_{n+1},$$

e quindi la serie $\sum_{j=0}^{\infty} (a_j - a_{j+1})$ converge, diverge o è indeterminata rispettivamente se la successione a_n converge, diverge o non ha limite. Nei primi due casi

$$\sum_{j=0}^{\infty} (a_j - a_{j+1}) = a_0 - \lim_{n\to\infty} a_n.$$

15.14 Serie armonica generalizzata $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$, $\alpha \neq 1$. Ripetendo la procedura seguita per la serie armonica si prova facilmente che

15.15 Proposizione. *Le somme parziali*

$$S_n := \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j^\alpha}, \qquad \alpha \neq 1,$$

soddisfano le stime

$$\frac{1}{\alpha-1}\Big(1-\frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}}\Big) \le S_n \le 1+\frac{1}{\alpha-1}\Big(1-\frac{1}{n^{\alpha-1}}\Big) \tag{15.6}$$

In particolare la serie armonica generalizzata

- ∘ *diverge a* $+\infty$ *se* $\alpha < 1$,
- ∘ *converge se* $\alpha > 1$ *e in questo caso*

$$\frac{1}{\alpha-1} \le \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^\alpha} \le 1+\frac{1}{\alpha-1}.$$

15.16 Esempio. Studiare la serie $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2}$, cioè la serie armonica generalizzata con $\alpha = 2$. La serie converge e anzi

$$1 \le \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2} \le 2.$$

In alternativa possiamo osservare che per ogni $j \ge 2$

$$\frac{1}{j^2} \le \frac{1}{j(j-1)}$$

e quindi

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2} = 1+\sum_{j=2}^{\infty} \frac{1}{j^2} \le 1+\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j(j+1)} = 2.$$

Si potrebbe anche provare che $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

15.0.1 Serie a termini non negativi

C'è una sostanziale semplificazione del problema della convergenza delle serie se consideriamo serie a termini non negativi. Infatti *le somme parziali di una serie a termini non negativi costituiscono una successione crescente e dunque dotata di limite, finito o infinito*. In altre parole la somma di una serie a termini non negativi esiste sempre ed è possibile passare al limite nelle eventuali disequazioni o equazioni ottenute sulle somme parziali.

C'e' pero' anche l'esigenza di confrontare direttamente le somme di due serie a partire dalle successioni che vengono sommate. A questo proposito sono utili i seguenti criteri, validi per *serie a termini non negativi*. Per rendersi conto della importanza della condizione di segno, si consideri il seguente esempio.

Siano date due serie $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ e $\sum_{j=0}^{\infty} b_j$ e si sappia che per ogni $j \ge p$ si ha che $a_j \le b_j$. Sommando da p a n queste diseguaglianze si ottiene

$$\sum_{j=p}^{n} a_j \leq \sum_{j=p}^{n} b_j \quad \forall n \geq p, \tag{15.7}$$

e tuttavia non si può passare al limite per $n \to \infty$ se non si conosce per altra via l'*esistenza dei due limiti* $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ *e* $\sum_{j=1}^{\infty} b_j$. Per le serie a termini non negativi (o definitivamente non negativi, o più in generale definitivamente di segno costante), le rispettive successioni delle somme parziali sono definitivamente monotone e l'esistenza delle somme è garantita. Segue

15.17 Proposizione (Criterio del confronto). *Siano* $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ *e* $\sum_{j=0}^{\infty} b_j$ *due serie a termini non negativi. Se*

$$a_j \leq b_j \qquad \forall j \geq p,$$

allora

$$\sum_{j=p}^{\infty} a_j \leq \sum_{j=p}^{\infty} b_j. \tag{15.8}$$

Percio'

(i) *se la serie* $\sum_{j=0}^{\infty} b_j$ *converge, allora la serie* $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ *converge,*
(ii) *Se la serie* $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ *diverge, allora la serie* $\sum_{j=0}^{\infty} b_j$ *diverge.*

15.18 Esempio. Poiché

$$\frac{1}{j^2} \leq \frac{2}{j(j+1)}, \quad \forall j \geq 1,$$

si ricava che $\sum_{j=1}^{n} 1/j^2 \leq 2\sum_{j=1}^{n} 1/(j(j+1))$. Passando al limite per $n \to \infty$ (le serie sono a termini positivi) si trova che

$$1 \leq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2} < 2\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j(j+1)} = 2.$$

In realtà, con gli strumenti giusti si ottiene che $\sum_{j=1}^{\infty} 1/j^2 = \pi^2/6$.

Nel caso si fosse interessati a decidere se una data serie converge o diverge, senza pretendere di ottenere stime sulla somma, si può utilizzare il seguente

15.19 Proposizione (Criterio del confronto asintotico). *Siano* $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ *e* $\sum_{j=0}^{\infty} b_j$ *due serie a termini* positivi. *Supponiamo che*

$$\frac{a_n}{b_n} \to L \in \mathbb{R}.$$

Se la serie $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ *diverge, allora diverge anche la serie* $\sum_{j=0}^{\infty} b_j$. *Se la serie* $\sum_{j=0}^{\infty} b_j$ *converge, allora anche la serie* $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ *converge.*

Dimostrazione. Infatti la successione a_n/b_n è limitata; perciò per un qualche $M > 0$

$$0 \leq a_n \leq M\, b_n \qquad \forall n$$

e dal criterio del confronto in Proposizione 15.17, $\sum_{j=0}^{\infty} a_j \leq M \sum_{j=0}^{\infty} b_j$. $\square$

Alcuni confronti vengono fatti più spesso di altri. È d'uso incapsularli in regole dette criteri di convergenza. Qui esponiamo due criteri di convergenza basati sul confronto con la serie geometrica.

15.20 Teorema (Criterio della radice). *Sia* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *una serie a termini non negativi.*

(i) *Se esistono* $K < 1$ *e* $p \in \mathbb{N}$ *tale che per ogni* $n \geq p$

$$\sqrt[n]{a_n} \leq K < 1,$$

allora la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge e*

$$\sum_{n=p}^{\infty} a_n \leq \frac{K^p}{1-K}.$$

(ii) *Se esiste* $K > 1$ *e* $p \in \mathbb{N}$ *tale che per ogni* $n \geq p$

$$\sqrt[n]{a_n} \geq K > 1,$$

allora la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *diverge.*

Dimostrazione. (i) Per ogni $j \geq p$ si ha $0 \leq a_j \leq K^j$ e sommando da p a n

$$\sum_{j=p}^{n} a_j \leq \sum_{j=p}^{n} K^j = \sum_{j=0}^{n-p} K^{p+j} \leq \frac{K^p}{1-K}.$$

Passando al limite per $n \to \infty$ si ottiene la stima e la convergenza della serie. La dimostrazione di (ii) è del tutto analoga e viene lasciata al lettore. □

15.21 Proposizione (Criterio del rapporto). *Sia* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *una serie a termini positivi. Se esistono* $K < 1$ *e* $p \in \mathbb{N}$ *tale che per ogni* $n \geq p$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq K < 1,$$

allora la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge e*

$$\sum_{n=p}^{\infty} a_n \leq \frac{a_p}{1-K}.$$

Dimostrazione. Dalle ipotesi si ricava successivamente per induzione

$$\begin{aligned}
&a_{p+1} \leq K a_p \\
&a_{p+2} \leq K a_{p+1} \leq K^2 a_p \\
&\quad \ldots \\
&a_{p+j} \leq K^j a_p, \forall j \geq 0,
\end{aligned}$$

e, sommando da p a n,

$$\sum_{j=p}^{n} a_j \leq a_p \sum_{j=0}^{n-p} K^j \leq a_p \frac{1}{1-K}.$$

Passando al limite per $n \to \infty$ (la serie è a termini positivi) si ottiene la stima e la convergenza della serie. □

I criteri del rapporto e della radice sono inefficaci se, ad esempio, $\sqrt[n]{a_n} \to 1$ o $a_{n+1}/a_n \to 1$, come mostra la serie armonica generalizzata $\sum 1/n^\alpha$. Osserviamo ancora che dall'Esercizio **??** segue che se $a_{n+1}/a_n \to 1$, allora $\sqrt[n]{a_n} \to 1$; i.e., se il criterio del rapporto è inefficace, è inefficace a fortiori il criterio della radice.

15.0.2 Serie a termini di segno variabile

Nel caso di una serie $\sum_{j=0}^\infty a_j$ a termini di segno variabile, conviene, ripetendo quanto fatto per gli integrali generalizzati, definire

$$a_j^+ := \max(a_j, 0) = \begin{cases} a_j & \text{se } a_j > 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad a_j^- := \max(-a_j, 0) = \begin{cases} -a_j & \text{se } a_j < 0 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Ovviamente

$$a_j = a_j^+ - a_j^-, \qquad \forall j \geq 0$$

e, sommando da 0 a p, si ottiene $\sum_{j=0}^n a_j = \sum_{j=0}^n a_j^+ - \sum_{j=0}^n a_j^-$. Se le due serie a termini positivi a destra non sono entrambe divergenti, I teoremi sui limiti permettono di concludere

15.22 Proposizione. *Si ha*

- $\sum_{j=o}^\infty a_j$ *converge se* $\sum_{j=0}^\infty a_j^+$ *e* $\sum_{j=0}^\infty a_j^-$ *sono entrambe convergenti,*
- $\sum_{j=o}^\infty a_j$ *diverge a* $+\infty$ *se* $\sum_{j=0}^\infty a_j^+$ *diverge e* $\sum_{j=0}^\infty a_j^-$ *converge,*
- $\sum_{j=o}^\infty a_j$ *diverge a* $-\infty$ *se* $\sum_{j=0}^\infty a_j^+$ *converge e* $\sum_{j=0}^\infty a_j^-$ *diverge.*

Lo studio della convergenza è così ricondotto allo studio di serie a termini non negativi, tranne che nel caso in cui entrambe le serie $\sum_{j=0}^\infty a_j^+$ e $\sum_{j=0}^\infty a_j^-$ sono divergenti.

Poiche'

$$|a_j| = a_j^+ + a_j^-,\ 0 \leq a_j^+,\, a_j^- \leq |a_j| \qquad \forall j \geq 0,$$

dal criterio del confronto e dalla Proposizione 15.22 segue

15.23 Proposizione. *Sia data la serie* $\sum_{j=0}^\infty a_j$. *Se la serie* $\sum_{j=0}^\infty |a_j|$ *converge, allora anche la serie* $\sum_{j=0}^\infty a_j$ *converge e*

$$\Big|\sum_{j=0}^\infty a_j\Big| \leq \sum_{j=0}^\infty |a_j|. \tag{15.9}$$

Dimostrazione. Per ogni $j \geq 0$, a_j^+ e a_j^- sono non negativi e $a_j^+ + a_j^- = |a_j|$, perciò

$$0 \leq a_j^+,\ a_j^- \leq |a_j|, \quad \forall j \geq 0.$$

Per il criterio del confronto per serie a termini positivi, le serie $\sum_{j=0}^\infty a_j^+$ e $\sum_{j=0}^\infty a_j^-$ convergono e, per quanto già detto, la serie data $\sum_{j=0}^\infty a_j$ converge. D'altra parte dalla *diseguaglianza triangolare* $|x+y| \leq |x| + |y|$ segue che

$$\Big|\sum_{j=0}^n a_j\Big| \leq \sum_{j=0}^n |a_j| \leq \sum_{j=0}^\infty |a_j|, \quad \forall n \geq 0,$$

e passando al limite per $n \to \infty$ (abbiamo appena provato che la serie $\sum_{j=0}^\infty a_j$ è convergente), si trova la stima (15.9). □

15.24 Definizione. *La serie* $\sum_{j=0}^\infty a_j$ *si dice* assolutamente convergente se la serie $\sum_{j=0}^\infty |a_j|$ converge.

Consideriamo infine un tipo di serie a termini di segno variabile che si incontra spesso.

15.25 Definizione. *Una serie si dice di* segno alterno *se si scrive come* $\sum_{j=0}^\infty (-1)^j a_j$, *con* $a_j \geq 0$, *i.e.*

$$\sum_{j=0}^\infty (-1)^j a_j = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \dots$$

con $a_0,\ a_1,\ a_2,\ \dots$ *tutti non negativi.*

Un classico risultato sulle serie a termini di segno alterno è il seguente

15.26 Teorema (Leibniz). *Sia* $\sum_{j=0}^\infty (-1)^j a_j$, $a_j \geq 0$, *una serie a termini di segno alterno. Se*

(i) $a_n \to 0$,
(ii) a_n *è decrescente*, $a_{n+1} \leq a_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$,

Allora $\sum_{j=0}^\infty (-1)^j a_j$ *è convergente e per l'errore tra la somma e la somma parziale* $(p-1)$*-esima*

$$\Big|\sum_{j=0}^\infty (-1)^j a_j - \sum_{j=0}^{p-1} (-1)^j a_j\Big|$$

si ha la stima $\left|\sum_{j=p}^\infty (-1)^j a_j\right| \leq a_p$.

Dimostrazione. Siano $p < q \in \mathbb{N}$. È facile convincersi, facendo il conto distinguendo i casi p pari e p dispari, che dalla ipotesi di decrescenza si ha

$$\Big|\sum_{j=p}^q (-1)^j a_j\Big| \leq a_p + a_q. \tag{15.10}$$

Se ora $\epsilon > 0$, esiste per ipotesi $\overline{n}$ tale che per $p \geq \overline{n}$ si ha $|a_p| < \epsilon$ e dunque dalla (15.10) per $q > p \geq \overline{n}$

$$\Big|\sum_{j=p}^{q}(-1)^j a_j\Big| < 2\,\epsilon.$$

Per l'arbitrarietà di ϵ la successione delle somme parziali $\Big\{\sum_{j=0}^{n}(-1)^j a_j\Big\}$ è di Cauchy e dunque convergente, cfr. Parte I. Mandando poi q all'infinito nella (15.10) si ottiene la stima voluta. □

15.27 Esempio. Sia a_n una successione. Si dice che la successione $\{a_n\}$ ha *variazione totale limitata* se

$$\sum_{k=0}^{\infty}|a_{k+1}-a_k| < +\infty.$$

Provare che se $\{a_n\}$ è una successione a termini non negativi e a variazione totale limitata, allora la serie $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k a_k$ converge e

$$\Big|\sum_{k=p}^{\infty}(-1)^k a_k\Big| \le \sum_{k=p}^{\infty}|a_{k+1}-a_k|.$$

15.28 Osservazione. Il lettore presti attenzione al fatto che esistono successioni $a_n \ge 0$ con $a_n \to 0$ per cui la serie a termini di segno alterno $\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j a_j$ non converge. In altre parole non si può eliminare dalle ipotesi del Teorema 15.26 quella di *decrescenza* della successione $\{a_n\}$. Si consideri ad esempio la serie di termini

$$(-1)^n a_n := (-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}.$$

Evidentemente $a_n \ge 0$, $a_n \to 0$ e per ogni $n \ge 1$

$$\sum_{j=1}^{n}(-1)^j a_j = \sum_{j=1}^{n}\frac{(-1)^j}{\sqrt{j}} + \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j}.$$

Ora la serie $\sum_{j=1}^{\infty}(-1)^j/\sqrt{j}$ è convergente per il criterio di Leibniz, Teorema 15.26, e la serie $\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j}$ è divergente. Pertanto $\sum_{j=1}^{\infty}(-1)^j a_j = +\infty$.

15.29 Osservazione. L'Esempio **??** mostra anche che per serie a termini di segno variabile non sussiste in generale un "criterio del confronto asintotico". Evidentemente

$$\frac{\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n}}{\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} = 1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \ \to\ 1,$$

eppure la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n/\sqrt{n}$ converge e la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ diverge.

15.a Qualche esempio

15.30 Esempio. Discutere la convergenza della serie $\sum_{n=1}^{\infty}\log(\cos(1/n^2)))$.

Posto $a_n := \log(\cos(1/n^2))$, si vede che $a_n \le 0$ per ogni $n \ge 1$. La serie dunque è a termini negativi. Poiche' si verifica (ad esempio con la formula di de l'Hôpital) che

$$\frac{\log(\cos x)}{x^2} \longrightarrow -\frac{1}{2},$$

si conclude che

$$\frac{a_n}{-\frac{1}{2n^2}} \longrightarrow 1.$$

Il criterio del confronto asintotico, Proposizione 15.19, e al convergenza della serie armonica generalizzata $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ implicano che la serie data è convergente. Volendo una stima si puo' essere piu' precisi.

Ricordiamo le stime

$$1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos x \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} \leq 1 - \frac{11}{24}x^2, \qquad \forall x \in [0,1].$$

In particolare $\cos x \geq 1/2$ per $x \in [0,1]$. Essendo la funzione $\log t$, $t > 0$, concava, si ha

$$2\log 2(t-1) \leq \log t \leq (t-1) \qquad \forall t \in [1/2, 1]$$

e quindi

$$-\log 2\, x^2 \leq 2\log 2(\cos x - 1) \leq \log(\cos x) \leq \cos x - 1 \leq -\frac{11}{24}x^2$$

per ogni $x \in [0,1]$. Percio' per ogni intero $n \geq 1$

$$\frac{11}{24}\frac{1}{n^2} \leq -a_n \leq \log 2 \frac{1}{n^2}$$

da cui segue, essendo $5/4 < \sum_{i=\infty}^{1} /n^2 < 2$, che

$$\frac{1}{2} \leq -\sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq 2\log 2.$$

15.31 Esempio. Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{1/n} \frac{e^{-x}}{1+x^2}\, dx.$$

La serie è a termini positivi. Posto $F(y) := \int_0^y \frac{e^{-x}}{1+x^2}\, dx$, segue dal teorema di de l'Hôpital e dal teorema fondamentale del calcolo che

$$\frac{F(y)}{y} \to 1 \qquad \text{per } y \to 0^+.$$

Percio', posto $a_n := \int_0^{1/n} \frac{e^{-x}}{1+x^2}\, dx$, si ha $a_n/1/n \to 1$. Poiché la serie armonica è divergente , il criterio di confronto asintotico permette di concludere che la serie data è divergente.

15.32 Esempio. Discutere la convergenza della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{n} \int_n^{n+1} e^{-x} \sin x\, dx.$$

La serie è a termini di segno indeterminato. Vediamo la convergenza assoluta. Procuriamoci prima una stima sui termini da sommare. Sia

$$a_n := \sqrt{n} \int_n^{n+1} e^{-x} \sin x\, dx.$$

Dalle proprietà dell'integrale, si ricava che

$$|a_n| \leq \sqrt{n} \int_n^{n+1} e^{-x} |\sin x|\, dx \leq \sqrt{n}\, e^{-n}(n+1-n) = \sqrt{n}\, e^{-n}.$$

Ora la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{n} e^{-n}$ converge, ad esempio utilizzando il criterio della radice, e quindi per confornto la serie data converge assolutamente.

In alternativa, si puo' provare ad esempio che $\sqrt{n}e^{-n} \leq e^{-n/2}$ per ogni $n \geq 1$, i.e., che $\sqrt{n}e^{-n/2} \leq 1$ $\forall n \geq 1$. Lo si vede provando ad esempio mostrando che la funzione $f(x) := xe^{-x^2/2}$ decresce per $x \geq 1$ e $f(1) = 1/\sqrt{e}$. Segue allora che

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{n}e^{-n} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\frac{1}{\sqrt{e}}\Big)^n = \frac{1}{\sqrt{e}-1}.$$

Esercizi

15.33 ¶. Calcolare le somme parziali delle seguenti serie telescopiche

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\sqrt{j+1}-\sqrt{j}}{\sqrt{j^2+j}}, \quad \sum_{j=1}^{\infty} \frac{j+1/2}{j^2(j+1)^2}, \quad \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j(j+1)(j+2)}, \quad \sum_{j=2}^{\infty} \frac{1}{j^2-1}.$$

15.34 ¶. n rette si dicono essere in posizione generica se a due a due si incontrano in uno e un solo punto. Calcolare in numero di regioni piane individuate da n rette in posizione generica.

15.35 ¶. Come conseguenza della formula del binomio di Newton si provi che $\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} = 2^n$.

15.36 ¶. Facciamo cadere una pallina da ping-pong da un'altezza h sopra un tavolo di legno duro. La pallina rimbalzerà infinite volte prima di fermarsi perdendo quota ad ogni rimbalzo. Supponiamo che ad ogni rimbalzo la pallina arrivi al 75% della quota raggiunta al rimbalzo precedente. Si calcoli il tempo che la pallina da ping-pong impiega a fermarsi.

15.37 ¶ Curva di von Koch. Partendo da un triangolo equilatero di lato uno, si incolli al centro di ogni lato un triangolo equilatero di lato 1/3 in modo da ottenere una stella. Al centro di ogni lato della stella si incolli un triangolo equilatero di lato 1/9. Iterando il procedimento si genera per induzione una curva chiusa detta curva di von Koch.

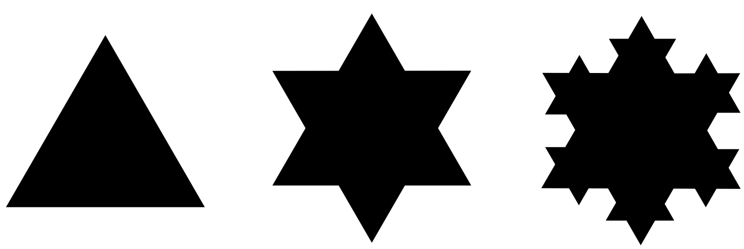

Figura 15.3. La costruzione della curva di von Koch.

Provare che la figura risultante ha area finita e che la curva di von Koch ha lunghezza infinita.

15.38 ¶ Insieme di Cantor. Un quadrato di lato unitario viene diviso in 9 quadrati di lato 1/3 e quello centrale viene colorato di nero. I rimanenti 8 quadrati di lato 1/3 vengono divisi allo stesso modo (in quadrati di lato 1/9) e quelli centrali vengono similmente colorati in nero. Si itera il procedimento per induzione e si chiede di calcolare l'area della parte colorata di nero. La parte non colorata del quadrato è noto come l'*insieme di Cantor* che incontreremo spesso nel seguito.

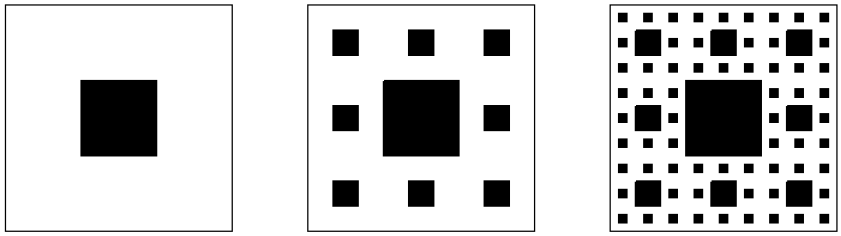

Figura 15.4. La costruzione dell'insieme di Cantor in dimensione 2.

15.39 ¶. Provare che $\sum_{j=0}^{n} q^j$ è dell'ordine di

$$\begin{cases} \frac{q^{n+1}}{q-1} & \text{se } q > 1 \\ n & \text{se } q = 1 \\ \frac{1}{1-q} & \text{se } 0 \le q < 1. \end{cases}$$

15.40 ¶. Provare che $\sum_{j=0}^{n} jq^j$ è dell'ordine di

$$\begin{cases} \frac{nq^{n+2}}{(q-1)^2} & \text{se } q > 1 \\ \frac{n^2}{2} & \text{se } q = 1 \\ \frac{1}{1-q} & \text{se } 0 \le q < 1. \end{cases}$$

15.41 ¶. Stimare l'errore che si commette sostituendo la somma della serie $\sum_{j=1}^{\infty} 1/j^2$ con una sua somma parziale.

15.42 ¶. Un bruco lento ma tenace cammina alla velocità di $10cm$ al minuto su una striscia di gomma che uno spiritello maligno allunga ogni minuto di 1 metro. Riuscirà il bruco ad arrivare alla fine della striscia?

15.43 ¶. Si faccia una pila di n monete uguali di diametro 1. Si disponga la pila in modo che le monete siano in equilibrio e formino una grondaia la più ampia possibile, cfr. la Figura 15.5. A che distanza si trovano i centri della prima e dell'ultima moneta?

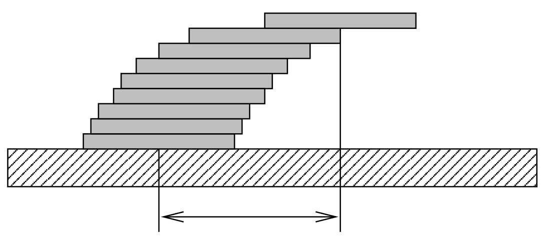

Figura 15.5. Il problema della pila di monete.

15.44 ¶. Al variare di eventuali parametri x reale studiare la convergenza di alcune delle serie di termine generale

$$ne^{-n}, \qquad n^{-n},$$

$$\frac{n!}{(2n)!}, \qquad \frac{n^2\log(1+n^2)}{\sqrt{n!}},$$

$$\frac{(2n)!}{(3n)!-(2n)!}, \qquad \frac{2^n n!}{(2n)!},$$

$$\frac{\cos\pi n}{n\log(1+n)}, \qquad \frac{\sin n!}{n(n+1)},$$

$$\arctan 2^{-n}, \qquad \frac{(-1)^k k}{(k+1)(k+2)},$$

$$\log^2(1+1/n), \qquad \log(1+1/n),$$

$$\frac{n}{n\arctan n+1}, \qquad (-1)^n\sin(1/n),$$

$$n^{n\pi\sin(1/n)-2\pi}, \qquad \Big(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\big)^{\sqrt{n^3}},$$

$$\frac{(-1)^n}{n-\log n}, \qquad (\log n)^{-\log n},$$

$$\Big(\frac{\pi}{2}-\arctan n\Big), \qquad \log\Big(1+\frac{(-1)^n}{n}\Big),$$

$$\log\Big(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\Big), \qquad \sin\Big(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\Big),$$

$$(1+x)^{n(1+1/n)},\ x\in]-1,0[, \qquad (-2)^n e^{-nx},$$

$$\frac{n!}{n^n}x^n, \qquad \Big(1-\sin(1/n)\Big)^{1/n},$$

$$(-1)^n\log\Big(1+\frac{(-1)^n}{n}\Big), \qquad \log^2\frac{n}{n+1},$$

$$\Big(1+\frac{1}{n^2}\Big)^{n^2}-e, \qquad \frac{\sqrt[n]{n}-1}{\log n},$$

$$\frac{\pi}{4}-\arctan\cos\frac{1}{n}, \qquad \int_{n^2}^{n^3}\sin^2\frac{1}{x}\,dx,$$

$$\int_0^{1/n}\Big(1-\frac{\sin x}{x}\Big)\,dx, \qquad \int_0^{\pi/2}(\sin x)^n\,dx,$$

$$(-1)^n\int_n^{n+1}t^2e^{-t^2}\,dt, \qquad n\int_n^{n+1}e^{-x}\sin x\,dx,$$

$$\sqrt{n}\int_n^{n+1}\frac{\sin x}{x^2}\,dx.$$