1. Esercizi sui numeri reali

1.1 ¶. Ricavare la formula risolutiva per le equazioni di secondo grado.

1.2 ¶. Scrivere in altro modo $\sqrt{a^2}$, $a \in \mathbb{R}$.

1.3 ¶. Dato $a \in \mathbb{R}$, scrivere le soluzioni dell'equazione $x^2 = a^2$.

1.4 ¶. Se $|x| < y$ per ogni numero reale $y > 0$ allora $x = 0$.

1.5 ¶. Dati tre numeri reali arbitrari, provare che

(i) $|x + y| \leq |x| + |y|$,
(ii) $|x - y| \leq |x - z| + |z - y|$,
(iii) $||x| - |y|| \leq |x - y|$.

[*Sugg.* Provare la (i) facendo i vari casi, quindi ricavare le (ii) e (iii) dalla (i).]

1.6 ¶. Determinare rapidamente l'insieme delle soluzioni di alcune delle seguenti disequazioni

$$|2x + 1| < 1, \qquad \frac{|x-1|}{|x+1|} < 1, \qquad \frac{|x-1|}{|x+1|} < 2,$$
$$2x^2 - 9 > 0, \qquad 2x^2 > 3(9 - x), \qquad \frac{6}{2x-1} > \frac{5}{x-2},$$
$$|\sqrt{x} - x| < 1, \qquad \sqrt[3]{x+8} > 1, \qquad \sqrt{1 + x^2} < |x|.$$

1.7 ¶. Determinare l'insieme delle soluzioni di alcune delle seguenti disequazioni

$$\frac{x-2}{|x - x^2|} < 2, \qquad \frac{x+1}{x^2 - 2} < \frac{1}{x}, \qquad 3x + 5 > \sqrt{9x^2 - 6x - 8},$$
$$\frac{\sqrt{x - \sqrt{1-x}}}{1 - \sqrt{x}} < 1, \qquad \sqrt{x^2 - x - |x|} \geq \frac{x-4}{2}.$$

1.8 ¶. Per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ esistono soluzioni reali di $|x^2 - 3x + 2| + \alpha = 0$?

1.9 ¶. Se $\alpha < x < \beta$ e $\alpha < y < \beta$, allora $|x - y| < \beta - \alpha$.

1.10 ¶. Dati $a_1 \neq a_2$, trovare il più grande y tale che $|x - a_1| + |x - a_2| \geq y$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

1.11 ¶. Trovare tutte le soluzioni rispettivamente di $x^3 = 16$ e di $x^4 = 16$.

GROUP 1: [`NumeriReali`] Disequazioni e numeri reali

Importance: [1:-3:-3]

. . . .

Q 1.1: La seguente affermazione $||x| - |y|| \leq |x - y|\ \forall x, y \in \mathbb{R}$ è

1. vera
2. falsa
3. dipende

. . . .

Q 1.2: La diseguaglianza $|\sqrt{x} - x| < 1$ è verificata per

1. $0 < x < \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$
2. $0 \leq x \leq 2$
3. $0 \leq x < \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$
4. per nessun x
5. per ogni $x \in \mathbb{R}$
6. nessuna delle precedenti.

. . . .

Q 1.3: L'insieme $\{x \in \mathbb{R} \mid \sqrt{1+x^2} < |x|\}$ è

1. $[0, 1]$
2. $\emptyset$
3. $\mathbb{R}$
4. $\{0\} \cup [1, 2]$
5. nessuna delle precedenti.

. . . .

Q 1.4: L'insieme $\{x \in \mathbb{R} \mid \left|\dfrac{x-1}{x+1}\right| < 1\}$ è

1. $[0, +\infty[$
2. $]0, +\infty[$
3. $]1, +\infty[$.
4. nessuna delle precedenti.

. . . .

Q 1.5: L'equazione $|x^2 - 3x + 2| = \alpha$ ha soluzioni se e solo se

1. $\alpha \in [0, +\infty[$
2. $\alpha \in [0, 1/4]$
3. sempre
4. per qualche $\alpha \in [0, +\infty[$
5. nessuna delle precedenti.

2. Esercizi di geometria analitica

2.1 ¶. Siano $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ tre vettori di lunghezza 1 applicati nello stesso punto e in equilibrio, cioè $\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 = 0$. Mostrare che i tre vettori formano angoli uguali fra loro.

2.2 ¶. Scrivere in forma parametrica e in forma implicita l'equazione di

- fascio di rette uscenti da un punto,
- retta per un punto e parallela ad una retta data,
- famiglia delle rette parallele a una retta data,
- retta per un punto e perpendicolare a una retta data,
- famiglia delle rette perpendicolari a una retta data,
- punto di intersezione di due rette.

2.3 ¶. Data una retta r in forma parametrica e/o implicita, e un punto P fuori di essa, calcolare

- la retta perpendicolare a r passante per P,
- il piede della perpendicolare a r passante per P,
- il punto simmetrico a P rispetto a r,
- la retta simmetrica a r rispetto a P.

2.4 ¶. Date due rette che si intersecano, scrivere le equazioni delle bisettrici.

2.5 ¶. Scrivere l'equazione di

- cerchio per 3 punti dati,
- cerchio di centro assegnato e tangente a una retta data,
- cerchio per un punto e tangente a una retta data,
- famiglia di cerchi per due punti,
- retta per le intersezioni di due cerchi.

2.6 ¶. Sia ABC un triangolo inscritto in una circonferenza. AB è un diametro se e solo se ABC è rettangolo in C.

2.7 ¶. Scrivere l'equazione di

- ellisse canonica di semiassi assegnati,
- iperbole canonica di semiassi assegnati,
- parabola canonica per l'origine,
- parabola per l'origine e tangente a una retta data.

2.8 ¶. Dato un oggetto geometrico, ad esempio una retta o una conica, operare una traslazione dell'oggetto muovento un suo punto in un altro punto dato. Scrivere la funzione traslazione e le nuove equazioni dell'oggetto.

2.9 ¶ (Regola del parallelogramma). Se a, b, a, b sono le lunghezze dei lati consecutivi di un parallelogramma, e d_1, d_2 le lunghezze delle diagonali, allora

$$d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2 + b^2).$$

2.10 ¶ (Teorema di Tolomeo). Se $ABCD$ è un quadrilatero inscritto in un cerchio, e a, b, c, d sono le lunghezze dei lati consecutivi e d_1, d_2 le lunghezze delle diagonali, allora

$$d_1 d_2 = ac + bd.$$

3. Esercizi sulla sintassi e la logica matematica

3.1 ¶. Gli insiemi

$$\{x \in \mathbb{R} \,|\, x^2 < 4\} \qquad \text{e} \qquad \{x \in \mathbb{R} \,|\, x < -2\} \cup \{x \in \mathbb{R} \,|\, x^2 > 2\}$$

sono uguali? Percheé?

3.2 ¶. Provare le *formule di De Morgan*: se $A, B \subset X$ e $A^c = X \setminus A$, $B^c = X \setminus B$, allora

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c, \qquad (A \cup B)^c = A^c \cap B^c.$$

In termini di operatori sulle proposizioni, date due proposizioni A, B,

$$\text{Not}\,(\text{AND}\,(A,B)) = \text{OR}\,(\text{Not}\,(A), \text{Not}\,(B)), \qquad \text{Not}\,(OR(A,B)) = \text{AND}\,(\text{Not}\,(A), \text{Not}\,(B)).$$

3.3 ¶. Sia $p(x)$ un predicato, Negare le frasi

- $p(x)$ è falso per ogni $x \in A$,
- $p(x)$ è falso per ogni $x \in B \subset A$,
- esiste $x \in A$ per cui $p(x)$ è falso,

3.4 ¶. Cinque persone sono attorno ad un tavolo. Negare le seguenti affermazioni

- una è in piedi,
- una non è seduta,
- tutti sono in piedi,
- nessuno è seduto.

3.5 ¶. Quali di queste frasi è equivalente a "se Batistuta gioca, la Roma vince"

- se Batistuta gioca, la Roma non vince
- se Batistuta non gioca, la Roma vince
- se Batistuta non gioca, la Roma non vince
- se la Roma vince, Batistuta gioca
- se la Roma vince, Batistuta non gioca
- se la Roma non vince, Batistuta gioca
- se la Roma non vince, Batistuta non gioca.
- la Roma vince e Batistuta gioca
- la Roma vince e Batistuta non gioca
- la Roma non vince e Batistuta gioca
- la Roma non vince e Batistuta non gioca.
- la Roma vince o Batistuta gioca
- la Roma vince o Batistuta non gioca
- la Roma non vince o Batistuta gioca
- la Roma non vince o Batistuta non gioca.

3.6 ¶. Quali di queste frasi è la negazione di "se Batistuta gioca, la Roma vince"

- ◦ se Batistuta gioca, la Roma non vince
- ◦ se Batistuta non gioca, la Roma vince
- ◦ se Batistuta non gioca, la Roma non vince
- ◦ se la Roma vince, Batistuta gioca
- ◦ se la Roma vince, Batistuta non gioca
- ◦ se la Roma non vince, Batistuta gioca
- ◦ se la Roma non vince, Batistuta non gioca.

3.7 ¶. La frase ”tutti triangoli sono rettangoli” è anche una implicazione. Quale?.

GROUP 2: [`Sintassi e logica`] Sintassi e logica

Importance: [1:-3:-3]

....

Q 2.1: Sia $A \subset X$ un sottoinsieme di un insieme X e $A^c = X \setminus A$ il suo complementare. Allora $(A \cup B)^c$ è uguale a

1. $A^c \cap B^c$
2. $(A^c \cap B^c)^c$
3. $A^c \cup B^c$
4. $(A \cap B)^c$
5. nessuna delle precedenti.

....

Q 2.2: Sia $A := \{x \in \mathbb{R} \,|\, \left|\frac{x-1}{x+1}\right| < 1\}$. Allora $A^c := \mathbb{R} \setminus A$ è

1. $]-\infty, 0[$
2. $]-\infty, 0]$
3. $[0, +\infty[$
4. $]0, +\infty[$
5. nessuna delle precedenti.

4. Esercizi sulla definizione di funzione

4.1 ¶. Se $f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, è pari, allora $xf(x)$ è dispari. Anzi $g(x)$, $x \in \mathbb{R}$, è una funzione dispari se e solo se esiste una funzione pari $f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, tale che $g(x) = xf(x)$.

4.2 ¶. $g(x)$, $x \in \mathbb{R}$, è una funzione pari se e solo se esiste una funzione $f(x)$, $x \geq 0$, tale che $g(x) = f(x^2)$.

4.3 ¶. Mostrare che

- x^2, $x \in [0, 1[$, è iniettiva,
- x^2, $x \in \mathbb{R}$, non è inettiva,
- $\sqrt{1 - x^2}$, $x \in [-1, 1]$, non è inettiva,
- $2x/(x + 1)$, $x \neq -1$, è inettiva.

4.4 ¶. Sia $f : A \to B$ una funzione. Mostrare che l'equazione $f(x) = y$ con $x \in A$ e $y \in B$ ha

(i) 0 o 1 suluzioni se f è iniettiva,
(ii) 1 o piu' soluzioni se f è surgettiva,
(iii) una ed una sola soluzione se f è bigettiva.

Le affermazioni precedenti sono equivalenze?

4.5 ¶. Mostrare che

(i) Se $g \circ f$ è iniettiva, allora f è iniettiva,
(ii) Se $g \circ f$ è surgettiva, allora g è surgettiva,
(iii) Se $g \circ f$ è iniettiva e f è surgettiva, allora g è iniettiva,
(iv) Se $g \circ f$ è surgettiva e g è iniettiva, allora f è surgettiva.

Fare esempi concreti. Notare, facendo esempi, che le affermazioni precedenti non sono equivalenze: la tesi non implica necessariamente l'ipotesi.

4.6 ¶ (Immagini e immagini inverse). Sia $f : A \to B$ una funzione. Allora

(i) Se $C \subset D \subset A$ allora
  - $f(C) \subset f(D)$,
  - $C \subset f^{-1}(f(C))$ e vale l'uguale se f è iniettiva,
  - $f(D) \setminus f(C) \subset f(D \setminus C)$ e vale l'uguaglianza se f è iniettiva.

(ii) Se $C_1, C_2 \subset A$ allora
  - $f(C_1 \cup C_2) = f(C_1) \cup f(C_2)$,
  - $f(C_1 \cap C_2) \subset f(C_1) \cap f(C_2)$ e vale l'uguaglianza se f è iniettiva. Fare esempi.

(iii) Se $E \subset F \subset B$ allora
  - $f^{-1}(E) \subset f^{-1}(F)$,
  - $f(f^{-1}(E)) \subset E$, e vale l'uguale se f è surgettiva. Fare esempi.
  - $f^{-1}(F \setminus E) = f^{-1}(F) \setminus f^{-1}(E)$.

(iv) Se $E_1, E_2 \subset B$, allora
  - $f^{-1}(E_1 \cup E_2) = f^{-1}(E_1) \cup f^{-1}(E_2)$,
  - $f^{-1}(E_1 \cap E_2) = f^{-1}(E_1) \cap f^{-1}(E_2)$.

Mostrare (facendo esempi) che in generale le inclusioni non si possono sostituire con eguaglianze.

4.7 ¶. Calcolare $g(f(x))$ e darne il campo di definizione quando

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2+1,\ x\in\mathbb{R}, & g(x) &= 2x,\ x\in\mathbb{R}\\ f(x) &= 2x,\ x\in\mathbb{R}, & g(x) &= x^2+1,\ x\in\mathbb{R}\\ f(x) &= \frac{x}{x+1},\ x\neq -1, & g(x) &= x^2,\ x\in\mathbb{R}\\ f(x) &= x^2,\ x\in\mathbb{R}, & g(x) &= \frac{x}{x+1},\ x\in\mathbb{R}. \end{aligned}$$

4.8 ¶. Descrivere rapidamente campo di esistenza, grafico e immagine delle seguenti funzioni; dire inoltre in quali intervalli esse sono invertibili e calcolarne l'inversa

$$\begin{array}{lll} 4x^2, & \sqrt{2x}, & |x|,\\ x[x], & \operatorname{sgn}(x), & \sqrt{4-x^2},\\ x^2-4x, & \sqrt{x(x^2-1)}, & \sqrt{-x^2-x-1}. \end{array}$$

4.9 ¶. Calcolare se esiste l'inversa delle seguenti funzioni dichiarandone il dominio e l'immagine

$$\begin{array}{lll} f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}, & x\neq -d/c, & f(x)=\dfrac{2^x+2^-x}{2},\\ f(x)=\dfrac{2^x-2^{-x}}{2}, & & f(x)=\sqrt{1-x^2},\\ f(x)=x+\sqrt{1+x^2}. & & \end{array}$$

4.1 Cambiamenti di scala

L'*ingrandimento*, o *riscalamento*, o *scoppiamento* di un fattore $k>0$ attorno a x_0 su $\mathbb{R}$ è la funzione $X=k(x-x_0)$, $x\in\mathbb{R}$. Se $y=f(x)$, l'ingrandimendo di un fattore $k>0$ attorno ad un punto $(x_0,f(x_0))\in\mathbb{R}^2$, è il cambio di variabili nel piano dato da

$$\begin{cases} X=k(x-x_0)\\ Y=k(y-y_0). \end{cases}$$

Ad esempio se si parte dalla parabola $y=x^2$ e la si vuole guardare attorno a $(0,0)$ con un ingrandimento 3 in entrambe le direzioni x,y, si sostituisce $X=3x$ e $Y=3y$ in $y=x^2$. Nelle nuove variabili (X,Y) si ottiene allora $Y=3y=3x^2=3(X/3)^2=X^2/3$ che è la parabola "vista da piu' vicino" con un ingrandimento 3.

4.10 ¶. Disegnare con ingrandimento 4 attorno a $(0,1)$ i grafici delle funzioni x^2+1, $x/(x+1)+1$.

4.11 ¶. Riconoscere che le funzioni

$$\frac{x}{x+1},\qquad \frac{2x}{2x+1},\qquad \frac{x}{2x+1}$$

sono l'ingrandimento l'una del'altra nelle direzioni degli assi, magari con un diverso ingrandimenso nelle direzioni degli assi.

GROUP 3: [`Funzioni`] Funzioni e funzioni elementari
Importance: [1:-3:-3]

....

Q 3.1: La funzione $f : [0 + \infty[\to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$,
1. è iniettiva
2. è surgettiva
3. non è iniettiva
4. non è surgettiva
5. è crescente
6. è decrescente
7. è limitata
8. è illimitata

....

Q 3.2: La funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$,
1. è iniettiva
2. è surgettiva
3. non è iniettiva
4. non è surgettiva
5. è crescente
6. è decrescente
7. è limitata
8. è illimitata

....

Q 3.3: La funzione $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$,
1. è iniettiva
2. è surgettiva
3. non è iniettiva
4. non è surgettiva
5. è crescente
6. è decrescente
7. è limitata
8. è illimitata

....

Q 3.4: La funzione $f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{2x}{x + 1}$,
1. è iniettiva
2. è surgettiva
3. non è iniettiva
4. non è surgettiva
5. è crescente
6. è decrescente
7. è limitata
8. è illimitata

....

Q 3.5: Sia $f : A \to B$ una funzione iniettiva e $y \in B$. L'equazione $f(x) = y$ ha
1. una soluzione
2. almeno una soluzione
3. al piu' una soluzione
4. nessuna soluzione
5. nessuna delle precedenti.

....

Q 3.6: Sia $f : A \to B$ una funzione surgettiva e $y \in B$. L'equazione $f(x) = y$ ha
1. una soluzione
2. almeno una soluzione
3. al piu' una soluzione
4. nessuna soluzione
5. nessuna delle precedenti.

. . . .

Q 3.7: Siano date $f : A \to B$ e $g : B \to C$. Supponiamo che $g \circ f : A \to C$ sia iniettiva. Allora
1. f è iniettiva
2. g è iniettiva
3. f e g sono inettive
4. non ci possono trarre informazioni su f e g
5. nessuna delle precedenti.

. . . .

Q 3.8: Siano date $f : A \to B$ e $g : B \to C$. Supponiamo che $g \circ f : A \to C$ sia surgettiva. Allora
1. f è surgettiva
2. g è surgettiva
3. f e g sono surgettive
4. non si possono trarre informazioni su f e g
5. nessuna delle precedenti.

. . . .

Q 3.9: Siano A, B sottoinsiemi di X e $f : X \to Y$ una funzione. Allora
1. $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$
2. $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$
3. $f(A \cap B) \supset f(A) \cap f(B)$
4. qualche volta $f(A \cap B) \neq f(A) \cap f(B)$
5. nessuna delle precedenti.

. . . .

Q 3.10: Siano A, B sottoinsiemi di X e $f : X \to Y$ una funzione. Allora
1. $f(A \cup B) \subset f(A) \cup f(B)$
2. $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$
3. $f(A \cup B) \supset f(A) \cup f(B)$
4. qualche volta $f(A \cup B) \neq f(A) \cup f(B)$
5. nessuna delle precedenti.

. . . .

Q 3.11: Siano A, B sottoinsiemi di Y e $f : X \to Y$ una funzione. Allora
1. $f^{-1}(A \cup B) \subset f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$
2. $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$
3. $f^{-1}(A \cup B) \supset f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$
4. qualche volta $f^{-1}(A \cup B) \neq f(A) \cup f(B)$
5. nessuna delle precedenti.

. . . .

Q 3.12: Siano A, B sottoinsiemi di Y e $f : X \to Y$ una funzione. Allora
1. $f^{-1}(A \cap B) \subset f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$
2. $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$
3. $f^{-1}(A \cap B) \supset f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$
4. qualche volta $f^{-1}(A \cap B) \neq f(A) \cap f(B)$
5. nessuna delle precedenti.

. . . .

Q 3.13: Siano A un sottoinsieme di X e $f : X \to Y$ una funzione. Allora $f(X \setminus A)$ è
1. contenuto in $f(X) \setminus f(A)$
2. uguale a $f(X) \setminus f(A)$

3. contiene $f(X) \setminus f(A)$
4. nessuna delle precedenti.

. . . .

Q 3.14: Sia $f : X \to Y$ una funzione e A, B sottoinsiemi di X. Quali di queste condizioni su f è sufficiente a garantire che $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$

1. nessuna condizione
2. f è iniettiva
3. f è surgettiva
4. nessuna delle precedenti

. . . .

Q 3.15: Sia $f : X \to Y$ una funzione e A, B sottoinsiemi di X. Quali di queste condizioni su f è sufficiente a garantire che $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$

1. nessuna condizione
2. f è iniettiva
3. f è surgettiva
4. nessuna delle precedenti

. . . .

Q 3.16: Sia $f : X \to Y$ una funzione e A, B sottoinsiemi di X. Quali di queste condizioni su f è sufficiente a garantire che $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$

1. nessuna condizione
2. f è iniettiva
3. f è surgettiva
4. f^{-1} è iniettiva
5. nessuna delle precedenti

. . . .

Q 3.17: Sia $f : X \to Y$ una funzione e A, B sottoinsiemi di X. Quali di queste condizioni su f è sufficiente a garantire che $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$

1. nessuna condizione
2. f è iniettiva
3. f è surgettiva
4. f^{-1} è iniettiva
5. nessuna delle precedenti

. . . .

Q 3.18: Se $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$, e $g(x) = 2x + 1$, $x \in \mathbb{R}$, allora $g \circ f(x)$ è

1. $2x^2 + 1$, $x \in \mathbb{R}$
2. $2x^2 + 1$
3. $(2x + 1)^2$, $x \in \mathbb{R}$
4. $(2x + 1)^2$
5. nessuna delle precedenti

. . . .

Q 3.19: Se $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$, e $g(x) = 2x + 1$, $x > 0$, allora $g \circ f(x)$ è

1. $2x^2 + 1$, $x \in \mathbb{R}$
2. $2x^2 + 1$
3. $2x^2 + 1$, $|x| > 1$
4. $(2x + 1)^2$, $|x| > 1$
5. $(2x + 1)^2$
6. nessuna delle precedenti

. . . .

Q 3.20: Se $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$ e $g(x) = x/(x + 1)$, $x \neq -1$ allora $g \circ f(x)$ è

1. $x^2/(x^2 + 1)$, $x \in \mathbb{R}$
2. $x^2/(x^2 + 1)$, $x \neq -1$
3. $x^2/x + 1$, $x \neq -1$

4. $x^2/(x^2+1)$
5. nessuna delle precedenti

. . . .

Q 3.21: Se $f(x) = x/(x+1)$, $x \in \mathbb{R}$ e $g(x) = x^2+1$, $x \in \mathbb{R}$, allora $g \circ f(x)$ è
1. $\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^2 + 1$, $x \neq -1$,
2. $\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^2 + 1$, $x \in' gr$
3. $\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^2 + 1$
4. $\dfrac{x^2+1}{x^2+2}$, $x \neq -1$
5. $\dfrac{x^2+1}{x^2+2}$, $x \in \mathbb{R}$
6. $\dfrac{x^2+1}{x^2+2}$
7. nessuna delle precedenti

. . . .

Q 3.22: Se $f(x) = x/(x+1)$, $x \in \mathbb{R}$ e $g(x) = x^2+1$, $x \geq 0$, allora $g \circ f(x)$ è
1. $\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^2 + 1$, $x < -1$ o $x \geq 0$,
2. $\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^2 + 1$, $x \in \mathbb{R}$
3. $\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^2 + 1$, $x \neq -1$
4. $\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^2 + 1$
5. $\dfrac{x^2+1}{x^2+2}$, $x \neq -1$
6. $\dfrac{x^2+1}{x^2+2}$
7. nessuna delle precedenti

. . . .

Q 3.23: L'inversa di $f(x) = \sqrt{1-x^2}$, $x \in [-1,1]$, è
1. $f^{-1}(x) = \sqrt{1-x^2}$, $x \in [-1,1]$,
2. $f^{-1}(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,
3. $f^{-1}(x) = (1-x^2)^2$, $x \in [-1,1]$
4. $f^{-1}(x) = (1-x)^2$, $x \in \mathbb{R}$
5. non esiste
6. nessuna delle precedenti.

. . . .

Q 3.24: L'inversa di $f(x) = (ax+b)/(cx+d)$, $x \neq -d/c$, è
1. $f^{-1}(x) = \dfrac{dx-b}{a-cx}$, $x \neq a/c$,
2. $f^{-1}(x) = \dfrac{cx+d}{ax+b}$, $x \neq -d/c$,
3. $f^{-1}(x) = \dfrac{cx+d}{ax+b}$
4. $f^{-1}(x) = \dfrac{dx+b}{cx+a}$, $x \neq -a/c$
5. non esiste
6. nessuna delle precedenti.

. . . .

Q 3.25: L'inversa di $f(x) = x + \sqrt{1+x^2}$, $x \in \mathbb{R}$, è

1. $f^{-1}(x) = -\dfrac{x^2-1}{2x}$, $y > 0$
2. $f^{-1}(x) = -\dfrac{x^2-1}{2x}$, $y \neq 0$
3. $f^{-1}(x) = \dfrac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}$, $x \in \mathbb{R}$
4. $f^{-1}(x) = \dfrac{x^2+1}{2x}$, $x \neq 0$
5. non esiste
6. nessuna delle precedenti.

. . . .

Q 3.26: L'inversa di $f(x) = x^2 - 3x + 2$, $x \in \mathbb{R}$, è

1. $f^{-1}(x) = \dfrac{3+\sqrt{1+4y}}{2}$, $x > -1/4$
2. $f^{-1}(x) = \dfrac{3+\sqrt{1+4y}}{2}$
3. $f^{-1}(x) = \dfrac{1}{x^2-3x+2}$, $x \neq 1, 2$
4. $f^{-1}(x) = \dfrac{1}{x^2-3x+2}$
5. non esiste
6. nessuna delle precedenti.

. . . .

Q 3.27: L'inversa di $f(x) = x^2 - 3x + 2$, $x \geq 3/2$, è

1. $f^{-1}(x) = \dfrac{3+\sqrt{1+4y}}{2}$, $x \geq -1/4$
2. $f^{-1}(x) = \dfrac{3+\sqrt{1+4y}}{2}$, $x > -1/4$
3. $f^{-1}(x) = \dfrac{3+\sqrt{1+4y}}{2}$
4. $f^{-1}(x) = \dfrac{1}{x^2-3x+2}$, $x \neq 1, 2$
5. $f^{-1}(x) = \dfrac{1}{x^2-3x+2}$, $1 < x < 2$
6. non esiste
7. nessuna delle precedenti.

. . . .

Q 3.28: L'equazione del grafico della funzione $f(x) = x^2 + 3x$ ingrandito 4 volte attorno a $(1, 4)$ è

1. $x^2/4 + 5x$, $x \in \mathbb{R}$
2. $x^2/4 + 3x$, $x \in \mathbb{R}$
3. $x^2/16 + 5x$, $x \in \mathbb{R}$
4. $16x^2 + 5x$, $x \in \mathbb{R}$
5. nessuna delle precedenti

. . . .

Q 3.29: L'equazione del grafico della funzione $f(x) = x^2 + 3x$ ingrandito 4 volte attorno a $(1, 4)$ è

1. $x^2/4 + 5x$, $x \in \mathbb{R}$
2. $x^2/4 + 3x$, $x \in \mathbb{R}$
3. $x^2/16 + 5x$, $x \in \mathbb{R}$
4. $16x^2 + 5x$, $x \in \mathbb{R}$
5. nessuna delle precedenti

. . . .

Q 3.30: L'equazione del grafico della funzione $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$, $x \neq -d/c$, ingrandito 7 volte attorno a $(0,0)$ è

1. $\dfrac{(ad-bc)x}{d^2+cdx/7}$, $x \neq -7d/c$
2. $\dfrac{ax/7+c}{cx/7+d}$, $x \neq -7d/c$
3. $\dfrac{7ax+c}{7cx+d}$, $x \neq -d/7c$
4. $7\dfrac{ax/7+b}{cx/7+d}$, $x \neq -7d/c$
5. nessuna delle precedenti

5. Esercizi sulle funzioni continue e sui limiti

5.1 ¶. Dire se le seguenti funzioni sono continue nel loro campo di definizione

$$|2x+1|, \qquad \frac{|x-1|}{|x+1|}, \qquad \frac{|x-1|}{|x+3|},$$
$$2x^2-9, \qquad 2x^2-3(9-x), \qquad \frac{6}{2x-1}-\frac{5}{x-2},$$
$$|\sqrt{x}-x|, \qquad \sqrt[3]{x+8}>1, \qquad \sqrt{x(x^2-1)}.$$

5.2 ¶. Sia $f:[0,1]\to[0,1]$ una funzione continua. Mostrare che esiste almeno un punto x_0 tale che $f(x_0)=x_0$. [*Sugg.* Considerare $f(x)-x$.]

5.3 ¶. Dire se è vera o falsa la seguente affermazione: sia $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una funzione continua con $f(x)\neq 4$ per ogni $x\in[a,b]$ e $f(a)=2$. Allora $f(b)<4$.

5.4 ¶. Siano f,g due funzioni definite e continue su $\mathbb{R}$. Dimostrare che, se $f(x)\neq g(x)$ $\forall x$ e $f(0)>g(0)$, allora $f(x)>g(x)$ per ogni $x\in\mathbb{R}$.

5.5 ¶. Mostrare che ogni polinomio di grado dispari ha almeno una radice.

5.6 ¶. Sia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continua e $P(x)$ un polinomio non nullo. Se $P(f(x))=0$ per ogni x, allora f è costante. [*Sugg.* Ricordarsi che un polinomio non nullo ha solo un numero finito di zeri.]

GROUP 4: [`Funzioni continue`]
Importance: [1:-3:-3]

. . . .

Q 4.1: La proposizione "se $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ è una funzione continua con $f(x) \neq 4$ $\forall x \in [0,4]$ e $f(0) = 2$, allora $f(1) < 4$"

1. è vera
2. è falsa
3. è vera se si mettono ulteriori ipotesi
4. nessuna delle precedenti

. . . .

Q 4.2: Sia $f : [a,b] \to [a,b]$ una funzione continua.

1. esiste un punto x in cui $f(x) = x$
2. esiste al piu' un punto in cui $f(x) = x$
3. esiste uno ed un solo punto in cui $f(x) = x$
4. $f(x) \neq x$ per ogni $x \in]0,1[$
5. nessuna delle precedenti

. . . .

Q 4.3: Sia $f : [a,b] \to [a,b]$. Perche' esista almento un punto $x \in [a,b]$ tale che $f(x) = x$ è sufficiente che

1. f è surgettiva
2. f è continua
3. f è iniettiva
4. nessuna delle precedenti
5. f è crescente

. . . .

Q 4.4: Un polinomio $P(x)$ si annulla in almeno un punto se

1. tutte le sue radici sono positive
2. ha grado pari
3. ha grado dispari
4. va all'infinito
5. nessuna delle precendenti

. . . .

Q 4.5: Un polinomio $P(x)$ si annulla in solo punto se

1. tutte le sue radici sono positive
2. ha grado uno
3. ha grado dispari
4. va all'infinito
5. nessuna delle precendenti

. . . .

Q 4.6: Siano date due funzioni $f, g : [0,1] \to [0,1]$ con $f(0) = g(1) = 0$, $f(1) = g(0) = 1$. Affinche' esista $x \in [0,1]$ tale che $f(x) = g(x)$ è sufficiente che

1. f, g sono continue in $[0,1]$
2. f crescente e g decrescente
3. $f - g$ decrescente
4. f e g iniettive
5. f e g surgettive
6. nessuna delle precedenti

. . . .

Q 4.7: La funzione

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{se } x \leq 1 \\ 3(ax + 1) & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

è continua in $x = 1$ quando

1. $a > -1/3$
2. $a = -1/3$
3. $a = 1/3$
4. $a \leq 0$