12. Formula di Taylor

Molte questioni, sia teoriche che pratiche, richiedono il calcolo e lo studio di funzioni $f(x)$ nell'intorno di un punto x_0 o dell'infinito, come ad esempio quando ci si chiede quanto è grande

$$\int_x^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$$

per x grande. Questo studio può essere semplificato per mezzo degli *sviluppi asintotici*. Un primo esempio che studieremo nella sezione 1 è quello della *formula di Taylor*.

La Formula di Taylor

12.a Calcolo approssimato di π

Ricordiamo la ben nota uguaglianza

$$1 - x^{n+1} = (1-x)(1 + x + x^2 + \cdots + x^n)$$

vera per ogni $x \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$, da cui

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \frac{x^{n+1}}{1-x}.$$

per ogni $x \neq 1$. Sostituendo x con $-x^2$ si ottiene

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{2k} + \frac{(-x^2)^{n+1}}{1+x^2}$$

e integrando termine a termine tra 0 e x,

$$\arctan x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + \int_0^x \frac{(-t^2)^{n+1}}{1+t^2}\,dt, \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

In particolare, se si sceglie $x = 1/\sqrt{3}$, troviamo

n	S_n	$1 - S_n/\pi$
1	3.46410161513775	-1.0e-01
3	3.15618147156995	-4.6e-03
5	3.14260474566308	-3.2e-04
8	3.14156871594178	+7.6e-06
10	3.14159051093808	+6.8e-07
15	3.14159265952171	-1.9e-09
20	3.1415926535714	+5.9e-12
25	3.14159265358985	-1.9e-14
30	3.14159265358979	-2.2e-16
π	3.14159265358979	

Figura 12.1. I valori S_n in (12.1) approssimano π per vari n.

$$\frac{\pi}{6} = \arctan\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{(2k+1)3^k} + \int_0^{1/\sqrt{3}}\frac{(-t^2)^{n+1}}{1+t^2}\,dt.$$

Quindi, osservando che

$$\left|\int_0^{1/\sqrt{3}}\frac{(-t^2)^{n+1}}{1+t^2}\,dt\right| \le \int_0^{1/\sqrt{3}} t^{2n+2}\,dt = \frac{1}{\sqrt{3}\,3^{n+1}\,(2n+3)},$$

concludiamo che

$$S_n := \frac{6}{\sqrt{3}}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{(2k+1)\,3^k} \tag{12.1}$$

è un valore approssimato per π con un errore $R_n := \pi - S_n$ stimato da

$$|R_n| \le \frac{6}{\sqrt{3}\,3^{n+1}(2n+3)};$$

finora n era libero. L'errore R_n puo' ora essere reso piccolo quanto si vuole se si sceglie n abbastanza grande, cfr. Figura 12.1.

12.b Formula di Taylor con resto integrale

La formula di Taylor ci fornisce formule simili per una larga classe di funzioni. Come vedremo, si tratta di una generalizzazione del teorema fondamentale del calcolo.

Se $f \in C^1(]a,b[)$ e $x_0 \in]a,b[$, si ha dal *teorema fondamentale del Calcolo*

$$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^{x} f'(t), dt.$$

Quando $f \in C^2(]a,b[)$ si può integrare per parti $\int_{x_0}^x f'(t)\,dt = -\int_{x_0}^x \frac{d}{dt}(x-t)f'(t)\,dt$, e ottenere