I. Serie Numeriche

I processi di *somma infinita* compaiono fin dall'antichità. Gia' Aristotele nella *Fisica* è cosciente del fatto che la *serie* geometrica

$$1 + q + q^2 + q^3 + \dots$$

ha somma finita se $|q| < 1$ e François Viète (1540-1603) calcola nel 1593

$$1 + q + q^2 + q^3 + \dots = \frac{1}{1-q}.$$

Nel medioevo Nicola d'Oresme (1323-1382) dimostra che la *serie armonica*

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$$

è divergente. Con la nascita del Calcolo ad opera di Isaac Newton (1642-1727) e Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) le serie infinite diventano parte integrante del calcolo differenziale e integrale.

1 Il processo di somma

Sia data una successione a_n, $n = 1, 2, 3..$ di numeri reali o complessi. La ricorsione

$$\begin{cases} s_1 = a_1, \\ s_{n+1} = s_n + a_{n+1}, \quad \forall n \geq 1 \end{cases} \tag{1.1}$$

definisce per induzione una *unica* successione s_n, $n \geq 1$,

$$s_n := a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{j=0}^{n} a_j$$

La successione s_n si chiama la *successione delle somme parziali di* a_n o anche serie della successione a_n. Si usa il simbolo

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_j$$

per indicare tutta la successione s_n, $n \geq 1$. Insomma la frase *si consideri la serie* $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$, è sinonimo di *si consideri la successione delle somme parziali* $\sum_{j=0}^{n} a_j$, $n \geq 0$ *della successione* a_n.

1.1 Esempio (Somma dei primi n naturali). Per ogni naturale n c'è una *formula chiusa*, i.e. una formula algebrica con un numero di operazioni da effettuare indipendente da n, per la somma dei primi n naturali. Si ha

$$S_1(n) := 1 + 2 + \dots + n = \sum_{j=1}^{n} j = \frac{n(n+1)}{2}. \tag{1.2}$$

Se ne possono dare varie dimostrazioni, vediamone alcune.

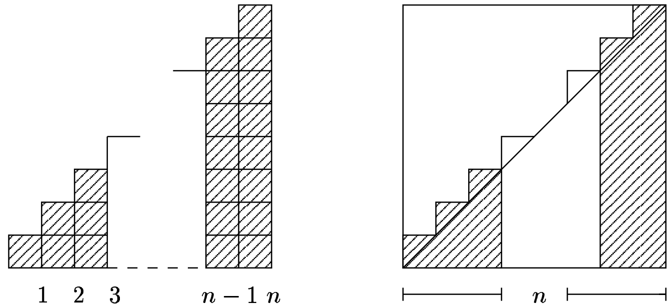

Figura 1.1. $\sum_{j=1}^{n} j = n(n+1)/2$.

(i) Si scrive

$$\begin{array}{rcrcrcccrcr} S_1(n) & = & 1 & + & 2 & + & \dots & + & (n-1) & + & n \\ S_1(n) & = & n & + & (n-1) & + & \dots & + & 2 & + & 1, \end{array}$$

e sommando le due eguaglianze si ottiene

$$2S_1(n) = (n+1) + (n+1) + \cdots + (n+1) = n(n+1).$$

(ii) Disponendo quadrati di lato 1 come in Figura 1.1, l'area totale dei quadrati tratteggiati è

$$S_1(n) = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}.$$

1.2 Esempio. Se si esegue la somma dei primi n numeri dispari, si trova usando la 1.1

$$\sum_{j=1}^{n} (2j-1) = 2\sum_{j=1}^{n} j - n = n(n+1) - n = n^2.$$

La Figura 1.2 dà una interpretazione geometrica del risultato.

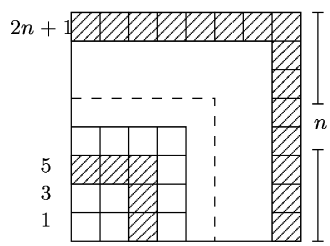

Figura 1.2. $\sum_{j=1}^{n} (2j-1) = n^2$.

1.3 Esempio (Somma dei quadrati dei primi n numeri interi). Si tratta di calcolare per n intero, la somma

$$S_2(n) = 1 + 4 + 9 + \cdots + n^2 =: \sum_{j=1}^{n} j^2.$$

Il metodo (iii) in 1.1 può essere esteso a questa nuova situazione. Utilizzando questa volta la formula dei cubi $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$, si ricavano le uguaglianze

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 1^3 & = & & + & & + & & + & 1 \\ 2^3 & = & 1^3 & + & 3\cdot 1^2 & + & 3\cdot 1 & + & 1 \\ 3^3 & = & 2^3 & + & 3\cdot 2^2 & + & 3\cdot 2 & + & 1 \\ \dots & & & & & & & & \\ n^3 & = & (n-1)^3 & + & 3\cdot(n-1)^2 & + & 3\cdot(n-1) & + & 1 \\ (n+1)^3 & = & n^3 & + & 3\cdot n^2 & + & 3\cdot n & + & 1 \end{array}$$

che sommate danno

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 + (n+1)^3 = 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 + 3S_2(n) + 3S_1(n) + (n+1),$$

vale a dire

$$3S_2(n) = (n+1)^3 - (n+1) - 3S_1(n).$$

In definitiva, tenendo conto dell'espressione di $S_1(n)$ nell'esempio in 1.1,

$$\sum_{j=1}^{n} j^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \quad \forall n \geq 1.$$

1.4 Esempio (Somma dei termini di una progressione geometrica). Sia

$$G_q(n) := \sum_{j=0}^{n} q^j.$$

la somma di una progressione geometrica di ragione q. Se $q = 1$, tutti i termini della successione q^n sono uguali ad uno e dunque $G_1(n) = n+1$. Quando q è diverso da 1 si trova ancora una formula chiusa per $G_q(n)$

$$G_q(n) := \sum_{j=0}^{n} q^j = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}, \quad \forall n \geq 0.$$

Lo si può provare ad esempio moltiplicando $G_q(n)$ per $1-q$. Si ha infatti

$$\begin{aligned}(1-q)G_q(n) &= (1-q)\sum_{j=0}^{n} q^j = \sum_{j=0}^{n} q^j - q\sum_{j=0}^{n} q^j \\ &= 1+q+q^2+\cdots+q^n - q - q^2 - q^3 - \cdots - q^{n+1} = 1-q^{n+1}.\end{aligned}$$

1.5 Esempio (Serie telescopiche). Siano a_n e b_n, $n \geq 1$ due successioni di numeri tali che per ogni intero $n \geq 1$ si abbia

$$a_n = b_n - b_{n-1}.$$

Evidentemente

$$\sum_{j=1}^{n} a_j = (b_n - b_{n-1}) + (b_{n-1} - b_{n-2}) + \cdots + (b_3 - b_2) + (b_2 - b_1) = b_n - b_1.$$

Un esempio è la serie $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j(j+1)}$ di Pietro Mengoli (1625-1686). Si ha infatti

$$\frac{1}{j(j+1)} = \frac{1}{j} - \frac{1}{j+1}, \quad \forall j \geq 1$$

e dunque

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j(j+1)} = 1 - \frac{1}{n+1} \qquad \forall n \geq 1.$$

Il trucco precedente permette di riscrivere una qualunque successione come un processo di somma, in particolare ogni termine della successione è la somma parziale di una serie. Se a_n, $n \geq 1$ è data, ponendo $a_0 = 0$, si ottiene

$$\sum_{j=1}^{n}(a_j - a_{j-1}) = a_n - a_0 = a_n, \quad \forall n \geq 1.$$

2 Serie

2.1 Serie convergenti, divergenti, indeterminate

Sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $a_n \in \mathbb{R}$, una serie numerica.

2.1 Definizione. *Si chiama* somma della serie *il limite, se esiste, delle somme parziali della successione* a_n. a_n *si dice* termine n-esimo *della serie.*

Si possono verificare 3 situazioni alternative.

(i) Il $\lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n} a_j$ non esiste. In questo caso si dice che *la serie è indeterminata*. Un esempio di tale situazione si ottiene se si parte con $a_n = (-1)^n$, $n \geq 0$. In questo caso $\sum_{j=0}^{n}(-1)^j$ vale 1 se n è pari e zero se n è dispari. In particolare il limite delle somme parziali $\sum_{j=0}^{n} a_j$ non esiste.

(ii) $\lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n} a_j = L \in \mathbb{R}$. In questo caso si dice che *la serie converge ad* L e si scrive che

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = L \qquad \text{come sinonimo di} \qquad \sum_{j=0}^{n} a_j \to L,\ n \to \infty.$$

(iii) $\lim_{n\to\infty}\sum_{j=0}^n a_j = +\infty$ (risp. $-\infty$). In questo caso si dice che *la serie diverge a* $+\infty$ *(risp.* $-\infty$*)* e si scrive che

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = +\infty \quad (\text{risp. } \sum_{n=0}^{\infty} a_n = -\infty).$$

2.2 ¶ $\sum_{j=1}^{\infty} j$, $\sum_{j=1}^{\infty} j^2$ sono serie divergenti a $+\infty$.

Serie

Una serie $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$

(i) *converge a* $L \in \mathbb{R}$ se $\lim_{n\to\infty}\sum_{j=0}^n a_j = L$,
(ii) *diverge a* $+\infty$ *(risp.* $-\infty$*)* se $\lim_{n\to\infty}\sum_{j=0}^n a_j = +\infty$ (risp. $-\infty$)
(iii) *è indeterminata* se non esiste $\lim_{n\to\infty}\sum_{j=0}^n a_j$.

PROPOSIZIONE. *Se* $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ *converge allora* $a_j \to 0$ *per* $j \to \infty$.

La somma di una serie è anche il valore di un integrale improprio. Data una successione $\{a_n\}$ di numeri reali, si associa ad $\{a_n\}$ la funzione costante a tratti $\varphi : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ data da

$$\varphi(x) = a_n \qquad \text{se } n \le x < n+1.$$

Per ogni $n \ge 0$ si ha

$$\sum_{j=0}^{n} a_j = \int_0^{n+1} \varphi(x)\,dx$$

e inoltre

PROPOSIZIONE. $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ *ha limite se e solo se esiste il limite* $\lim_{x\to\infty}\int_0^x \varphi(x)\,dx$. *In questo caso*

$$\sum_{j=0}^{\infty} a_j = \lim_{x\to\infty}\int_0^x \varphi(x)\,dx.$$

In particolare $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ *converge se e solo se* φ *è integrabile in senso improprio su* $(0,\infty)$.

In modo analogo alla somma infinita si definisce il prodotto infinito di una successione di numeri positivi $\{a_n\}$

$$\prod_{i=1}^{\infty} a_i := \lim_{n\to\infty}\prod_{i=1}^{n} a_i,$$

quando questo esiste. Ovviamente $\prod_{i=1}^{\infty} a_i$ esiste se e solo se la serie $\sum_{i=1}^{\infty}\log a_i$ ha limite e

$$\prod_{i=1}^{\infty} a_i = \exp\Big(\sum_{i=1}^{\infty}\log a_i\Big).$$

Serie e integrali impropri

Il concetto di somma di una serie può essere interpretato come un caso particolare di integrale improprio, cfr. Cap. 4 Vol. I. È un'osservazione assai utile.

Data una successione $\{a_n\}$ di numeri reali, si può associare alla successione una funzione costante a tratti $\varphi : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ i cui valori sono appunto i valori della successione ad esempio ponendo

$$\varphi(x) = a_n \qquad \text{se } n \le x < n+1.$$

Evidentemente φ è misurabile e per ogni $n \ge 0$ si ha

$$\sum_{j=0}^{n} a_j = \int_0^{n+1} \varphi(x)\,dx \tag{2.1}$$

Inoltre

2.3 Proposizione. *$\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ ha limite se e solo se esiste il limite $\lim_{x\to\infty}\int_0^x \varphi(x)\,dx$. In questo caso*
$$\sum_{j=0}^{\infty} a_j = \lim_{x\to\infty}\int_0^x \varphi(x)\,dx.$$
In particolare $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ è convergente se e solo se φ è integrabile in senso improprio su $(0,\infty)$.

La dimostrazione è una ovvia conseguenza della (2.1) e del lemma seguente in 2.4 sulle funzioni regolari a tratti.

2.4 Lemma. *Il limite $\lim_{x\to+\infty}\int_0^x \varphi(x)\,dx$ esiste se e solo se esiste il limite di successione $\lim_{n\to\infty}\int_0^n \varphi(x)\,dx$. In questo caso*
$$\lim_{x\to+\infty}\int_0^x \varphi(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\int_0^n \varphi(x)\,dx.$$

2.5 ¶ Provare il lemma in 2.4. [*Sugg.* Poniamo $\phi(x) := \int_0^x \varphi(x)\,dx$. È chiaro dal teorema di collegamento che se $\phi(x)\to L$ per $x\to+\infty$ allora anche la successione $\phi(n)$ tende a L. Resta da provare che se $\phi(n)\to L$ anche $\phi(x)\to L$ per $x\to+\infty$. Per questo osservare che, se $[x]$ è la parte intera di x, si ha, per $n := [x]$,
$$\begin{cases}\phi(n)\le\phi(x)\le\phi(n+1) & \text{se } a_n\ge 0\\ \phi(n+1)\le\phi(x)\le\phi(n) & \text{se } a_n\le 0.]\end{cases}\tag{2.2}$$

Condizione necessaria per la convergenza

2.6 Proposizione. *Sia $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ una serie convergente. Allora $a_j\to 0$.*

Dimostrazione. Evidentemente per ogni $n\ge 0$ si ha
$$a_n = \sum_{j=0}^{n} a_j - \sum_{j=0}^{n-1} a_j.$$
Se $\sum_{j=0}^{n} a_j \to L\in\mathbb{R}$, usando la regola per il calcolo dei limite della somma si trova che a_n ha limite $L-L=0$. □

Si faccia attenzione, $a_n\to 0$ *non* implica in generale che la serie $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ converga, cfr. ad esempio la serie armonica in 2.12.

2.7 Esempio (Serie geometrica). Abbiamo visto in 1.4 che
$$G_q(n) := \sum_{j=0}^{n} q^j = \begin{cases} n+1 & \text{se } q=1\\ \dfrac{q^{n+1}-1}{q-1} & \text{altrimenti}\end{cases}$$
e conseguentemente per $n\to+\infty$
$$\sum_{j=0}^{\infty} q^j \begin{cases}\text{converge a } \frac{1}{1-q} & \text{se } |q|<1,\\ \text{diverge a } +\infty & \text{se } q\ge 1\\ \text{è indeterminata} & \text{se } q\le -1.\end{cases}$$

2.8 Esempio (Serie telescopiche). Dall'esempio in 1.5
$$\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j(j+1)} = 1-\frac{1}{n+1}$$
e quindi mandando n all'infinito
$$\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j(j+1)} = 1.$$
Più in generale se a_n è una successione, si ha
$$\sum_{j=0}^{n}(a_j-a_{j+1}) = a_0 - a_{n+1},$$
e la serie $\sum_{j=0}^{\infty}(a_j-a_{j+1})$ converge, diverge o è indeterminata rispettivamente se la successione a_n converge, diverge o non ha limite. Nei primi due casi
$$\sum_{j=0}^{\infty}(a_j-a_{j+1}) = a_0 - \lim_{n\to\infty} a_n.$$

2.2 Serie a termini non negativi

C'è una sostanziale semplificazione del problema della convergenza delle serie se consideriamo serie a termini non negativi. Infatti *le somme parziali di una serie a termini non negativi costituiscono una successione crescente e dunque dotata di limite, finito o infinito.* In altre parole la somma di una serie a termini non negativi esiste sempre ed è possibile passare al limite nelle eventuali disequazioni o equazioni ottenute sulle somme parziali. Ciò permette in particolare di valutare la somma di una serie quando non si sappia calcolare esattamente la somma.

Serie a termini non negativi

Una serie $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ è a termini non negativi se $a_j \geq 0$ per ogni j. Le somme parziali di una serie a termini non negativi formano una successione monotona e dunque le serie a termini non negativi o convergono o divergono.

PROPOSIZIONE. *La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ converge se e solo se $\alpha > 1$ e*

$$\frac{1}{\alpha - 1} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \leq 1 + \frac{1}{\alpha - 1}.$$

Convergenza assoluta

DEFINIZIONE. *Si dice che una serie $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$, $a_j \in \mathbb{R}$ o $a_j \in \mathbb{C}$* converge assolutamente *se la serie a termini non negativi $\sum_{j=0}^{\infty} |a_j|$ converge.*

Si ha

PROPOSIZIONE. *Una serie $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ che converge assolutamente converge. Inoltre*

$$\Big|\sum_{j=0}^{\infty} a_j\Big| \leq \sum_{j=0}^{\infty} |a_j|.$$

Ad esempio, siano date due serie $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ e $\sum_{j=0}^{\infty} b_j$ e si sappia che per ogni $j \geq p$ si ha che $a_j \leq b_j$. Sommando da p a n queste diseguaglianze si ottiene

$$\sum_{j=p}^{n} a_j \leq \sum_{j=p}^{n} b_j \quad \forall n \geq p, \tag{2.3}$$

e tuttavia non si può passare al limite per $n \to \infty$ se non si conosce per altra via l'*esistenza dei due limiti* $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ *e* $\sum_{j=1}^{\infty} b_j$. Per le serie a termini non negativi (o definitivamente non negativi, o più in generale definitivamente di segno costante), le rispettive successioni delle somme parziali sono definitivamente monotone e l'esistenza delle somme è garantita. Perciò si ha

2.9 PROPOSIZIONE (CRITERIO DEL CONFRONTO). *Siano $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ e $\sum_{j=0}^{\infty} b_j$ due serie a termini non negativi e supponiamo che per ogni $j \geq p$ si abbia che $a_j \leq b_j$. Allora*

(i) *Se la serie $\sum_{j=0}^{\infty} b_j$ converge, allora la serie $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ converge,*
(ii) *Se la serie $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ diverge, allora la serie $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ diverge.*

In entrambi i casi vale la stima

$$\sum_{j=p}^{\infty} a_j \leq \sum_{j=p}^{\infty} b_j. \tag{2.4}$$

Dimostrazione. Sommando le disequazioni in ipotesi da p a n, $\forall n \geq p$, si trova la (2.3). D'altra parte essendo le due serie a termini positivi, le rispettive successioni delle somme parziali sono crescenti e hanno limite,

$$\sum_{j=p}^{n} a_j \to \sum_{j=p}^{\infty} a_j, \qquad \sum_{j=p}^{n} b_j \to \sum_{j=p}^{\infty} b_j.$$

Passando al limite con n nella (2.3) si ottiene la stima (2.4) e la tesi. □

2.10 ESEMPIO. Poiché

$$\frac{1}{j^2} \le \frac{2}{j(j+1)}, \quad \forall j \ge 1,$$

si ricava che $\sum_{j=1}^{n} 1/j^2 \le 2\sum_{j=1}^{n} 1/(j(j+1))$. Passando al limite per $n \to \infty$ (le serie sono a termini positivi) si trova che

$$1 \le \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2} < 2\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j(j+1)} = 2.$$

In realtà, come vedremo nel seguito, $\sum_{j=1}^{\infty} 1/j^2 = \pi^2/6$.

Nel caso si fosse interessati a decidere se una data serie converge o diverge, senza pretendere di ottenere stime sulla somma, si può utilizzare il seguente

2.11 PROPOSIZIONE (CRITERIO DEL CONFRONTO ASINTOTICO). *Siano* $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ *e* $\sum_{j=0}^{\infty} b_j$ *due serie a termini* positivi *e* supponiamo *che*

$$\frac{a_n}{b_n} \to L \in \mathbb{R}.$$

Se la serie $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ *diverge allora diverge anche la serie* $\sum_{j=0}^{\infty} b_j$. *Se la serie* $\sum_{j=0}^{\infty} b_j$ *converge allora anche la serie* $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ *converge.*

Dimostrazione. Infatti la successione a_n/b_n è limitata; perciò per un qualche $M > 0$

$$a_n \le M\, b_n \qquad \forall n$$

e dal criterio del confronto in 2.9, $\sum_{j=0}^{\infty} a_j \le M \sum_{j=0}^{\infty} b_j$. □

Serie a termini positivi decrescenti

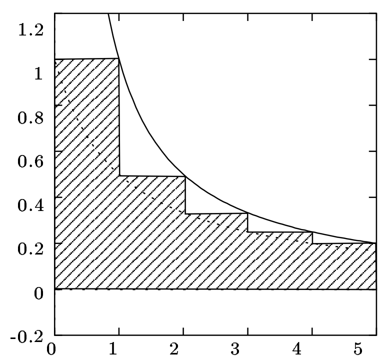

Figura 2.1. H_n e il grafico di $1/x$, $x > 0$.

2.12 ESEMPIO (LA SERIE ARMONICA). Si ottengono facilmente stime sulle somme parziali $H_n := \sum_{j=1}^{n} 1/j$ della serie armonica interpretando la serie come un integrale improprio.

Sia $\varphi : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ la funzione costante a tratti definita da

$$\varphi(x) = \frac{1}{j} \qquad \text{se } j-1 \le x < j.$$

Evidentemente $\sum_{j=k}^{n} 1/j = \int_{k-1}^{n} \varphi(x)\,dx$. D'altra parte

$$\frac{1}{x+1} \le \varphi(x) \le \frac{1}{x} \qquad \forall x > 0$$

e dunque

$$\int_0^n \frac{1}{1+x}\,dx \le H_n = 1 + \sum_{j=2}^{n} \frac{1}{j} \le 1 + \int_1^n \frac{1}{x}\,dx,$$

i.e.,

n	H_n	$H_n/\log n - 1$	$H_n - \log n$
10	2.92896825396825	2.7e-01	0.626383160974208
30	3.99498713092039	1.7e-01	0.593789749258235
100	5.18737751763962	1.3e-01	0.582207331651529
300	6.2826638802995	1.0e-01	0.578881405643301
1000	7.48547086055034	8.4e-02	0.577715581568206
3000	8.58374988995917	7.2e-02	0.577382322308925
10000	9.78760603604434	6.3e-02	0.577265664068161
30000	10.8861849921199	5.6e-02	0.577232331475626
100000	12.0901461298633	5.0e-02	0.577220664893053

Figura 2.2. $H_n = \sum_{j=1}^n 1/j$, $H_n/\log n - 1$ e $H_n - \log n$.

$$\log(1+n) \leq H_n \leq 1 + \log n. \tag{2.5}$$

H_n è dunque asintotica a $\log n$, $H_n/\log n \to 1$. In particolare H_n tende all'infinito in modo esasperatamente lento, cfr. Figura 2.2.

Si noti infine che posto $\gamma_n := H_n - \log n$, dalla (2.5) segue che $0 < \gamma_n < 1$. Inoltre

$$\gamma_n = 1 + \int_1^n \Big(\varphi(x) - \frac{1}{x}\Big)\,dx.$$

Essendo appunto $\varphi(x) \leq 1/x$ $\forall x$, γ_n è decrescente. D'altra parte essendo $1/x$ convessa, per $x \in [j-1, j]$ si ha

$$\frac{1}{x} \leq \Big(\frac{1}{j} - \frac{1}{j-1}\Big)\Big(x - \frac{1}{j}\Big) + \frac{1}{j}$$

e dunque

$$\frac{1}{x} - \varphi(x) \leq \Big(\frac{1}{j} - \frac{1}{j-1}\Big)\Big(x - \frac{1}{j}\Big).$$

Integrando

$$\gamma_n = 1 + \int_1^n \Big(\varphi(x) - \frac{1}{x}\Big)\,dx \geq 1 - \frac{1}{2}\sum_{j=2}^n \Big(\frac{1}{j-1} - \frac{1}{j}\Big) = 1 - \frac{1}{2}\Big(1 - \frac{1}{n}\Big) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}.$$

In conclusione

Proposizione. *Le somme parziali H_n della serie armonica sono una successione asintotica a $\log n$. Inoltre $H_n - \log n$ è decrescente e ha un limite γ in $[1/2, 1[$. γ si chiama la* costante di Eulero-Mascheroni. *Con la notazione di Landau,*

$$H_n = \log n + \gamma + o(1) \qquad \textit{per } n \to \infty.$$

Una valore approssimato di γ è 0.57721566.... Si ha anche

$$\frac{H_n}{\log n} = 1 + \frac{\gamma}{\log n} + o\Big(\frac{1}{\log n}\Big)$$

È così spiegata la lentezza nella convergenza $H_n/\log n \to 1$ che si riscontra nella Figura 2.2.

2.13 Esempio (Serie armonica generalizzata). Si può adattare il metodo in 2.12 per studiare la convergenza della serie $\sum_{j=1}^\infty 1/n^\alpha$, $\alpha \neq 1$. Sia $\varphi : [0, \infty[$ la funzione costante a tratti definita da

$$\varphi(x) = \frac{1}{n^\alpha} \qquad \text{se } n-1 \leq x < n.$$

Si ha per $n \geq k \geq 1$

$$\sum_{j=k}^n \frac{1}{j^\alpha} = \int_{k-1}^n \varphi(x)\,dx.$$

D'altra parte $1/(x+1)^\alpha \leq \varphi(x) \leq 1/x^\alpha$ $\forall x > 0$ e quindi

$$\int_0^n \frac{1}{(x+1)^\alpha}\,dx \leq \sum_{j=1}^n \frac{1}{j^\alpha} \leq 1 + \int_1^n \frac{1}{x^\alpha}\,dx.$$

In definitiva per ogni intero n

$$\frac{(n+1)^{-\alpha+1}-1}{-\alpha+1} \le \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j^\alpha} \le 1 + \frac{n^{-\alpha+1}-1}{-\alpha+1}$$

e mandando $n \to +\infty$ si trova che

PROPOSIZIONE. *La serie* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ *converge se e solo se* $\alpha > 1$ *e*

$$\frac{1}{\alpha-1} \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \le 1 + \frac{1}{\alpha-1}. \tag{2.6}$$

2.3 La funzione esponenziale e il numero e

2.14 TEOREMA. *Per ogni* $x \in \mathbb{R}$, *la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ *converge e*

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \forall x \in \mathbb{R} \qquad \textit{con} \qquad \left| e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \right| \le \max(e^x, 1) \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \quad \forall n,\ x. \tag{2.7}$$

Dimostrazione. Per ogni intero n, il polinomio di Taylor di ordine n della funzione e^x centrato in 0 è, cfr. Cap. 5 Vol. I,

$$P_n(x) := \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$$

essendo $D^k e^x = e^x \ \forall x,\ \forall k$. $P_n(x)$ è dunque la somma parziale n-sima della serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$. Per provare che $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ ha somma e^x, basterà provare che per x fissato, $x \in \mathbb{R}$,

$$|e^x - P_n(x)| \to 0 \qquad \text{per } n \to +\infty.$$

Se si applica a e^x la formula di Taylor con resto integrale, cfr. Cap. 5 Vol. I, si ha

$$e^x - P_n(x) = \frac{1}{n!} \int_0^x (x-t)^n D^{n+1} e^x(t)\, dt = \frac{1}{n!} \int_0^x (x-t)^n e^t\, dt,$$

e, supponendo per il momento che x sia non negativo,

$$|e^x - P_n(x)| \le \frac{e^x}{n!} \int_0^x (x-t)^n\, dt = e^x \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

da cui $|e^x - P_n(x)| \to 0$ per $n \to \infty$.

Se $x < 0$ la stima è leggermente diversa. Si ha

$$|e^x - P_n(x)| = \frac{1}{n!} \int_x^0 (t-x)^n e^t\, dt \le \frac{1}{n!} \int_x^0 (t-x)^n\, dt = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!},$$

e di nuovo $|e^x - P_n(x)| \to 0$ con n. □

La formula (2.7) realizza e^x come un limite di polinomi. Torneremo più avanti su questo aspetto delle funzioni elementari.

Il numero e

Dalla (2.5) si ricava in particolare che

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}. \tag{2.8}$$

Osserviamo che si può dimostrare successivamente che per $j = 4, 5, 6, \dots$ si ha $2^j \le j!$. Perciò

$$\begin{aligned} \sum_{j=4}^{\infty} 1/j! &\le \sum_{j=4}^{\infty} 2^{-j} = \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-j} - 1 - 1/2 - 1/4 - 1/8 \\ &= 2 - 1 - 1/2 - 1/4 - 1/8 = 1/8 \end{aligned}$$

e

$$2.5 < \frac{11}{6} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} < e = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} = 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \sum_{j=4}^{\infty} \frac{1}{j!} < 2.9. \tag{2.9}$$

La *serie esponenziale* $\sum_{j=0}^{\infty} 1/j!$ *converge rapidamente* ad e, dunque è anche un modo pratico per calcolare il numero e di Nepero con la precisione voluta. Si ha infatti

2.15 PROPOSIZIONE. *Per ogni* $n \in \mathbb{N}$ *si ha*

$$e - \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j!} < \frac{1}{n\,n!}. \tag{2.10}$$

Dimostrazione. Scriviamo

$$e - \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j!} = \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{1}{j!} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1+j)!}.$$

Ma

$$(n+1+j)! = (n+1)!(n+2)(n+3)\dots(n+j+1) \geq (n+1)!(n+2)^j,$$

e dunque

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1+j)!} \leq \frac{1}{(n+1)!} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(n+2)^j} = \frac{1}{(n+1)!} \frac{1}{1 - \frac{1}{n+2}} = \frac{1}{(n+1)!} \frac{n+2}{n+1} < \frac{1}{n\,n!}.$$

L'ultima stima segue perché $n(n+2) < (n+1)^2$. □

2.16 ESEMPIO. Ad esempio se $n = 6$, $n\,n! = 4320$ e dunque

$$2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \frac{1}{720}$$

è minore di e e differisce da e per meno di 3×10^{-4}. La Figura 2.3 contiene una tabella di valori approssimati di e.

n	S_n	$1 - S_n/e$
1	1	+6.3e-01
3	2.5	+8.0e-02
5	2.70833333333333	+3.7e-03
7	2.71805555555556	+8.3e-05
9	2.71827876984127	+1.1e-06
11	2.71828180114638	+1.0e-08
13	2.71828182828617	+6.4e-11
15	2.71828182845823	+3.0e-13
17	2.71828182845904	+7.8e-16
e	2.71828182845905	

Figura 2.3. $S_n := \sum_{j=0}^{n-1} 1/j!$ e l'errore relativo $1 - S_n/e$.

Può sorprendere che la (2.10) permetta di dimostrare assai agevolmente che

2.17 TEOREMA. e *è irrazionale.*

Dimostrazione. Infatti se e fosse razionale, $e = p/q$, $p, q \in \mathbb{Z}$ si dovrebbe avere che $p > 1$ e $q > 2$ perché $2.5 < e < 2.9$. Inoltre dalla (2.10)

$$0 < \frac{p}{q} - \sum_{j=0}^{q} \frac{1}{j!} < \frac{1}{q\,q!}$$

e moltiplicando per $q!$ si avrebbe

$$0 < p(q-1)! - q! \sum_{j=0}^{q} 1/j! < \frac{1}{q}$$

il che è assurdo essendo il numero $p(q-1)! - q! \sum_{j=0}^{q} 1/j!$ intero. □

3 Serie a termini di segno variabile

Nel caso di una serie $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ a termini di segno variabile, conviene definire

$$a_j^+ := \max(a_j, 0) = \begin{cases} a_j & \text{se } a_j > 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad a_j^- := \max(-a_j, 0) = \begin{cases} -a_j & \text{se } a_j < 0 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Ovviamente $a_j = a_j^+ - a_j^-$, $\forall j \geq 0$ e, sommando da 0 a p, si ottiene $\sum_{j=0}^{n} a_j = \sum_{j=0}^{n} a_j^+ - \sum_{j=0}^{n} a_j^-$. Se le due serie a termini positivi $\sum_{j=0}^{\infty} a_j^+$ e $\sum_{j=0}^{\infty} a_j^-$ non sono entrambe divergenti, dai teoremi sui limiti si ottiene

$$\sum_{j=0}^{\infty} a_j = \sum_{j=0}^{\infty} a_j^+ - \sum_{j=0}^{\infty} a_j^-$$

Perciò

3.1 Proposizione. *Si ha*

- $\sum_{j=o}^{\infty} a_j$ *converge se* $\sum_{j=0}^{\infty} a_j^+$ e $\sum_{j=0}^{\infty} a_j^-$ *sono entrambe convergenti,*
- $\sum_{j=o}^{\infty} a_j$ *diverge a* $+\infty$ *se* $\sum_{j=0}^{\infty} a_j^+$ *diverge e* $\sum_{j=0}^{\infty} a_j^-$ *converge,*
- $\sum_{j=o}^{\infty} a_j$ *diverge a* $-\infty$ *se* $\sum_{j=0}^{\infty} a_j^+$ *converge e* $\sum_{j=0}^{\infty} a_j^-$ *diverge.*

n	1	2	3	4	5	6	7	8
$a_n = (-1)^n/n$	-1	$1/2$	$-1/3$	$1/4$	$-1/5$	$1/6$	$-1/7$	$1/8$
a_n^+	0	$1/2$	0	$1/4$	0	$1/6$	0	$1/8$
a_n^-	1	0	$1/3$	0	$1/5$	0	$1/7$	0
$\lvert a_n \rvert$	1	$1/2$	$1/3$	$1/4$	$1/5$	$1/6$	$1/7$	$1/8$

Figura 3.1. a_n, a_n^+, a_n^- e $|a_n|$ per $a_n = (-1)^n/n$.

Lo studio della convergenza è così ricondotto allo studio di serie a termini non negativi tranne che nel caso in cui entrambe le serie $\sum_{j=0}^{\infty} a_j^+$ e $\sum_{j=0}^{\infty} a_j^-$ sono divergenti. In quest'ultimo caso, $\sum_{j=0}^{\infty} a_j^+ = \sum_{j=0}^{\infty} a_j^- = +\infty$, esistono esempi significativi di serie $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ sia convergenti che divergenti ed e' necessaria una analisi piu' approfondita.

Convergenza assoluta

Un caso particolare è quello in cui la serie dei *valori assoluti* $\sum_{j=0}^{\infty} |a_j|$ converge.

3.2 Definizione. *Si dice che una serie* $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ converge assolutamente *se converge la serie a termini positivi* $\sum_{j=0}^{\infty} |a_j|$.

Si ha

3.3 Proposizione. *Una serie* $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ *che converge assolutamente converge. Inoltre*

$$\Big| \sum_{j=0}^{\infty} a_j \Big| \leq \sum_{j=0}^{\infty} |a_j|. \tag{3.1}$$

Dimostrazione. Si noti che per ogni $j \geq 0$, a_j^+ e a_j^- sono non negativi e $a_j^+ + a_j^- = |a_j|$. Perciò

$$a_j^+,\ a_j^- \leq |a_j|, \quad \forall j \geq 0.$$

Per il criterio del confronto per serie a termini positivi, le serie $\sum_{j=0}^{\infty} a_j^+$ e $\sum_{j=0}^{\infty} a_j^-$ convergono e per quanto già detto la serie data $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ converge. D'altra parte dalla *diseguaglianza triangolare* $|x+y| \leq |x| + |y|$ segue che

$$\Big| \sum_{j=0}^{n} a_j \Big| \leq \sum_{j=0}^{n} |a_j| \leq \sum_{j=0}^{\infty} |a_j|, \quad \forall n \geq 0,$$

e passando al limite per $n \to \infty$ (abbiamo appena provato che la serie $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ è convergente), si trova la stima (3.1). $\square$

4 Esercizi

4.1 ¶ (Galileo)

$$\frac{1}{3} = \frac{1+3}{5+7} = \frac{1+3+5}{7+9+11} = \dots \quad .$$

4.2 ¶ Si trovi una formula chiusa per $\sum_{j=0}^{n} j^2 q^j$, $\sum_{j=0}^{n} j^3 q^j$.

4.3 ¶ Calcolare le seguenti somme

$$\sum_{j=1}^{n} (j-1)^2, \qquad \sum_{j=1}^{n} (j^2 - j + 1), \forall n \geq 1.$$

4.4 ¶ Calcolare per ogni $n \geq 1$ le somme

$$\sum_{j=1}^{n} j(j-1), \quad \sum_{j=1}^{n} j(j+1)(j+2), \quad \sum_{j=1}^{n} j(j+1)(j+2)(j+3).$$

4.5 ¶ Provare il *teorema di Nicomaco*

$$\sum_{j=1}^{n} j^3 = (\sum_{j=1}^{n} j)^2, \forall n \geq 1.$$

4.6 ¶ Provare l'*identità di Catalan*

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{n+j} = \sum_{j=1}^{2n} (-1)^{n-j} \frac{1}{j}, \forall n \geq 1.$$

4.7 ¶ Calcolare le somme parziali delle seguenti serie telescopiche

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\sqrt{j+1} - \sqrt{j}}{\sqrt{j^2+j}}, \quad \sum_{j=1}^{\infty} \frac{j+1/2}{j^2(j+1)^2}, \quad \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j(j+1)(j+2)}, \quad \sum_{j=2}^{\infty} \frac{1}{j^2-1}.$$

4.8 ¶ n rette si dicono essere in posizione generica se a due a due si incontrano in uno e un solo punto. Calcolare in numero di regioni piane individuate da n rette in posizione generica.

4.9 ¶ Come conseguenza della formula del binomio di Newton si provi che $\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} = 2^n$.

4.10 ¶ Facciamo cadere una pallina da ping-pong da un'altezza h sopra un tavolo di legno duro. La pallina rimbalzerà infinite volte prima di fermarsi perdendo quota ad ogni rimbalzo. Supponiamo che ad ogni rimbalzo la pallina arrivi al 75% della quota raggiunta al rimbalzo precedente. Si calcoli il tempo che la pallina da ping-pong impiega a fermarsi.

4.11 ¶ (Curva di von Koch) Partendo da un triangolo equilatero di lato uno, si incolli al centro di ogni lato un triangolo equilatero di lato 1/3 in modo da ottenere una stella. Al centro di ogni lato della stella si incolli un triangolo equilatero di lato 1/9. Iterando il procedimento si genera una curva chiusa detta curva di von Koch.

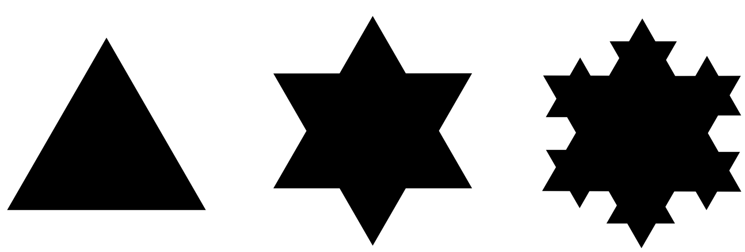

Figura 4.1. La costruzione della curva di von Koch.

Provare che la figura risultante ha area finita e che la curva di von Koch ha lunghezza infinita.

4.12 ¶ (Insieme di Cantor) Un quadrato di lato unitario viene diviso in 9 quadrati di lato $1/3$ e quello centrale viene colorato di nero. I rimanenti 8 quadrati di lato $1/3$ vengono divisi allo stesso modo (in quadrati di lato $1/9$) e quelli centrali vengono similmente colorati in nero. Si itera il procedimento e si chiede di calcolare l'area della parte colorata di nero. La parte non colorata del quadrato è noto come l'*insieme di Cantor* che incontreremo spesso nel seguito.

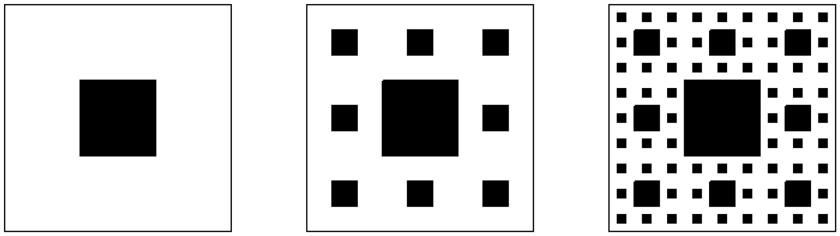

Figura 4.2. La costruzione dell'insieme di Cantor in dimensione 2.

4.13 ¶ Provare che $\sum_{j=0}^{n} q^j$ è dell'ordine di

$$\begin{cases} \frac{q^{n+1}}{q-1} & \text{se } q > 1 \\ n & \text{se } q = 1 \\ \frac{1}{1-q} & \text{se } 0 \le q < 1. \end{cases}$$

4.14 ¶ Provare che $\sum_{j=0}^{n} jq^j$ è dell'ordine di

$$\begin{cases} \frac{nq^{n+2}}{(q-1)^2} & \text{se } q > 1 \\ \frac{n^2}{2} & \text{se } q = 1 \\ \frac{1}{1-q} & \text{se } 0 \le q < 1. \end{cases}$$

4.15 ¶ Stimare l'errore che si commette sostituendo la somma della serie $\sum_{j=1}^{\infty} 1/j^2$ con una sua somma parziale.

4.16 ¶ Un bruco lento ma tenace cammina alla velocità di $10cm$ al minuto su una striscia di gomma che uno spiritello maligno allunga ogni minuto di 1 metro. Riuscirà il bruco ad arrivare alla fine della striscia?

4.17 ¶ Si faccia una pila di n monete uguali di diametro 1. Si disponga la pila in modo che le monete siano in equilibrio e formino una grondaia la più ampia possibile, cfr. la Figura 4.3. A che distanza si trovano i centri della prima e dell'ultima moneta?

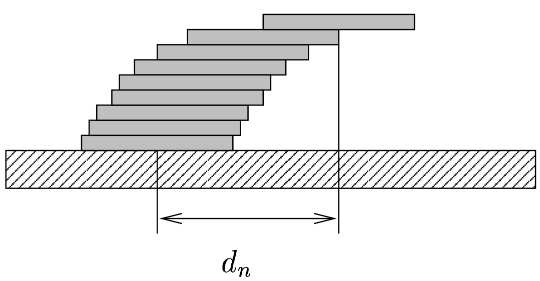

Figura 4.3. Il problema della pila di monete.

4.18 ¶ Mostrare che
se $\lim_{n\to\infty} n^2(a_{n+1} - a_n) = 0$, allora $\{a_n\}$ converge,
(ii) se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ converge allora converge $\sum_{n=1}^{\infty} a_n/n$.

4.19 ¶ Al variare dell'eventuale parametro reale x o z, studiare la convergenza delle serie di termine generale

$$
\begin{array}{ll}
ne^{-n}, & n^{-n}, \\[1ex]
\dfrac{n!}{(2n)!}, & \dfrac{n^2 \log(1+n^2)}{\sqrt{n!}}, \\[2ex]
\dfrac{(2n)!}{(3n)! - (2n)!}, & \dfrac{2^n n!}{(2n)!}, \\[2ex]
\dfrac{\cos \pi n}{n \log(1+n)}, & \dfrac{\sin n!}{n(n+1)}, \\[2ex]
\arctan 2^{-n}, & \dfrac{(-1)^k k}{(k+1)^2 (k+2)}, \\[2ex]
\log^2(1+1/n), & \log(1+1/n), \\[1ex]
\dfrac{n}{n \arctan n + 1}, & (-1)^n \sin^2(1/n), \\[2ex]
\left(\dfrac{\pi}{2} - \arctan n\right), & \log\left(1 + \dfrac{(-1)^n}{n^2}\right), \\[2ex]
(1+x)^{n(1+1/n)}, \ x \in]-1, 0[, & (-2)^n e^{-nx}, \\[1ex]
a^{n^2} z^n, & \dfrac{z^n}{n^n}, \\[2ex]
\displaystyle\int_0^{1/n} \left(1 - \frac{\sin x}{x}\right) dx, & \displaystyle\int_0^{\pi/2} (\sin x)^n \, dx, \\[2ex]
(-1)^n \displaystyle\int_n^{n+1} t^2 e^{-t^2} \, dt, & n \displaystyle\int_n^{n+1} e^{-x} \sin x \, dx,
\end{array}
$$