EQUAZIONI della FISICA MATEMATICA

DISPENSE di FASANO

$U \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto

Una EQUAZIONE alle DERIVATE PARZIALI è della forma

$$F(D^k u, D^{k-1} u, \dots, u, x) = 0$$

$$F: \mathbb{R}^{n^k} \times \mathbb{R}^{n^{k-1}} \times \dots \times \mathbb{R} \times U \longrightarrow \mathbb{R}$$

$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ MULTIINDICE se $\alpha_i \geq 0$ INTERI

$|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$ ORDINE DEL MULTIINDICE

$D^\alpha u := \partial_{x_1}^{\alpha_1} u \, \partial_{x_2}^{\alpha_2} u \dots \partial_{x_n}^{\alpha_n} u$

$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}$

$D^k u = \{ D^\alpha u \mid |\alpha| = k \}$

$\uparrow$

insieme di tutte le derivate di ordine k

$D^1 u = \{ \partial_{x_1} u, \, \partial_{x_2} u, \, \partial_{x_3} u \}$

$D^2 u = \{ \partial^2_{x_1 x_1} u, \, \partial^2_{x_1 x_2} u, \, \partial^2_{x_2 x_2} u, \, \partial^2_{x_1 x_3} u, \dots \}$

$\underbrace{\partial \dots \partial}_{k \text{ volte}} u \quad \Rightarrow$ ho n^k derivate parziali (se non si considera il Teorema di SCHWARZ)

Se $u \in C^k(U)$

$\#\{ \alpha \mid |\alpha| = k \} \longrightarrow \#$ di multiindici di ordine k

$\#\{ \alpha \mid \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = k \}$

Prendiamo k oggetti

$$\underbrace{\circ \quad \circ | \circ \quad \circ \quad | \cdot | \; - \; | \circ}_{k}$$

$|$ $\rightarrow$ una divisione

$n-1$ divisioni

le $n-1$ divisioni separano i k elementi in n gruppi

○ ○ || ○ ○ | ○ | ○ ○

$K = 7$

$n = 5$

$2 + 0 + 2 + 1 + 2 = 7$

$$\#\{\alpha \mid \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = K\} = \binom{K+n-1}{K} = \frac{(K+n-1)!}{K!\,(n-1)!}$$

me da tutte le permutazioni di tutti gli oggetti (comprese le stecche)

EQ. LINEARI

$$\sum_{|\alpha| \le K} \underbrace{a_\alpha(x)}_{\text{funzione della } x} D^\alpha u = f(x)$$

Se manca $f(x)$ => si dicono OMOGENEE

SEMI-LINEARI

$$\sum_{|\alpha| = K} a_\alpha(x) D^\alpha u + a_0 (D^{K-1} u, D^{K-2} u, \dots, u, x) = 0$$

QUASI-LINEARI

$$\sum_{|\alpha| = K} a_\alpha (D^{K-1} u, \dots, u, x) D^\alpha u + a_0 (D^{K-1} u, \dots, u, x) = 0$$

Particolarmente importante sono le eq. del secondo ordine

$$\sum_{|\alpha| = 2} a_\alpha(\dots) D^\alpha u = \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}(\dots) \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} u$$

sarà una matrice simmetrica

b_{ij} saranno i coefficienti

La classificazione si basa sul Det della matrice

$$\mathrm{Det}(b_{ij}) \begin{cases} > 0 \Rightarrow \text{ELLITTICA} \\ < 0 \Rightarrow \text{IPERBOLICA} \\ = 0 \Rightarrow \text{PARABOLICA} \end{cases}$$

Es.

ELLITTICA

$= \nabla^2 =$ quadrato del gradiente

$\Delta u = 0 \rightarrow$ EQ. DI LAPLACE

IPERBOLICA

$\frac{1}{v^2}\partial_t^2 u - \Delta_x u = 0 \rightarrow$ EQ. DELLE ONDE

(EQ. D'ALEMBERT)

PARABOLICA

$\partial_t u - \alpha \Delta_x u = 0 \rightarrow$ EQ. DEL CALORE

PRINCIPI VARIAZIONALI

$\delta S = 0$

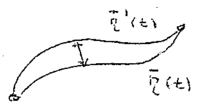
$\uparrow$

VARIAZIONE A ESTREMI FISSI

$$S[\eta] = \int_{t_0}^{t_1} L(\dot{\eta}^\alpha, \eta^\alpha, t)\, dt$$

$\exists$ PUNTI STAZIONARI $\{\eta^\alpha\} : I \overset{[t_0,t_1]}{\equiv} \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}^\alpha} + \frac{\partial L}{\partial \eta^\alpha} = 0 \longrightarrow \text{EQ. DI EULERO-LAGRANGE}$$



$\eta'(t_1) = \eta(t_1)$

$\eta'(t_0) = \eta(t_0)$

$\delta \eta(t) = \eta'(t) - \eta(t)$ $\qquad \delta \dot{\eta}(t) := \dot{\eta}'(t) - \dot{\eta}(t) = \frac{d}{dt}\delta \eta$

$$\delta S = \int \{ L(\dot{\eta}', \eta', t) - L(\dot{\eta}, \eta, t) \}\, dt$$

$$= \int \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}} \delta \dot{\eta} + \frac{\partial L}{\partial \eta} \delta \eta \right) dt$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \frac{d}{dt} \delta q = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q \right) - \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \delta q$$

$$\delta S = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q \Big|_{t_0}^{t_1} + \int \underbrace{\left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right)}_{g(t)} \delta q \, dt$$

L'unico modo affinché l'integrale faccia 0 è che $g(t) = 0$

le eq. di Eulero Lagrange seguono da un principio variazionale

$$S[u] = \int_{\bar{U}} \mathcal{L}(Du, u, x)\, dx$$

$$u : \underbrace{\bar{U}}_{\subset \mathbb{R}^n} \longrightarrow \mathbb{R}$$

Impongo $\delta u \big|_{\partial U} = 0$, cioè la variazione di u è uguale a 0 sul bordo di U

Otteniamo

$$-\partial_{x_i} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_{x_i} u)} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} = 0$$

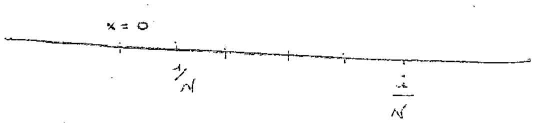
$$S[u] = \int dt \underbrace{\int d^3x \, \mathcal{L}(Du, \overset{\partial_t u,}{\nabla u}, x, t)}_{L} \qquad (*)$$

$$u : \bar{U} \times I \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x, t) \longmapsto u(x,t) \qquad \bar{U} \subseteq \mathbb{R} \text{ (per semplicità)}$$

$$L = \sum_i \frac{1}{N} \mathcal{L}\left(N(u_{i+1} - u_i), u_i, \partial_t u_i, \frac{i}{N}, t \right) \qquad \text{con} \quad u_i = u\left(\frac{i}{N}\right)$$

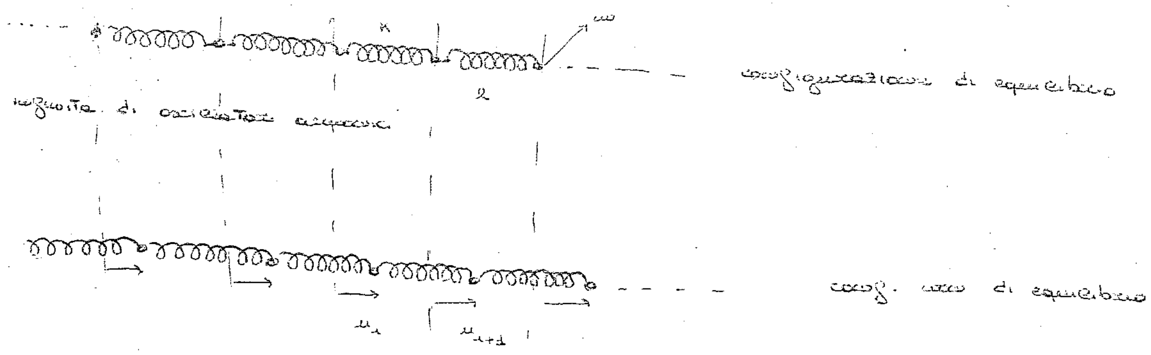
approssimo l'integrale con una sommatoria

$$u_i : I \longrightarrow \mathbb{R}$$



$$\int dx \xleftarrow{\text{corrisponde}} \sum_i \frac{1}{N}$$

Sostituendo L in (*) ⇒ ottengo un principio variazionale



$$L = \sum_i \left\{ \underbrace{\frac{1}{2} m \dot{u}_i^2}_{T_i} - \underbrace{\frac{1}{2} k \left(u_{i+1} - u_i + l \right)^2}_{V_i} \right\}$$

$$\rho = \frac{m}{l}$$

$T = k l$ → TENSIONE

$$S = \frac{1}{l} \int L \, dt = \int dt \sum_i \frac{1}{l} \left\{ \frac{1}{2} m \dot{u}_i^2 - \frac{k}{2} \left(u_{i+1} - u_i + l \right)^2 \right\}$$

$$\frac{u_{i+1} - u_i}{l} = Du$$

$$u_i = u\left(\frac{x}{l}\right)$$

$$S = \int dt \int \frac{dx}{l^2} \left\{ \frac{1}{2} m \, \partial_t u^2 - \frac{k l^2}{2} \left(\partial_x u + 1 \right)^2 \right\}$$

$$S = \frac{1}{2l} \int dx \, dt \left\{ \underbrace{\rho \left(\partial_t u \right)^2 - T \left(\partial_x u + 1 \right)^2}_{\mathcal{L}} \right\}$$

EQ. EULERO-LAGRANGE

$$-\partial_t \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_t u)} - \partial_x \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_x u)} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} = 0$$

$$-2\rho \, \partial_t \partial_t u + 2T \partial_x \left(\partial_x u + 1 \right) = 0$$

$$-\partial_t^2 u + \frac{T}{\rho} \partial_x^2 u = 0$$

Ponendo $v = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$

$$-\frac{1}{v^2}\,\partial_t^2 u + \partial_x^2 u = 0$$

EQ. DI MAXWELL:

$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 4\pi\rho \longrightarrow$ COULOMB / GAUSS

$\vec{\nabla}\times\vec{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{E} = \frac{4\pi}{c}\vec{J} \longrightarrow$ AMPERE / MAXWELL

$\vec{\nabla}\times\vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = 0 \longrightarrow$ FARADAY

$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \longrightarrow$ ASSENZA DI MONOPOLI MAGNETICI

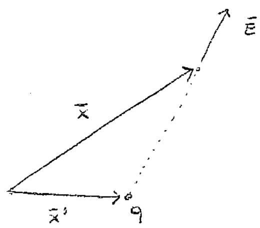
$\cancel{\vec{F}}$

$$\vec{F} = q_{TEST}\,\vec{E}$$

LEGGE DI COULOMB

$$\vec{E}(\vec{x}) = \frac{q}{|\vec{x}-\vec{x}'|^3}(\vec{x}-\vec{x}')$$

$$= \frac{q}{|\vec{x}-\vec{x}'|^2}\,\underbrace{\frac{\vec{x}-\vec{x}'}{|\vec{x}-\vec{x}'|}}_{\text{versore}}$$



$$\int_S \vec{E}\cdot\vec{n}\,dS = \int q\,d\Omega = 4\pi q = 4\pi\int_D \rho\,dV \qquad \text{dove } S = \partial D$$

se q è dentro S

$\vec{n}$ = normale

$$= \int \frac{q}{r^2}\,\underbrace{\underbrace{\hat{r}\cdot\vec{n}}_{\cos\theta}\,dS}_{dA}$$

$$\int_D (\nabla\cdot E - 4\pi\rho)\,dV = 0 \qquad \forall D$$

$\Rightarrow$ vale la prima equazione

Nel caso dell' ELETTROSTATICA

$$\frac{\partial \bar{B}}{\partial t} = \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} = 0$$

$$\Rightarrow \bar{\nabla} \times \bar{E} = 0$$

$$\Rightarrow \bar{E} = -\bar{\nabla} V$$

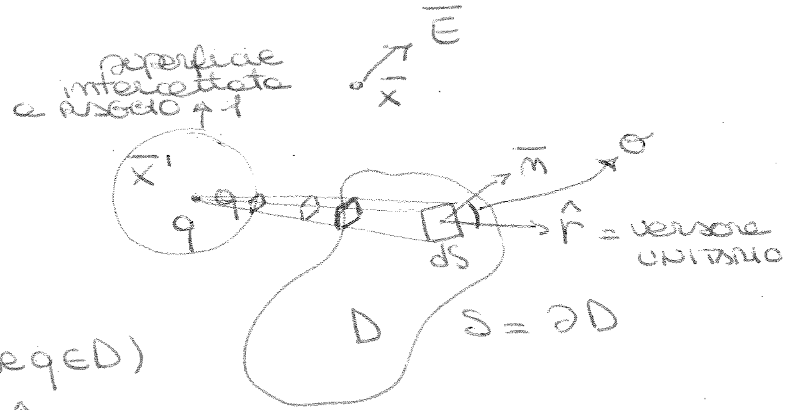
Sostituendo nella prima eq:

$$\bar{\nabla} \cdot \nabla V = -4\pi \rho$$

$\Delta V = -4\pi\rho \rightarrow$ EQ. DI POISSON

EQUAZIONI di MAXWELL

$$\begin{cases} 1)\ \bar{\nabla} \cdot \bar{E} = 4\pi\rho & \longrightarrow \text{COULOMB} \\ 2)\ \bar{\nabla} \times \bar{B} - \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \bar{E}}{\partial t} = \dfrac{4\pi}{c}\bar{J} & \longrightarrow \text{AMPERE (A/MAXWELL)} \\ 3)\ \bar{\nabla} \times \bar{E} + \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \bar{B}}{\partial t} = 0 & \longrightarrow \text{FARADAY} \\ 4)\ \bar{\nabla} \cdot \bar{B} = 0 & \longrightarrow \text{NO MONOPOLI MAGNETICI} \end{cases}$$



COULOMB:

$$\bar{F} = q_{est}\,\bar{E}$$

$$\bar{E}(\bar{x}) = \frac{q}{|\bar{x}-\bar{x}'|^3}(\bar{x}-\bar{x}')$$

$$\int \bar{E} \cdot \overbrace{d\bar{S}}^{\bar{n}\,dS} = \int \frac{q}{r^2} \underbrace{\overbrace{\hat{r}\cdot\hat{n}}^{\cos\theta}\,dS}_{\text{AREA proiettata}} \overset{(\text{se } q \in D)}{=} 4\pi q \quad (= 0 \text{ se } q \notin D)$$

$\hat{r}\cdot\hat{n}$ può essere positivo o negativo (quindi l'AREA è un' AREA ORIENTATA)

$$\bar{E}(\bar{x}) = \int \rho(\bar{x}') \frac{\bar{x}-\bar{x}'}{|\bar{x}-\bar{x}'|^3}\, d^3x'$$

$$\int_S \bar{E}\cdot d\bar{S} = 4\pi \int_D \rho\, dV$$
$$\parallel$$
$$\int_D \bar{\nabla}\cdot\bar{E}\, dV$$

Quindi

$$\int_D (\bar{\nabla}\cdot\bar{E} - 4\pi\rho)\, dV = 0 \qquad \forall \text{ DOMINIO } D$$

$$\Rightarrow \bar{\nabla}\cdot\bar{E} - 4\pi\rho = 0 \Rightarrow \underline{\bar{\nabla}\cdot\bar{E} = 4\pi\rho}$$

$$\frac{\partial\bar{E}}{\partial t} = \frac{\partial\bar{B}}{\partial t} = 0$$

$$\bar{\nabla}\times\bar{E} = 0 \nearrow \oint_\gamma \bar{E}\cdot d\bar{l} = 0$$ (la circuitazione non dipende dal percorso per le teo di STOKES)

$$\Downarrow$$

$$\bar{E} = -\nabla V \qquad V(P) = -\int_{\gamma: O \to P} \bar{E}\cdot d\bar{l}$$

$\Delta V = -4\pi\rho \longrightarrow$ EQ. DI POISSON (la ottengo sostituendo nella 1))

$$V(\bar{x}) = \frac{q}{|\bar{x}-\bar{x}'|} \longrightarrow \text{potenziale di 1 carica singola}$$

$$-\bar{\nabla}V = \bar{E}$$

$$\nabla r = \nabla\sqrt{x^2+y^2+z^2} = \frac{\partial}{\partial x}\sqrt{\ldots}\,\bar{i} + \frac{\partial}{\partial y}\sqrt{\ldots}\,\bar{j} + \frac{\partial}{\partial z}\sqrt{\ldots}\,\bar{k} =$$

$$= \frac{x}{\sqrt{\ldots}}\bar{i} + \frac{y}{\sqrt{\ldots}}\bar{j} + \frac{z}{\sqrt{\ldots}}\bar{k} =$$

$$= \frac{1}{r}(x\bar{i}+y\bar{j}+z\bar{k}) = \frac{\bar{r}}{r} = \hat{r} \Longrightarrow \boxed{\nabla r = \hat{r}}$$

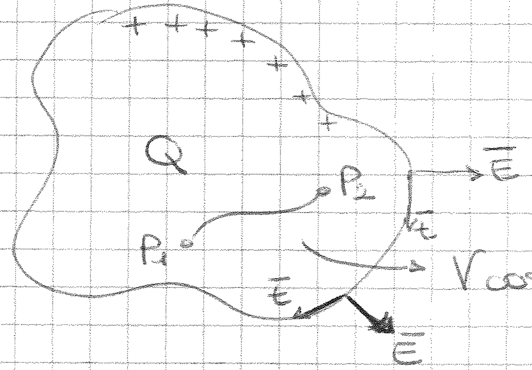
$$\overline{E} = -\nabla V = -\left(-\frac{1}{r^2}\, q \, \hat{r}\right) = \frac{q}{r^2}\,\hat{r}$$

Per la SOVRAPPOSIZIONE, il POTENZIALE di una DISTRIBUZIONE di CARICHE è:

$$V(\overline{x}) = \int \frac{\rho(\overline{x}')}{|\overline{x} - \overline{x}'|}\, d^3x'$$ → potenziale che soddisfa l'EQ. DI POISSON

$$\Delta V = -4\pi\rho$$

Se ho un CONDUTTORE, nel caso STATICO, dentro al CONDUTTORE non ho CARICA, la CARICA si distribuisce sul bordo del CONDUTTORE.
Il CAMPO ELETTRICO mi farebbe muovere le CARICHE, per questo il CAMPO ELETTRICO nel conduttore è NULLO.



$$\overline{E} = -\nabla V$$

$$\int_{P_1}^{P_2} \overline{E} \cdot d\overline{l} = V(P_1) - V(P_2)$$

V è costante su TUTTO il conduttore e quindi anche sul bordo del CONDUTTORE

$\vec{\nabla}_t V = 0$ ($\vec{t}$ vettore tangente al bordo)

$-\vec{t} \cdot \overline{E} = 0$ → cioè $\overline{E}$ deve essere NORMALE alla superficie del CONDUTTORE.

$(\vec{t} \perp \bar{E})$

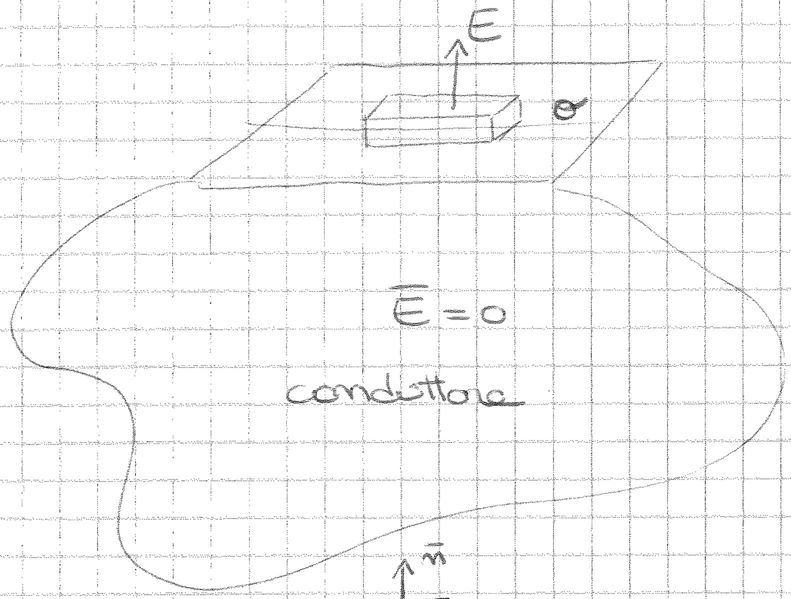
$$\int_{S=\partial D} \bar{E} \cdot dS = 4\pi \int_{D} \rho \, dx$$

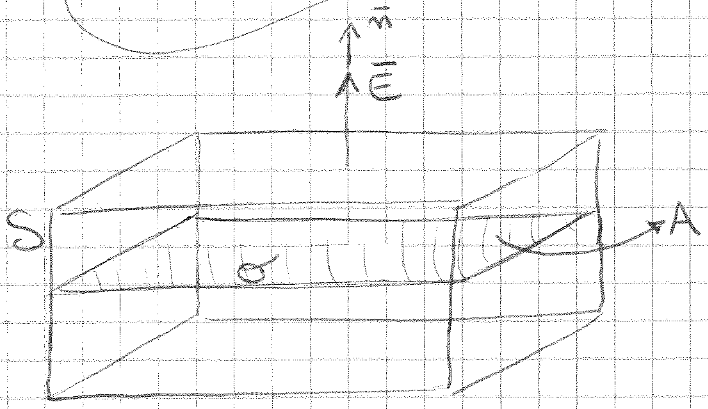
ρ = carica elettrica per unità di volume

$\downarrow$

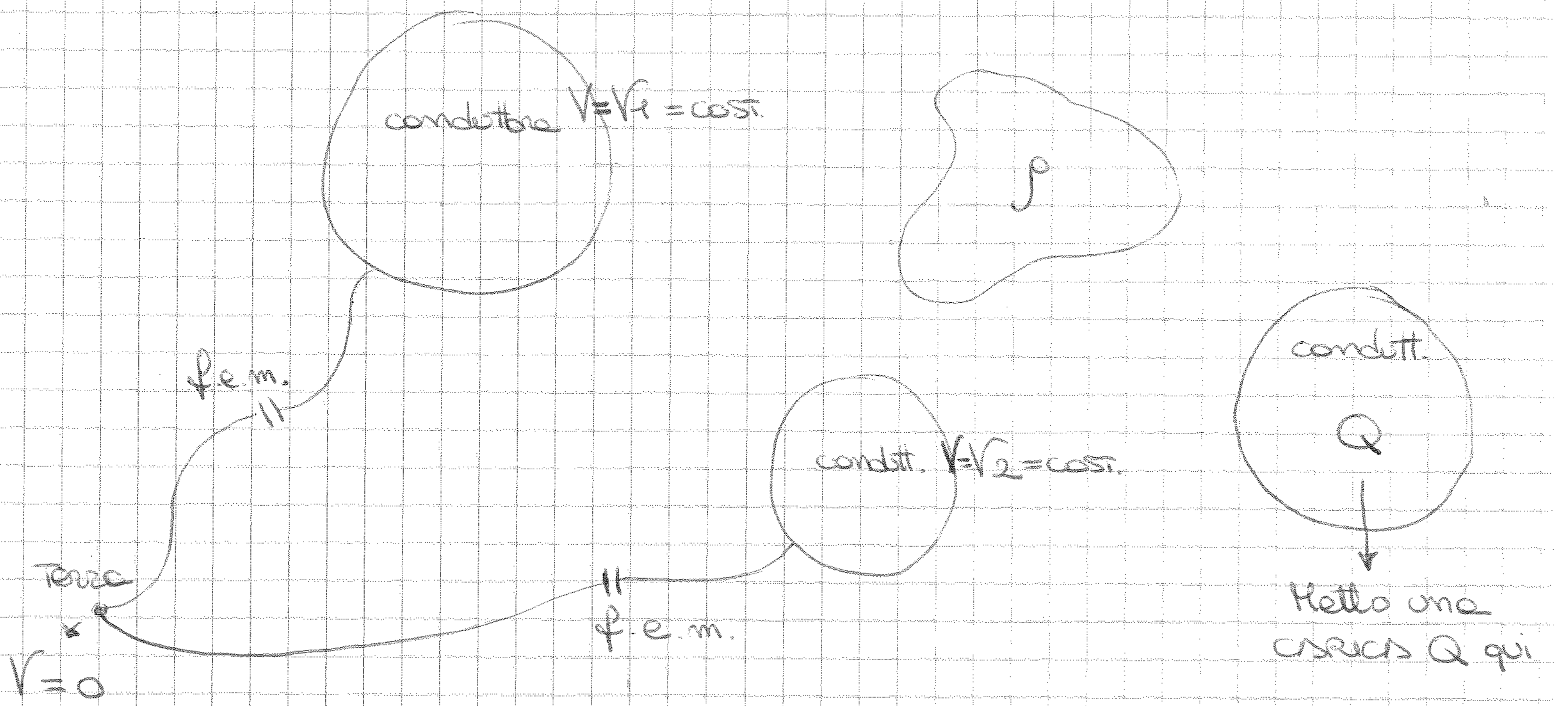
FORMA INTEGRALE

σ = densità di carica superficiale





$$E \cancel{A} = 4\pi \underbrace{\sigma \cancel{A}}_{\text{carica dentro la scatoletta}} \Rightarrow E = 4\pi\sigma$$



Tengo i 2 conduttori a 2 potenziali DIVERSI (fissati dalla forza elettromotrice)

$\Delta V = -4\pi\rho$

Sarà sensato chiedere che $V \longrightarrow 0$ per $|x| \longrightarrow \infty$

$$\int_S \bar{E} \cdot \underbrace{d\bar{S}}_{\bar{n}\cdot dS} = 4\pi Q$$

$$-\int_S \underbrace{\nabla_{\bar{n}} V}\, dS = 4\pi Q \longrightarrow \text{condizioni sulle DERIVATE NORMALI}$$

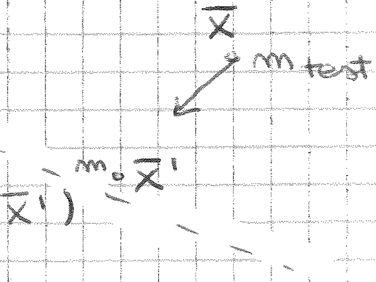
GRADIENTE di V rispetto alla direzione NORMALE $\vec{n}$

$$\nabla_{\bar{n}} V(\bar{x}) = \frac{d}{ds} V(\bar{x} + s\bar{n}) \Big|_{s=0} \longrightarrow$$ (quanto varia il POTENZIALE quando mi allontano in modo PERPENDICOLARE)

OSS: Se non avessi UNICITÀ per le SOLUZIONI delle EQ. di MAXWELL $\Rightarrow$ le EQ. di MAXWELL non sarebbero VERE.

Analogia tra Poisson per l'elettrostatica e la gravità newtoniana

$$\overline{F} = m_{test}\, \overline{g}$$



$$\overline{g}(\overline{x}) = \underbrace{-\frac{Gm}{|\overline{x}-\overline{x}'|^3}}_{\text{era } q} (\overline{x}-\overline{x}')$$

$\overline{\nabla} \cdot E = 4\pi\rho$ (ρ di carica)

$\overline{\nabla} \cdot \overline{g} = -G4\pi\rho$ (ρ di massa)

$\overline{g} = -\nabla V$ con V potenziale gravitazionale

$\Delta V = 4\pi G \rho$

Nella meccanica newtoniana le onde gravitazionali non ci sono (perché Δ è un laplaciano e non un d'Alembertiano)

$$V(\overline{x}) = \int \frac{\rho(\overline{x}')}{|\overline{x}-\overline{x}'|}\, dx'$$

Appena sposto la massa il campo gravitazionale all'∞ ne risente, mentre il campo elettrico no.

---

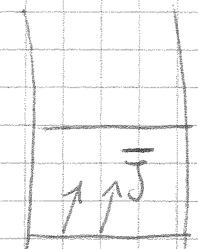
2)

$$\overline{x} \quad \overline{B}(\overline{x}) = \frac{I}{c}\, d\overline{l} \times \frac{(\overline{x}-\overline{x}')}{(\overline{x}-\overline{x}')^3}$$

Legge di Biot-Savart

Su un dipolo magnetico agisce un momento meccanico:

$\overline{M} = \overline{\mu} \times \overline{B}$ ($\overline{\mu}$ = momento)



$S \to$ sezione del filo dove ho densità di corrente $\bar J$

$$I = \int_S \bar J \cdot d\bar S$$

$$\bar B(\bar x) = \frac{1}{c}\int \bar J(\bar x') \times \underbrace{\frac{(\bar x - \bar x')}{|\bar x - \bar x'|^3}}_{= -\bar\nabla \frac{1}{|\bar x - \bar x'|}} \underbrace{d^3x'}_{\text{elemento di volume}} =$$

$(dl \cdot d\bar S = dV)$

$$= -\frac{1}{c}\,\bar\nabla \times \int \frac{\bar J(\bar x')}{|\bar x - \bar x'|}\, d^3x'$$

VETTORE COSTANTE

$$\bar\nabla \times (f\bar A) = \bar A \times \bar\nabla f$$

$\Rightarrow$ facendo la DIVERGENZA, cioè $\bar\nabla \cdot$ ROTORE $= 0$

$\Rightarrow \boxed{\bar\nabla \cdot \bar B = 0}$ (cioè la 4)

$$\bar\nabla \times \bar\nabla \times \bar A = \bar\nabla \cdot (\bar\nabla \cdot \bar A) - \Delta \bar A$$

per ogni componente prendo il laplaciano, ottenendo 1 nuovo VETTORE

$$\bar\nabla \times \bar B = -\frac{1}{c}\bar\nabla \int \bar\nabla \cdot \frac{\bar J(\bar x')}{|\bar x - \bar x'|}\, d^3x' + \underbrace{\frac{1}{c}\Delta \int \frac{\bar J(\bar x')}{|\bar x - \bar x'|}\, d^3x'}_{(*)\ = -4\pi \bar J}$$

Studiando (*) termine a termine:

$$\Delta V = -4\pi J_1$$

$$V(\bar x) = \int \frac{J_1(\bar x')}{|\bar x - \bar x'|}\, d^3x'$$

$$\overline{\nabla}\cdot\left(\frac{\overline{J}}{|\overline{x}-\overline{x}'|}\right) = -\overline{J}(\overline{x}')\cdot\overline{\nabla}'\frac{1}{|\overline{x}-\overline{x}'|} =$$

(sto derivando risp. a $\overline{x}'$)

J lo sto prendendo in una regione limitata

$$= -\overline{\nabla}'\cdot\underbrace{\left(\frac{\overline{J}(\overline{x}')}{|\overline{x}-\overline{x}'|}\right)} + \frac{\overline{\nabla}'\cdot\overline{J}}{|\overline{x}-\overline{x}'|}$$

questo termine va a zero (perché J è nullo)

$$\overline{\nabla}\times\overline{B} = -\frac{4\pi}{c}\overline{J} - \frac{1}{c}\overline{\nabla}\int\frac{\overline{\nabla}'\cdot\overline{J}(\overline{x}')}{|\overline{x}-\overline{x}'|}d^3x'$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \overline{\nabla}\cdot\overline{J} = 0$$

$$Q = \int_D \rho \, dV$$

$$-\int\overline{\nabla}\cdot\overline{J}\,dV = -\int_{S=\partial D}\overline{J}\cdot d\overline{S} = \frac{dQ}{dt} = \int_D\frac{\partial\rho}{\partial t}dV$$

Tutta la carica si conserva

$$\Rightarrow \int_D\left(\frac{\partial\rho}{\partial t} + \overline{\nabla}\cdot\overline{J}\right)dV = 0$$

D è arbitrario $\Rightarrow \underline{\frac{\partial\rho}{\partial t} + \overline{\nabla}\cdot\overline{J} = 0} \rightarrow$ equazione di continuità

(conservazione della carica elettrica)

$$-\frac{1}{c}\nabla\int\frac{\frac{\partial\rho}{\partial t}(\overline{x}')}{|\overline{x}-\overline{x}'|}d^3x' = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\underbrace{\nabla\int\frac{\rho(\overline{x}')}{|\overline{x}-\overline{x}'|}d^3x'}_{=-\overline{E}} = \frac{1}{c}\frac{\partial\overline{E}}{\partial t}$$

$\Rightarrow$ ottengo la 2) cioè è EQ. DI AMPERE:

$$\boxed{\bar{\nabla} \times \bar{B} = \frac{1}{c}\frac{\partial \bar{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\bar{J}}$$

$$-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\overbrace{\bar{\nabla}\cdot\bar{E}}^{4\pi\rho} = \frac{4\pi}{c}\bar{\nabla}\cdot\bar{J}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \bar{\nabla}\cdot\bar{J} = 0$$ $\longrightarrow$ EQ. DI continuità per la CARICA ELETTRICA (deriva da 1) e 2))

OSS:

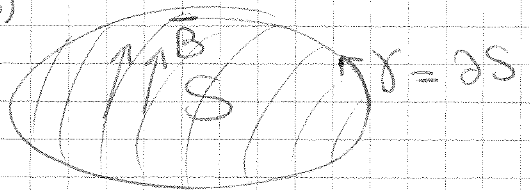
$-\frac{1}{c}\frac{\partial \bar{E}}{\partial t}$ $\longrightarrow$ termine di Maxwell (nell'EQ. DI AMPERE) che serve per la conservazione della carica

$\downarrow$

Inizialmente non c'era q.st termine.

---

3)



$$\int_S \bar{\nabla}\times\bar{E}\cdot d\bar{S} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\overbrace{\int_S \bar{B}\cdot d\bar{S}}^{\Phi \text{ (FLUSSO)}}$$

$$\parallel$$

$$\int_\gamma \bar{E}\cdot d\bar{l}$$

$$\Rightarrow \boxed{\bar{\nabla}\times\bar{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \bar{B}}{\partial t} = 0}$$

ONDE ELETTROMAGNETICHE

$$\bar{\nabla} \times \bar{\nabla} \times \bar{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \bar{\nabla} \times \bar{B} = 0$$

$$\underbrace{\bar{\nabla} \cdot (\bar{\nabla} \cdot \bar{E})}_{=0} - \Delta \bar{E} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \bar{E} = 0$$ → EQ. delle ONDE elettromagnetiche

c = vel. della luce

⇒ Le onde elettromagnetiche si propagano nel VUOTO alla vel. della luce c.

Anche se faccio $\bar{\nabla} \times$ Ampere trovo onde che si propagano nel VUOTO alla vel. della luce c.

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \bar{E}}{\partial t^2} - \nabla^2 E = 0$$ → soddisfatta anche per il CAMPO ELETTROMAGNETICO

In generale l'EQ. d'ONDA per un CAMPO SCALARE COMPLESSO

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - c^2(x) \nabla^2 \psi = 0 \qquad (*)$$

$\psi = a\, e^{\frac{i}{\varepsilon} S}$ → APPROSSIMAZIONE per le PICCOLE OSCILLAZIONI

$\varepsilon \to 0$

(stiamo facendo un'APPROSSIM. per $\varepsilon \to 0$)

$c = \text{cost.}$

$\psi = a\, e^{i(\bar{k} \bar{x} - \omega t)}$

con $\bar{k}^2 c^2 = \omega^2$

$\omega = 2\pi \nu$ → PULSAZIONE

$|K| = \frac{2\pi}{\lambda}$, λ = lunghezza d'onda

$\varepsilon \to 0$ vuol dire che sto considerando il caso di ALTE FREQUENZE e PICCOLE LUNGHEZZE d'ONDA (sono equivalenti i 2 casi), quindi cresce ω e $|K|$

Derivando (*), sostituendo prima $\psi = a e^{\frac{i}{\varepsilon} S}$ in (*):

$$-\frac{1}{\varepsilon^2}\left\{(\partial_t S)^2 - c^2(x)(\overline{\nabla} S)^2\right\} + \frac{2i}{\varepsilon}\left\{\frac{\partial a}{\partial t}\frac{\partial S}{\partial t} - c^2(x)\overline{\nabla} a \cdot \overline{\nabla} S\right\} +$$

$$+ o\left(\tfrac{1}{\varepsilon}\right) = 0$$

Impongo $= 0$ le parentesi graffe affinché l'espressione sia $= 0$:

$(\partial_t S)^2 - c^2(x)(\overline{\nabla} S)^2 = 0 \longrightarrow$ EQUAZIONE ICONALE

$\frac{\partial a}{\partial t}\frac{\partial S}{\partial t} - c^2(x)\overline{\nabla} a \cdot \overline{\nabla} S = 0 \longrightarrow$ EQUAZIONE del TRASPORTO

Suppongo $\frac{\partial S}{\partial t} \neq 0$

Introduco il VETTORE $\vec{c}(x) = -\frac{c^2(x)\overline{\nabla} S}{\partial_t S}$

$(\vec{c}(x))^2 = c^2(x) \longrightarrow$ deriva dalla 1ª EQ. (EQ. ICONALE)

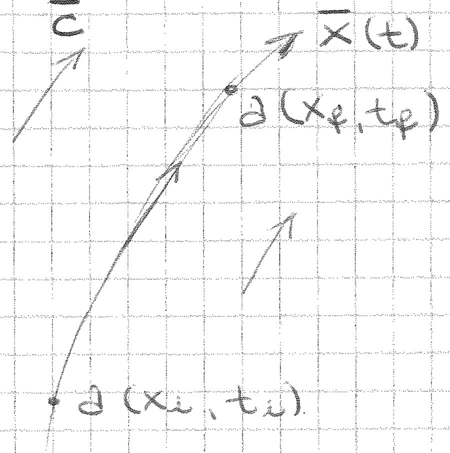
Infatti:

$$c^2 \cdot c^2 \left(\frac{\overline{\nabla} S}{\partial_t S}\right)^2 = 1 \cdot c^2$$

$$\Longrightarrow \left(\frac{c^2 \overline{\nabla} S}{\partial_t S}\right)^2 = c^2$$

La 2ª EQ. (eq. del TRASPORTO), dividendo per $\frac{\partial S}{\partial t}$:

$$\frac{\partial a}{\partial t} + \bar{c}(x) \cdot \bar{\nabla} a = 0$$



$t \longrightarrow \bar{x}(t)$

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = \bar{c}(\bar{x}(t))$$

$\bar{c}$ = CAMPO di VELOCITÀ

$\bar{x}(t)$ = CURVA INTEGRALE

$\bar{c}(\bar{x}(t))$ = tangente alla CURVA INTEGRALE

$$\frac{\partial}{\partial t} a(\bar{x}(t), t) + \underbrace{\bar{c}(\bar{x}(t))}_{\frac{d\bar{x}}{dt}} \cdot \bar{\nabla} a(\bar{x}(t), t) = 0$$

$$\frac{d}{dt} a(\bar{x}(t), t) = 0$$

La funzione a è COSTANTE sulle CURVE INTEGRALI, cioè $a(x_i, t_i) = a(x_f, t_f)$

L'EQ. ICONALE ci dice la DIREZIONE delle CURVE INTEGRALI (se l'eq. iconale è risolta)

Le CURVE INTEGRALI si chiamano CARATTERISTICHE.

La CARATTERISTICA è la DIREZIONE del RAGGIO DI LUCE (nell'analogo ELETTROMAGNETICO)

Le lunghezze d'onda devono essere PICCOLE: vanno quindi confrontate con altre lunghezze d'onda per capire se sono PICCOLE.

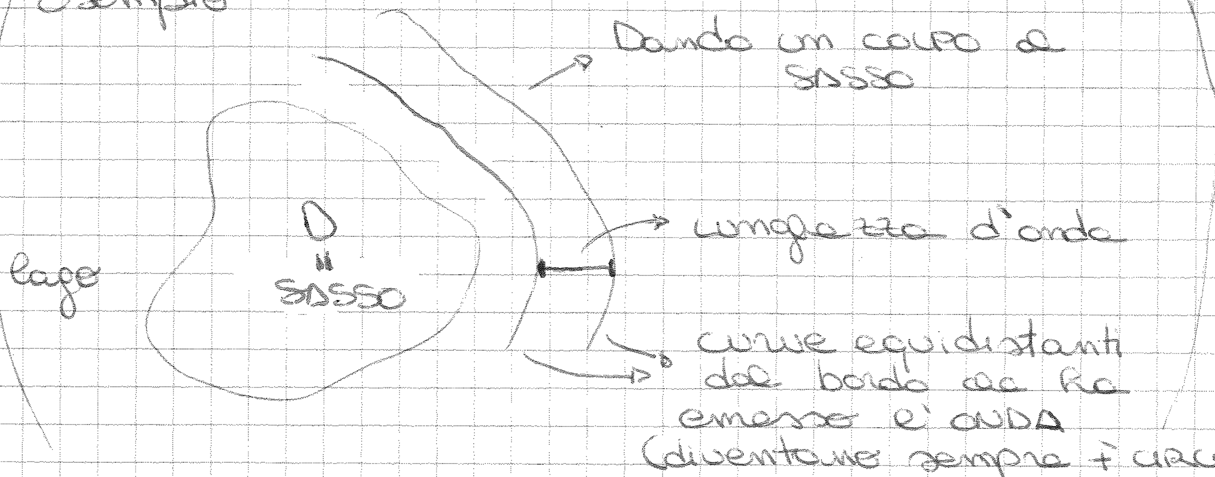
$$\lambda \simeq \left| \frac{S}{\nabla S} \right|$$ → lunghezza TIPICA con cui la FASE cambia in modo significativo

$$\ell \simeq \left| \frac{a}{\nabla a} \right|$$ → lunghezza TIPICA con cui l'AMPIEZZA cambia in modo significativo

$\frac{\lambda}{\ell} \ll 1$, cioè λ deve essere più PICCOLA di ℓ

Se questa DISUGUAGLIANZA non è verificata ⇒ il LIMITE dell'OTTICA GEOMETRICA fallisce

Esempio



Cerchiamo una soluzione del tipo

$$S(x,t) = \tilde{S}(x) - \omega t$$ → S è la FASE (separo i termini TEMPORALI e quelli SPAZIALI)

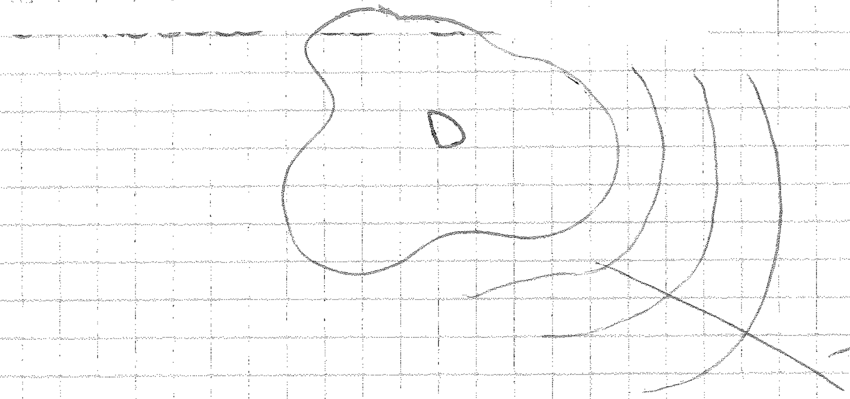
(soluzione con una frequenza fissata)

$$(\bar{\nabla} S)^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$$

suppongo $c = \text{cost.}$

$$\left(\bar{\nabla} \left(\frac{Sc}{\omega} \right) \right)^2 = 1$$

Una soluzione di qst EQ. è: $\frac{Sc}{\omega}$ = DISTANZA dal SASSO D



La CARATTERISTICHE sono curve ortogonali

$$\bar{b}(\bar{x}) \cdot \underbrace{Du}_{\downarrow} = c(\bar{x}, u) \quad (*)$$

GRADIENTE di u (u non dipende da t)

Consideriamo delle curve dette CARATTERISTICHE che soddisfano qst' equazione $(*)$:

$t \rightarrow \bar{x}(t)$

$\frac{d\bar{x}}{dt} = \bar{b}(\bar{x}(t))$

$*$

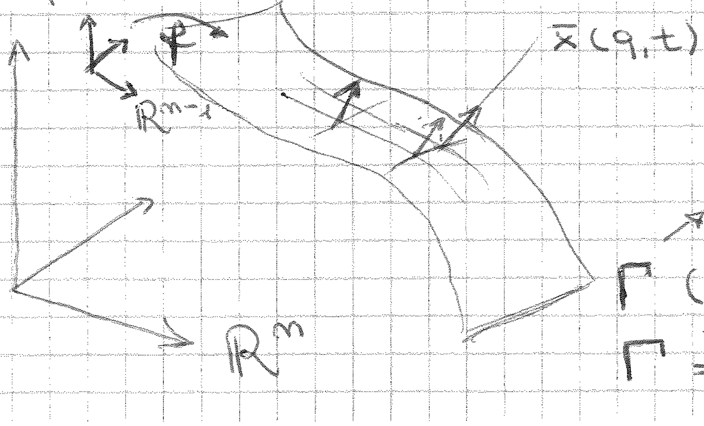
$z(t) = u(\bar{x}(t)) \longrightarrow$ In generale: $z(q,t) = u(\bar{x}(q,t))$

$\frac{d}{dt} z = c(\bar{x}(t), z) \rightarrow$ vera per ogni curva caratteristica

$U \subseteq \mathbb{R}^n$

$u : U \longrightarrow \mathbb{R}$ (vorrei che u fosse def così)

Devo imporre delle CONDIZIONI INIZIALI:



è l'aperto di un insieme $\mathbb{R}^{n-1}$

Γ (sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$)

$\Gamma = \varphi(V)$

$$f : V \longrightarrow \mathbb{R}^n \quad , \quad V \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$$
$$q \longmapsto f(q)$$

f parametrizza Γ

$u(f(q)) = g(q)$ → condizione INIZIALE

$\bar{x}(q,0) = \bar{f}(q)$

La condizione che richiediamo è:

$$\det\left(\frac{\partial \bar{f}}{\partial q_1}, \frac{\partial \bar{f}}{\partial q_2}, \dots, \frac{\partial \bar{f}}{\partial q_{n-1}}, \bar{b}(f(q))\right) \neq 0$$

$\bar{b}(f(q))$ → valore del campo su cui devo integrare la CARATTERISTICA

$\frac{\partial \bar{f}}{\partial q_1}, \frac{\partial \bar{f}}{\partial q_2}, \dots$ → VETTORI tangenti a Γ

Questa condizione significa che $\bar{b}(f(q))$ non sta nello span degli altri VETTORI, cioè non è tangente a $\frac{\partial \bar{f}}{\partial q_1}, \frac{\partial \bar{f}}{\partial q_2}, \dots$

$\bar{f}(q) = \bar{x}(q,0)$

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial q_i} = \frac{\partial \bar{x}}{\partial q_i}(q,0)$$

$$\bar{b}(\bar{f}(q)) = \frac{\partial \bar{x}}{\partial t}(q,0)$$

Se considero la funzione

$(q,t) \longrightarrow \bar{x}(q,t)$

il det JACOBIANO delle di questa APPLICAZIONE è $\neq 0$, cioè
$\det(J\bar{x}) \neq 0$ (nel punto $(q, 0)$)

Avendo lo JACOBIANO INVERTIBILE, si può invertire LOCALMENTE

OSS: i punti NON TANGENTI sono punti NON CARATTERISTICI, poiché " " alla CARATTERISTICA

Risolvendo il SISTEMA $\circledast$
$(q,t) \longrightarrow \bar{x}(q,t)$ è INVERTIBILE (nell'ipotesi di NON TANGENZA)
$z(q,t)$
$u(\bar{x}) = z(q(\bar{x}), t(\bar{x}))$

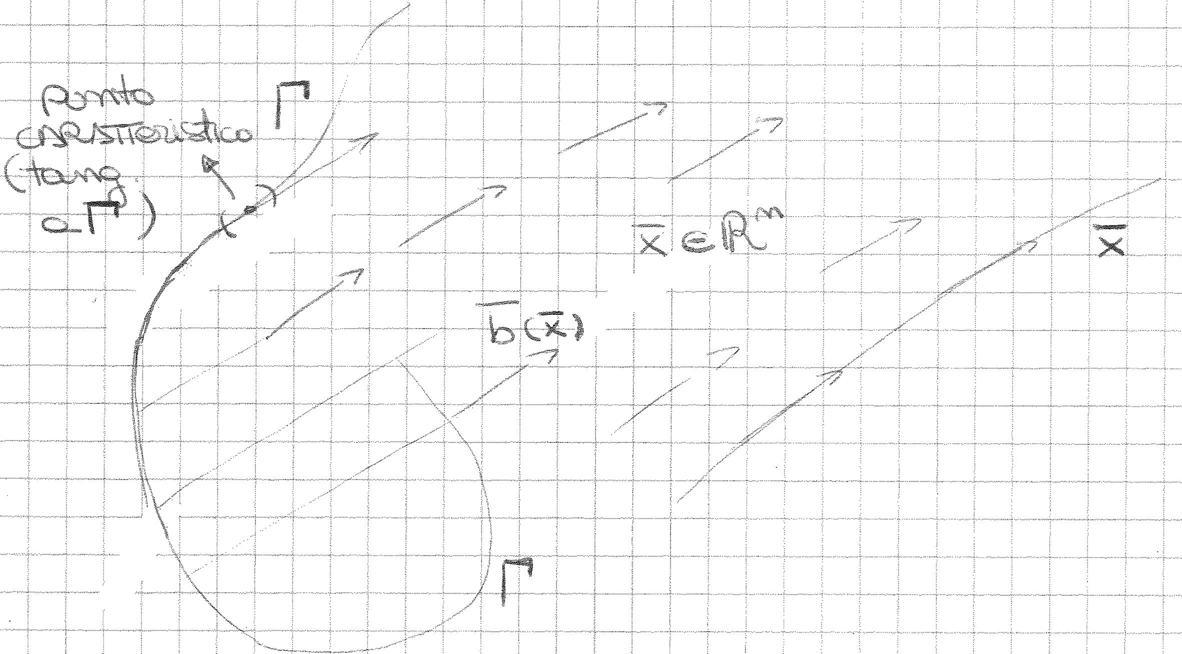
$$\frac{d\bar{x}}{dt} = \vec{f}(x) \quad (**) \quad (supponendo\ f \in C^1(\mathbb{R}^n))$$

- La soluzione $\bar{x}(t)$ $\exists$ se $\vec{f}$ è continua ed è UNICA se $\vec{f}$ è LIPSCHITZIANA
- Se $\bar{x} : [0, \omega_+) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ è soluzione MASSIMALE (cioè non può essere ulteriormente estesa), allora se $\overline{\operatorname{Im}\bar{x}}$ è COMPATTA, allora $\omega_+ = +\infty$

$(**)$ significa:

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} \bar{x} \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{b}(\bar{x}, z) \\ c(\bar{x}, z) \end{pmatrix}$$

(intende $\bar{x}$ come $\bar{x}$ e la componente z)



Se 2 CURVE INTEGRALI si intersecano, significa che la soluzione non è UNICA : questo è IMPOSSIBILE se $\bar{b}(\bar{x})$ è LIPSCHITZ.

$\Rightarrow$ le CURVE INTEGRALI non si INTERSECANO, cioè la soluzione è UNICA

Esempio

$$\begin{cases} 2x u_x - u_y = -u^2 & \rightarrow \text{eq. lineare} \\ u(q, \ln q) = 1 & , q > 0 \end{cases}$$

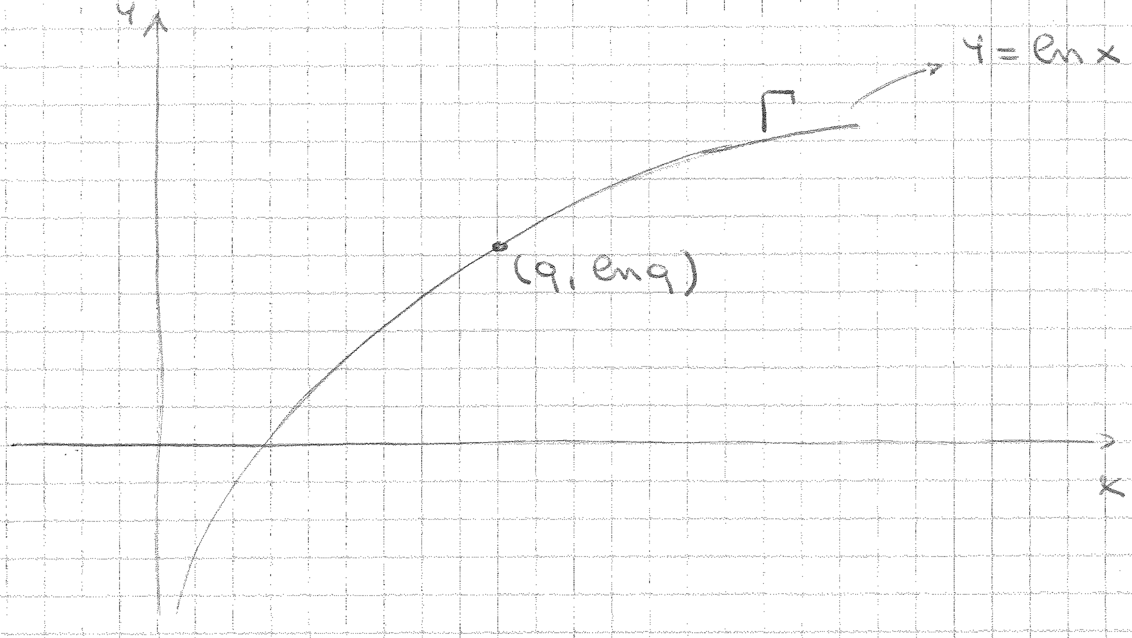
$(x, y) \longrightarrow u(x, y)$

Nella notazione di prima $\bar{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$$q \longrightarrow \bar{f}(q) = \begin{pmatrix} q \\ \ln q \end{pmatrix}$$

$$u(\bar{f}(q)) = g(q) := 1$$

$\longrightarrow$ continua



$$\bar{b}(\bar{x}) = \begin{pmatrix} 2x \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = \bar{b}(\bar{x}) \implies \begin{cases} \dfrac{d\bar{x}}{dt} = 2x \\ \dfrac{d\bar{y}}{dt} = -1 \end{cases}$$

Integro la 1ª:

$x(q,t) = K(q)\, e^{2t}$ (K = cost. d'integrazione che dipende da dove parte)

Integro la 2ª:

$y(q,t) = -t + c(q)$ (c = cost. d'integrazione che dipende dalla CARATTERISTICA)

$$\begin{cases} x(q,t) = K(q)\, e^{2t} \\ y(q,t) = -t + c(q) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(q,0) = q \\ y(q,0) = \ln q \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{array}{l} K(q) = q \\ C(q) = \ln q \end{array}$$

$$\begin{cases} x(q,t) = q\, e^{2t} \\ y(q,t) = -t + \ln q \end{cases}$$

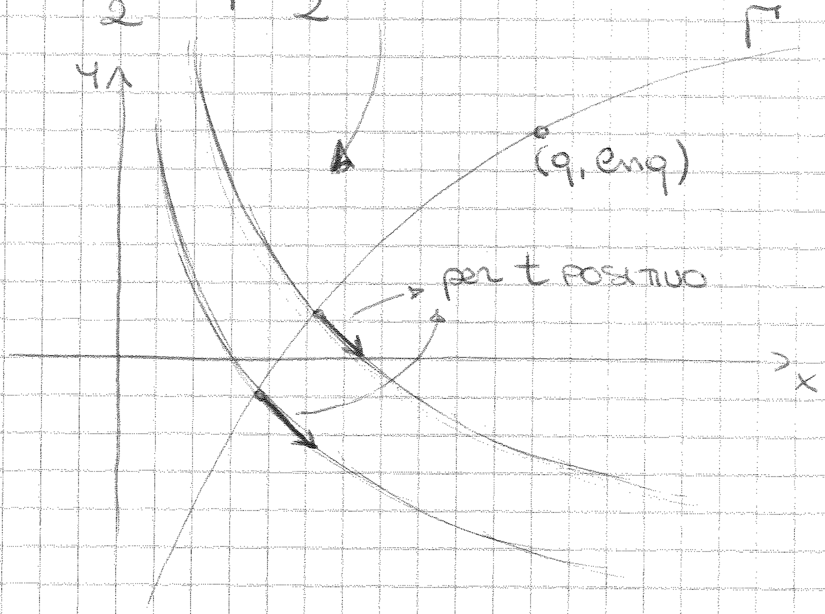
$$\begin{array}{rl} \ln x &= \ln q + 2t \\ y &= -t + \ln q \end{array} \quad -$$

$$\ln x - y = 3t \quad \Longrightarrow t = \frac{1}{3}(\ln x - y)$$

Moltiplico la 2ª per 2 e sommo:

$$2y + \ln x = 3\ln q \Longrightarrow \ln q = \frac{2y + \ln x}{3}$$

$$\Longrightarrow y = \frac{3}{2}\ln q - \frac{1}{2}\ln x$$



$$\frac{dz}{dt} = -z^2$$

Integrando:

$$\frac{1}{z} = t + \text{cost.}$$

$$z = \frac{1}{t + d(q)} \qquad \text{dove } \text{cost} = d(q)$$

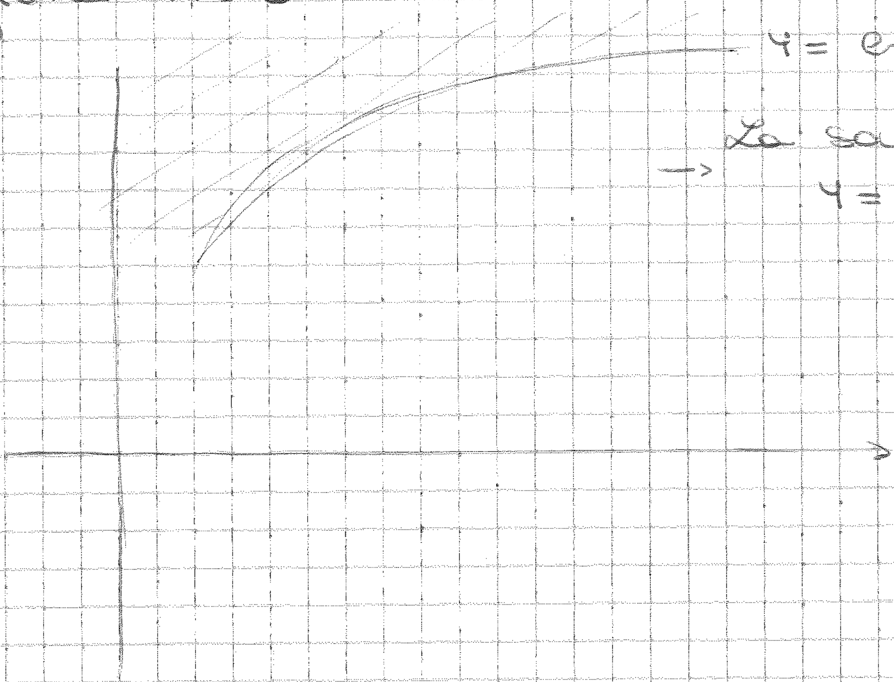
$z(q,0) = u(\bar{f}(q)) = 1$

$\Rightarrow a(q) = 1$

Quindi $z = \dfrac{1}{t+1}$

$$u = \frac{1}{\frac{\ln x - y}{3} + 1}$$

Questa funzione u ha una singolarità quando $y = \ln x + 3$, quindi u non è definita su tutta la regione $x > 0$



$y = \ln x + 3$

$\Rightarrow$ La soluzione sta sotto $y = \ln x + 3$

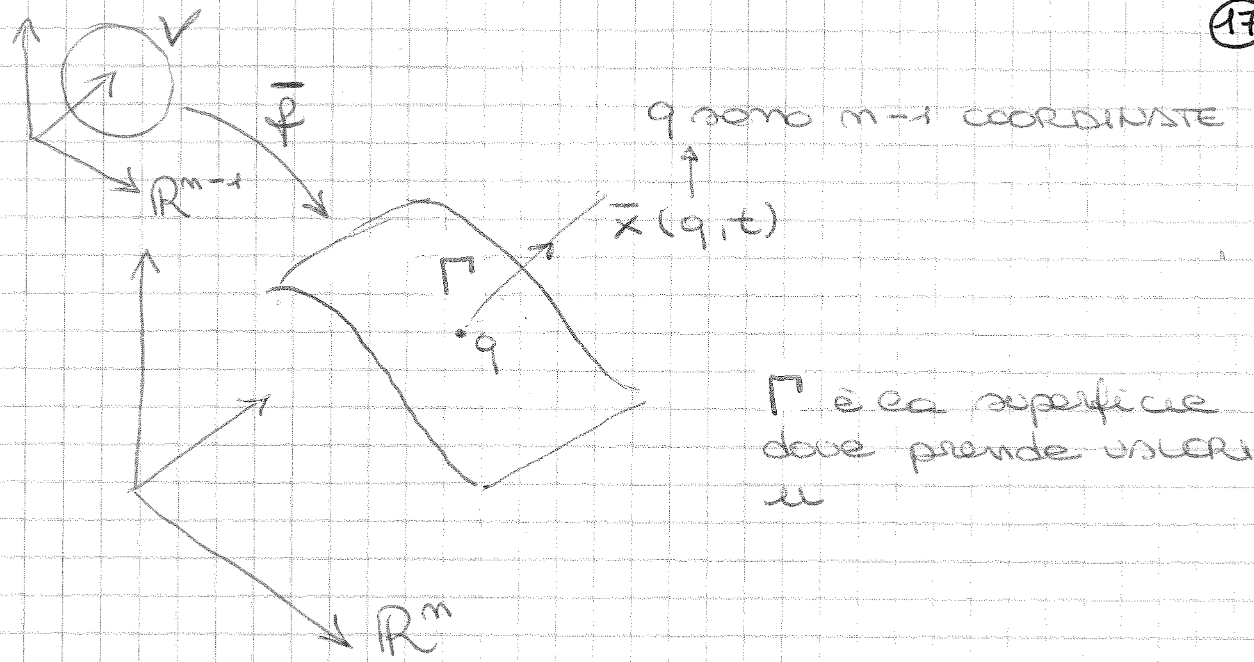
$\bar{b}(\bar{x}, u) \cdot Du = c(\bar{x}, u)$

$u : U \longrightarrow \mathbb{R}, \quad U \subseteq \mathbb{R}^n$

Dobbiamo considerare delle condizioni iniziali

$$\bar{f} : \begin{array}{l} V \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ q \longmapsto \bar{f}(q) \end{array}, \quad V \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$$

$\Gamma = \bar{f}(V)$



$$u(\bar{f}(q)) = g(q)$$

$$(q,t) \longrightarrow \bar{x}(q,t)$$

$$(q,t) \longrightarrow z(q,t)$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\bar{x}}{dt} &= \bar{b}(\bar{x}, z) \\ \frac{dz}{dt} &= c(\bar{x}, z) \end{aligned}\right\}$$

eq. differenziale del 1° ordine che possiamo riscrivere come

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}\bar{x} \\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\bar{b} \\ c\end{pmatrix}$$

↓

CAMPO VETTORIALE

CONDIZIONI INIZIALI:

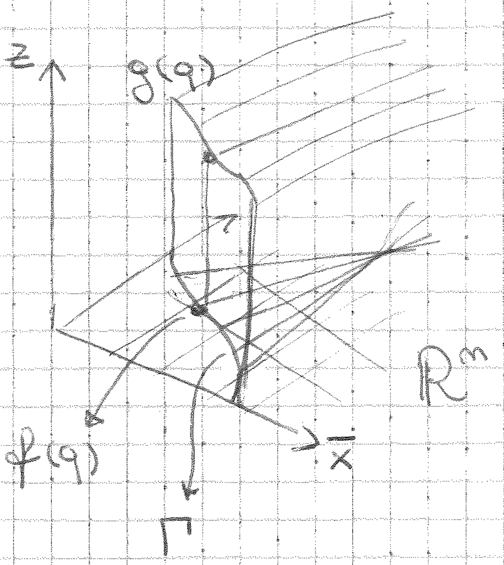
$$\bar{x}(q,0) = \bar{f}(q)$$

$$z(q,0) = g(q)$$

$z = u(\bar{x}(q,t), t)$ $\longrightarrow$ z ci dice come varia il VALORE di u lungo la CURVA INTEGRALE

Se $\bar{b}$ non dipende da z $\Rightarrow$ sono in $\mathbb{R}^n$

Altrimenti sono in $\mathbb{R}^{n+1}$



Da qui partono CARATTERISTICHE → che non si intersecano (poiché siamo nel caso QUASI LINEARE)

Facendo la proiezione del fascio di curve caratteristiche può succedere che le curve caratteristiche PROIETTATE si intersecano

Es.

Consideriamo

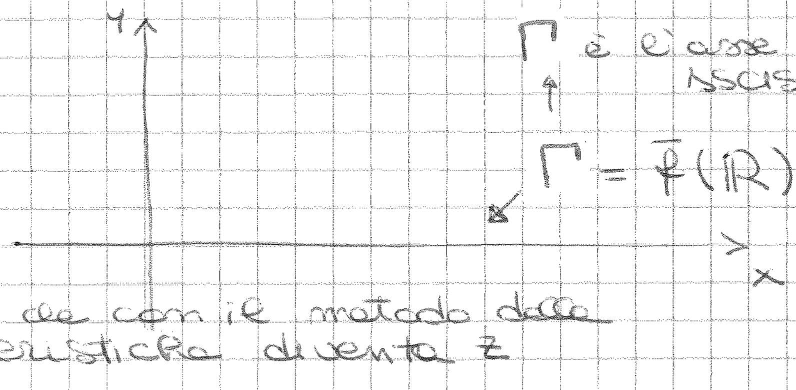
$u_t + u u_x = 0$

Siccome t era il PARAMETRO EVOLUTIVO precedentemente (considerato) lo scrivo:

$$\begin{cases} u_y + u u_x = 0 \\ u(q,0) = g(q) \end{cases}$$

$$\bar{f} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$q \longmapsto \begin{pmatrix} q \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(q,0) \\ y(q,0) \end{pmatrix}$$



Γ è l'asse delle ASCISSE

$\Gamma = \bar{f}(\mathbb{R})$

z è la u che con il metodo delle CARATTERISTICHE diventa z

$$\bar{b} = \begin{pmatrix} z \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c = 0$$

$$\frac{dz}{dt} = c = 0$$

$\Longrightarrow z(q,t) = g(q) \longrightarrow$ perché dipende solo da q e al tempo 0 vale $g(q)$

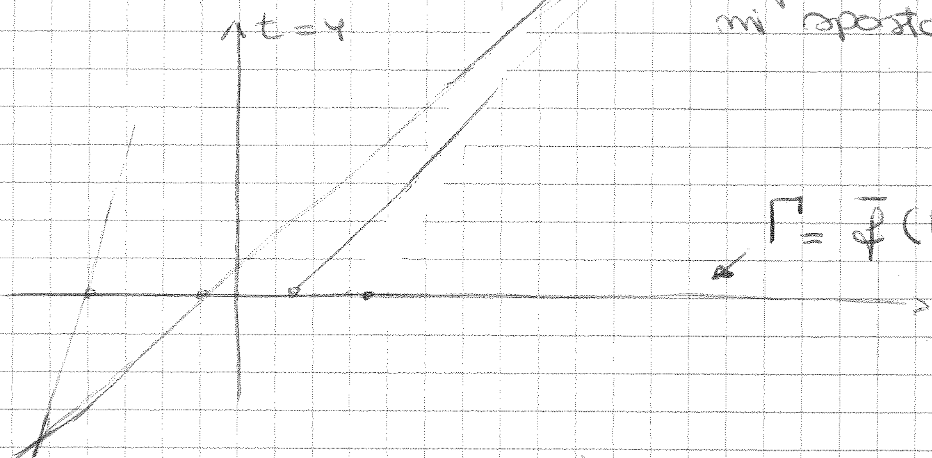
$\frac{dy}{dt} = 1 \Longrightarrow y = t + \cancel{\quad}$ (poiché $y(q,0) = 0$)

MOTO UNIFORME in cui per ogni valore di q di partenza ho una certa VELOCITÀ ($g(q)$ è la VEL)

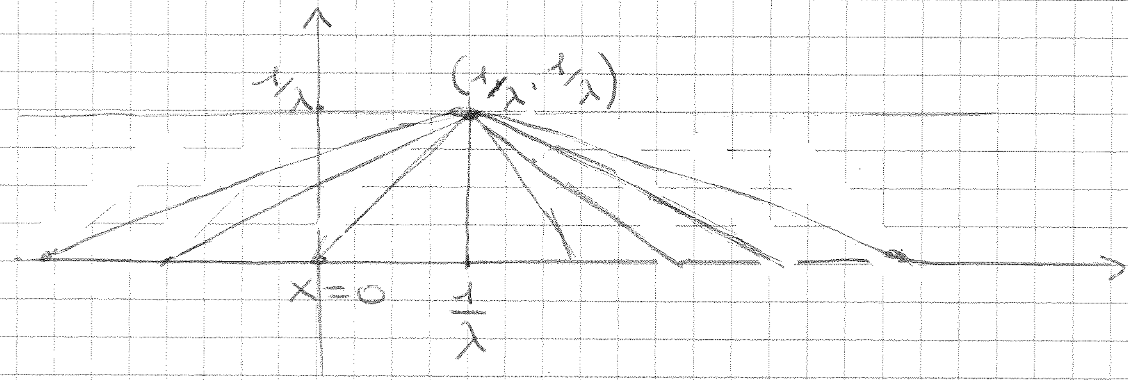
$$\frac{dx}{dt} = z = g(q) \Longrightarrow x = \underbrace{q}_{(\text{per } t=0:\ x(q,0)=q)} + g(q) \cdot \underbrace{t}_{\text{è } y}$$

Una possibile scelta è:

$g(q) = 1 - \lambda q \longrightarrow$ la velocità diminuisce sempre di più man mano che mi sposto verso destra



PIÙ INCLINATA è la RETTA, più è VELOCE la CARATTERISTICA



$$x = q + (1 - \lambda q)\, t =$$
$$= (1 - \lambda t)\, q + t$$
$$\Longrightarrow q = \frac{x - t}{1 - \lambda q}$$

Se $t = 1/\lambda$ per qualunque q, $x(q, 1/\lambda) = \frac{1}{\lambda}$, cioè tutte le CARATTERISTICHE convergono nel PTO $(1/\lambda, 1/\lambda)$

Es.

$$\begin{cases} u_x + 2u\,u_y = 1 \\ u(x,0) = 1 \end{cases}$$ → eq QUASI LINEARE

$$\bar{f}: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$q \longrightarrow \begin{pmatrix} q \\ 0 \end{pmatrix}$$ (cioè ha come IMMAGINE l'ASCISSA)

$$\bar{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2z \end{pmatrix} \; , \; c = 1$$

$$\frac{dz}{dt} = c = 1$$

$$z(q,0) = g(q) = 1 \quad (*)$$

$$z(q,t) = t + \underbrace{1}_{}$$
costante di integrazione (è 1 per la condizione (*))

$$\frac{dx}{dt} = 1$$

$x(q,0) = q$ (perché all'istante INIZIALE vale q)

$$x = t + q$$

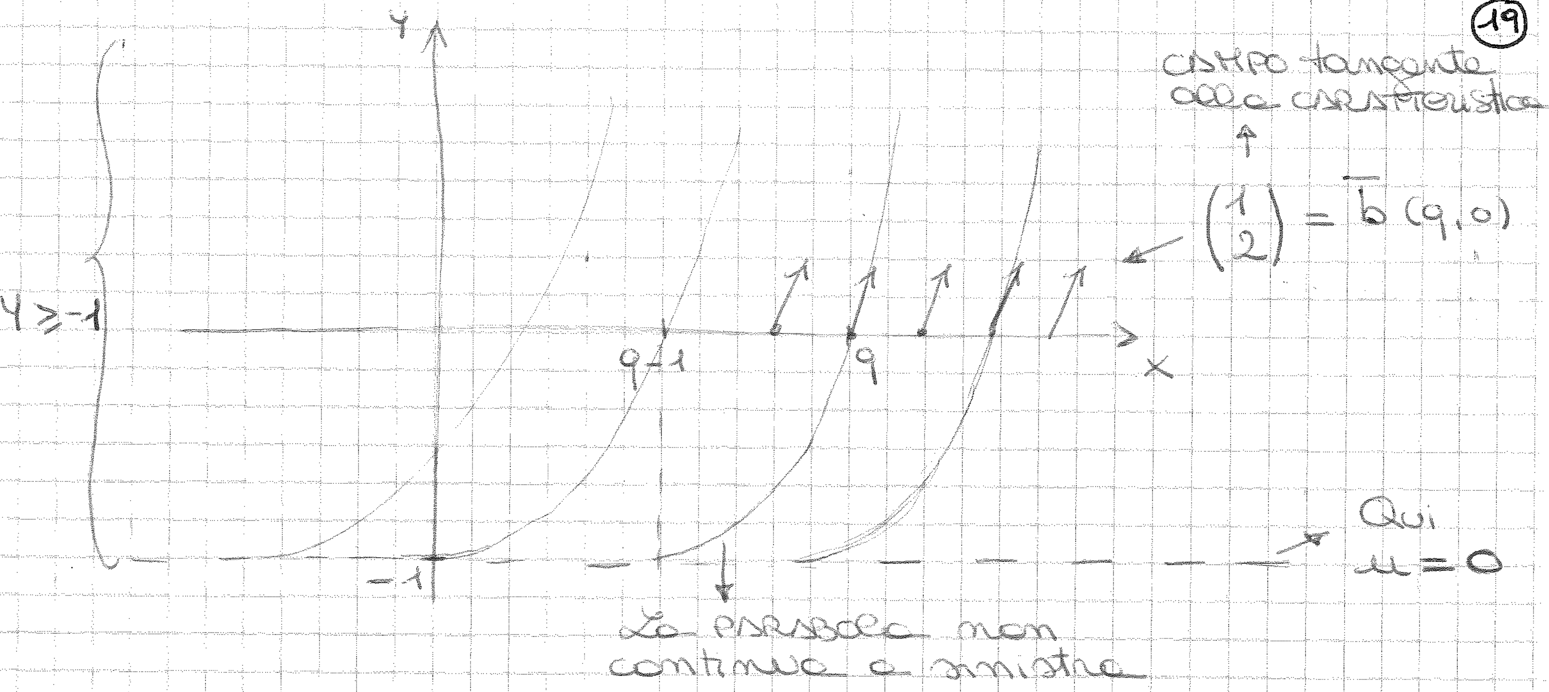
$$\frac{dy}{dt} = 2z = 2(t+1) = 2t + 2$$

$y(q,0) = 0 \longrightarrow \left(\text{perché } q \longrightarrow \begin{pmatrix} q \\ 0 \end{pmatrix} \right)$

$y = t^2 + 2t =$ (non c'è COST. d'integrazione poiché la condizione INIZIALE mi dice: $y(q,0) = 0$)

$* = (t+1)^2 - 1$

$\Rightarrow y = (x - (q-1))^2 - 1$ (poiché $t = x - q$)



Da (*) :

$t = -1 + \sqrt{1+y}$ (non importa alterare q perché z dipende solo da t)

Quindi

$u = t(x,y) + 1 = \sqrt{1+y}$ → ha senso finché $y \geq -1$

Se scelgo Γ come la retta $y = -1$ tutti i punti sono punti caratteristici (cioè tangenti alla caratteristica) e quindi non posso determinare localmente la soluzione (in quanto non ci sono intersezioni o sono infinite)

"Elementi di meccanica dei continui" → libro

Introduzione alla meccanica dei continui

LO SPAZIO

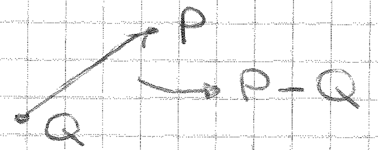
Lo spazio E è uno spazio affine modellato su

$(V, \cdot, OR)$ con $\dim V = 3$

V → vettori liberi
$\cdot$ → prodotto scalare
OR → orientazione

$P, Q \in E$ sono punti

$P - Q \in V$



$|P-Q|^2 = (\text{distanza})^2$

L'ORIENTAZIONE ci serve per il PRODOTTO VETTORIALE

IL TEMPO

Il TEMPO T è uno SPAZIO AFFINE MODELLATO SU $(I, \cdot, \mathbb{R})$ con $\dim I = 1$

$\downarrow$

spazio vettoriale è uni-dimensionale (SPAZIO VETT. DEGLI INTERVALLI)

(OSS: E non ha un'ORIGINE perché è uno SP. AFFINE)

è l'ORIGINE del RIFERIMENTO

$\uparrow$

è un PUNTO

$\uparrow$

RIFERIMENTO di E è una COPPIA $(O, \{\bar{e}_i\})$, $O \in E$

$\{\bar{e}_i\}$ base ortonormale positiva di V

$\downarrow$

(orientata positivamente)

Dato un RIFERIMENTO, $P \in E$ si scrive in modo unico

$$P = O + x^i \bar{e}_i$$

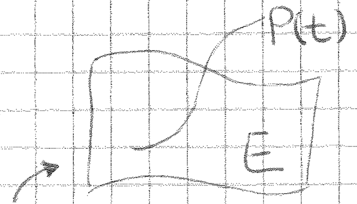
Se ho più indici:

$$P = O + \sum x^i e_i$$

x^i sono le COORDINATE

Se ho il RIFERIMENTO:

$$E \xleftrightarrow{(O, \{\bar{e}_i\})} \mathbb{R}^n$$



Se ho una CURVA su E, $t \longrightarrow P(t)$, posso def la VELOCITÀ: $\bar{v} = \dfrac{dP}{dt} \in V$, infatti:

$$\frac{dP}{dt} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{P(t+\varepsilon) - P(t)}{\varepsilon}$$

$\bar{v} : E \longrightarrow V$ CAMPO

$\bar{\nabla} \cdot \bar{v} : E \longrightarrow \mathbb{R}$

$\bar{\nabla} \times \bar{v} : E \longrightarrow V$

$f : E \longrightarrow \mathbb{R}$

$\nabla f : E \longrightarrow V$

Scrivere $\nabla f = \begin{pmatrix} \partial_x f \\ \partial_y f \\ \partial_z f \end{pmatrix}$ non ci permette di capire che $\in V$

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x^i} \cdot \bar{e}_i$$

OSS:
In generale se devo sommare $a_{ij} \cdot b_{ij}$

$\sum_j \sum_i \underbrace{a_{ij} \cdot b_{ij}}_{c_{ij}}$ → il RISULTATO è indipendente da quale SOMMATORIA metto per prima

Si può evitare di scrivere le SOMMATORIE per CONVENZIONE (sono sottintese che ci siano), poiché non ho AMBIGUITÀ dell'ORDINE delle SOMMATORIE

Cambio BASE: (cambiando BASE, cambiano anche le componenti di un VETTORE)

$$\bar{e}_i = O_{ij} \bar{e}'_j$$

$$x^i = O_{ij} x'^j \qquad \frac{\partial f}{\partial x'^j}$$

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x^i} O_{ij} \bar{e}'_j \qquad \frac{\partial x^i}{\partial x'^j} \implies \nabla f = \frac{\partial f}{\partial x'^j} \bar{e}'_j$$

Quindi la DEF. di GRADIENTE, così data, è INDIPENDENTE dalla BASE (cioè dal RIFERIMENTO)
(analogamente per ROTORE e DIVERGENZA di 1 CAMPO VETTORIALE)

Consideriamo ora un CAMPO DI VELOCITÀ:

$$\bar{v} : E \times T \longrightarrow V$$

$$(\underbrace{P}_{\updownarrow \bar{x}}, t) \longmapsto \bar{v}(\underbrace{P}_{\updownarrow \bar{x}}, t)$$

Per ogni P.TO, $\bar{v}$ ci dice qual è la VELOCITÀ del FLUIDO in quel punto a un certo ISTANTE

MOTO di 1 PARTICELLA di FLUIDO:

$t \longrightarrow P(t)$ ($P(t)$ = particella del continuo)

$\frac{dP}{dt} = \bar{v}(P(t), t) \longrightarrow$ eq. differenziale che determina il MOTO di 1 PARTICELLA di FLUIDO

PUNTI DI VISTA : LAGRANGIANO e Euleriano

LAGRANGIANO $\longrightarrow$ fisso una PARTICELLA (che si muove nel FLUIDO): essa si (l'osservatore vive nel FLUIDO) chiede, ad es., qual è la TEMPERATURA

EULERIANO $\longrightarrow$ l'OSSERVATORE sta fermo (fisso P)

Se $g(P,t)$ è una GRANDEZZA FISICA (ad es. TEMPERATURA)

Nel P.TO di VISTA EULERIANO:

$\frac{\partial}{\partial t} g \longrightarrow$ DERIVATA di g (EULERIANA)
(sto fissando P)

$\frac{d}{dt} g = \frac{\partial g}{\partial t} + \bar{v} \cdot \bar{\nabla} g \longrightarrow$ DERIVATA di g (LAGRANGIANA)

Questo è vero sia per le GRANDEZZE SCALARI sia per quelle VETTORIALI.

Considero ora l'ACCELERAZIONE di un elemento di FLUIDO:

$$\underbrace{\bar{a}(P,t)}_{a^i \bar{e}_i} = \frac{d^2}{dt} P(t) = \frac{d}{dt} \bar{v}(P(t),t) =$$

$$= \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \bar{v} \cdot \underbrace{\bar{\nabla} \bar{v}}_{\text{GRADIENTE di ciascuna componente}}$$

$$\bar{v} \cdot \bar{\nabla} \bar{v} = \nabla_{\bar{v}} \bar{v}$$

La componente i-esima è:

$$a^i = \frac{\partial v^i}{\partial t} + \bar{v} \cdot \bar{\nabla} v^i$$

$$\bar{v} \cdot \bar{\nabla} v^i = v^j \frac{\partial}{\partial x^j} v^i =$$

$$= v^j \frac{\partial v^j}{\partial x^i} + v^j \left(\frac{\partial v^i}{\partial x^j} - \frac{\partial v^j}{\partial x^i} \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x^i} (v^j)^2 + \left(\frac{\partial v^i}{\partial x^j} - \frac{\partial v^j}{\partial x^i} \right) v^j$$

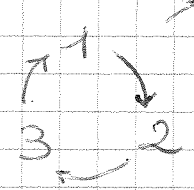
$$a^i = \frac{1}{2} \bar{\nabla}(\bar{v}^2) + (\bar{\nabla} \times \bar{v}) \times \bar{v}$$

$$(\bar{a} \times \bar{b})^i = \varepsilon_{ijk} a_j b_k$$

$\varepsilon_{ijk} \longrightarrow$ SIMBOLO ANTISIMMETRICO

$$\begin{cases} \varepsilon_{123} = 1 = \varepsilon_{312} = \varepsilon_{231} \\ \varepsilon_{213} = -1 = \varepsilon_{321} = \varepsilon_{132} \\ 0 \text{ altrimenti} \end{cases}$$

ε_{123}



$$(\overline{\nabla} \times \overline{b})^i = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x^j} b_k$$

$$((\overline{\nabla} \times \overline{v}) \times \overline{v})^i = \varepsilon_{ijk} (\nabla \times \overline{v})^j v^k =$$

$$= \varepsilon_{ijk} \left(\varepsilon_{jls} \frac{\partial}{\partial x^l} v^s \right) v^k =$$

$$= - \varepsilon_{jik} \left(\qquad \right) v^k$$

$$\sum_j \varepsilon_{jik} \varepsilon_{jls} = \delta^i_l \delta^k_s - \delta^i_s \delta^k_l$$

$$\overline{a} = \frac{d\overline{v}}{dt} = \frac{\partial \overline{v}}{\partial t} + \underbrace{\overline{v} \cdot \nabla \overline{v}}_{\overline{\nabla}_{\overline{v}} \overline{v} \,=\, (\overline{v} \cdot \overline{\nabla} v^i) \overline{e}_i}$$ $\rightarrow$ ACCELERAZIONE

$$\overline{v} \cdot \overline{\nabla} \overline{v} = \overline{\nabla} \left(\frac{1}{2} \overline{v}^2 \right) + (\overline{\nabla} \times \overline{v}) \times \overline{v}$$

Come si scrivono le eq. della DINAMICA nel CONTINUO

Teorema del TRASPORTO

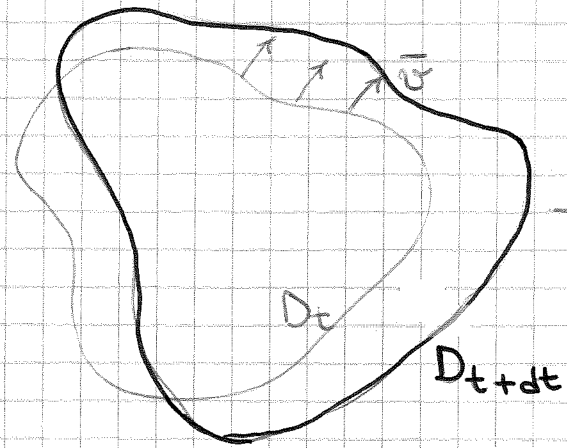
g GRANDEZZA

$g : E \times T \rightarrow \mathbb{R}$ (grandezza SCALARE)

$g : E \times T \rightarrow V$ (" VETTORIALE)

$$G(D_t) = \int_{D_t} g \, dv$$

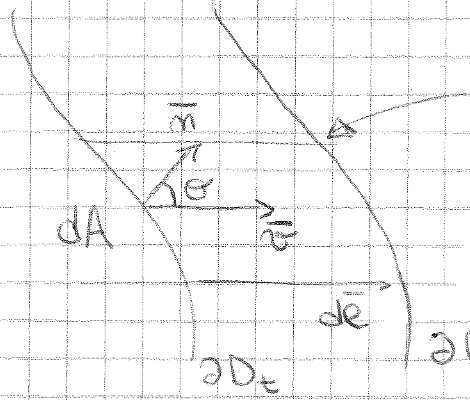
(Se g è la DENSITÀ $\Rightarrow$ G è la MASSA)



→ A un tempo successivo il DOMINIO si è spostato.

Come varia la GRANDEZZA?

$$\frac{d}{dt} G(D_t) = \int_{D_t} \frac{\partial g}{\partial t}\, dv + \int_{\partial D_t} g\, \bar{v} \cdot \overbrace{\bar{n}\, dA}^{d\bar{S}}$$



$$dV = dA \cos\theta\, dl = $$
$$= dA\, \bar{n} \cdot \bar{v}\, dt$$

$$d\bar{l} = \bar{v}\, dt$$

$$\underbrace{g\, dV}_{\downarrow} = g\, dA\, \bar{n} \cdot \bar{v}\, dt$$

grandezza che sta dentro il cilindretto

$$\frac{dG}{dt} = \int_{D_t} \left(\frac{\partial g}{\partial t} + \mathrm{Div}(g \bar{v}) \right) dv$$ → teorema del TRASPORTO

↓

Ci dice come varia la GRANDEZZA INTEGRALE con lo spostamento del DOMINIO

$$G(t) = \int_{x_i(t)}^{x_f(t)} g(x,t)\,dx \qquad D_t = [x_i(t), x_f(t)]$$

$$\frac{dG}{dt} = \int_{x_i(t)}^{x_f(t)} \frac{\partial}{\partial t} g\,dx + g(x_f(t),t)\,\dot{x}_f - f(x_i(t),t)\,\dot{x}_i$$

$g = \rho$ → DENSITÀ di MASSA

$G = M(D_t)$ → MASSA TOTALE del DOMINIO

Per conservazione della MASSA → $\frac{dM}{dt} = 0$

$$\frac{dM}{dt} = 0 = \int_{D_t} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \overline{\nabla} \cdot (\rho \overline{v}) \right) dv$$

Deve essere vero ∀ DOMINIO da scelgo

$$\Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + \overline{\nabla} \cdot (\rho \overline{v}) = 0 \longrightarrow \text{EQUAZ. DI CONTINUITÀ}$$

$$\overline{\nabla} \cdot (\rho \overline{v}) = \rho \overline{\nabla} \cdot \overline{v} + \overline{v} \cdot \overline{\nabla} \rho$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \overline{v} \cdot \overline{\nabla} \rho + \rho \overline{\nabla} \cdot \overline{v} = 0$$

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \overline{\nabla} \cdot \overline{v} = 0$$

Se il FLUIDO è INCOMPRIMIBILE

$\rho = \text{cost} \Rightarrow \overline{\nabla} \cdot \overline{v} = 0$

Se $g = 1$

$$\Rightarrow G = \text{VOLUME}\ (D_t) = V = \int_{D_t} dv$$

$$\frac{dV}{dt} = \int_{D_t} \overline{\nabla} \cdot \overline{v}\ dv$$

$\downarrow$

LA DIVERGENZA è IL FATTORE DI ESPANSIONE del VOLUME

Se D_t è PICCOLO, $\overline{\nabla} \cdot \overline{v}$ è COSTANTE su D_t

$$\frac{dV}{dt} \cong \overline{\nabla} \cdot \overline{v} \int_{D_t} dv = \overline{\nabla} \cdot \overline{v}\ V$$

$$\frac{d \ln V}{dt} = \overline{\nabla} \cdot \overline{v}$$

g PROPORZIONALE alla DENSITÀ

Consideriamo $g = \rho \tilde{g}$ (ρ = densità di massa)

$$\Rightarrow G = \int_{D_t} \rho \tilde{g}\ dv$$

campo vettoriale

$$\frac{dG}{dt} = \int \left(\frac{\partial (\rho \tilde{g})}{\partial t} + \overline{\nabla} \left(\underbrace{\tilde{g}}_{\text{scalare}} \overbrace{\rho \overline{v}} \right) \right) dv =$$

$$= \int \left(\cancel{\frac{\partial \rho}{\partial t} \tilde{g}} + \rho \frac{\partial \tilde{g}}{\partial t} + \cancel{\tilde{g} \overline{\nabla} \cdot (\rho \overline{v})} + \rho \overline{v} \cdot \overline{\nabla} \tilde{g} \right) dv$$

per l'eq di CONTINUITÀ

$$\frac{dG}{dt} = \int_{D_t} \rho \left(\frac{\partial \tilde{g}}{\partial t} + \overline{v} \cdot \overline{\nabla} \tilde{g} \right) dv$$

$$\frac{d}{dt}\int_{D_t} \rho\, \tilde{g}\, dv = \int_{D_t} \rho\, \frac{d\tilde{g}}{dt}\, dv$$

$\rho\, dv$ non cambia nel tempo

Se $\bar{g} = \rho\, \bar{v}$ $\qquad$ ρ = densità della QUANTITÀ di MOTO (cioè quanta quantità di moto ho nel volume)

$$\bar{G} = \bar{P} = \int_{D_t} \rho\, \bar{v}\, dv$$

$\bar{P}$ ↓ QUANTITÀ di MOTO = MASSA · VELOCITÀ

$$\frac{d}{dt}\bar{P}(D_t) = \int_{D_t} \rho\, \bar{a}\, dv$$

1° eq CARDINALE:

$$\underbrace{M\bar{a}_G}_{} = \underbrace{\bar{F}^{est}}_{\text{risultante delle FORZE ESTERNE}}$$

$\bar{a}_G \rightarrow$ acc. del centro di MASSA

$$\| $$

$$M\frac{d\bar{v}_G}{dt} \longrightarrow \text{stiamo assumendo che la MASSA non cambia}$$

$$\|$$

$$\frac{d}{dt}(M\bar{v}_G)$$

$$\|$$

$$\frac{d}{dt}\bar{P}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\bar{P} = \bar{F}^{est}$$

$$\bar{F}^{est} = \underbrace{\int_{D_t} \rho\, \bar{f}\, dv}_{\text{contributo delle FORZE VOLUMETRICHE}} + \underbrace{\int_{\partial D_t}}_{\text{contributo delle FORZE SUPERFICIALI}}$$

(forze che agiscono sulla SUPERFICIE)

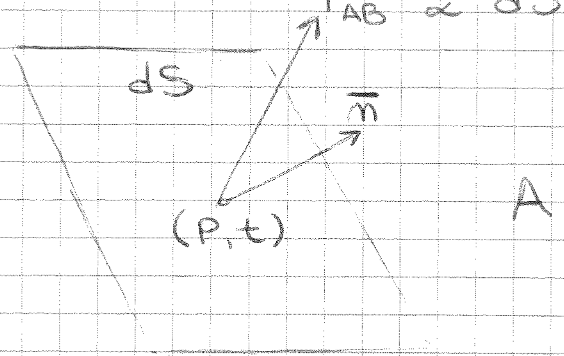
Se $\bar{f} = \underbrace{\bar{g}}_{\substack{= \\ -g\hat{k}}}$ → ACCELERAZIONE GRAVITAZIONALE ⇒ VOLUMETRICA

$-\underbrace{g}_{\substack{= \\ 9.8\ m/s^2}}\hat{k}$ ($\hat{k}$: versore verso l'alto)

TENSORE DEGLI SFORZI

"è proporzionale a"

$\bar{F}_{AB} \propto dS$



$\bar{F}_{AB}$ è la forza di A su B

$\bar{F}_{AB} = \underbrace{\sigma(\bar{n})}\, dS$

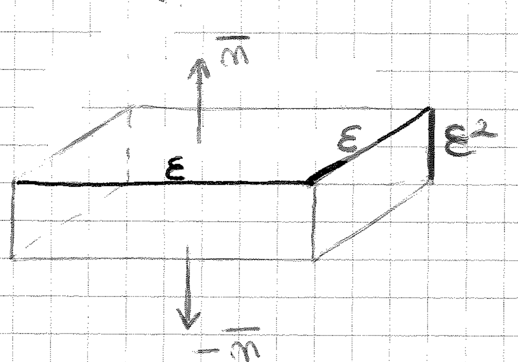
deve essere un vettore poiché dS è uno scalare

Dobbiamo trovare un'applicazione

$\sigma : V \longrightarrow V$

L'applic. σ è lineare ? sì !

Considero 1 piccolo parallelepipedo centrato nel p.to considerato (con altezza molto piccola risp. ai lati della base)



$$m\overline{a}_G = \overline{F}^{est} = \overline{F}^{est}_{vol} + \overline{F}^{est}_{sup}$$

↓ va come ε^4

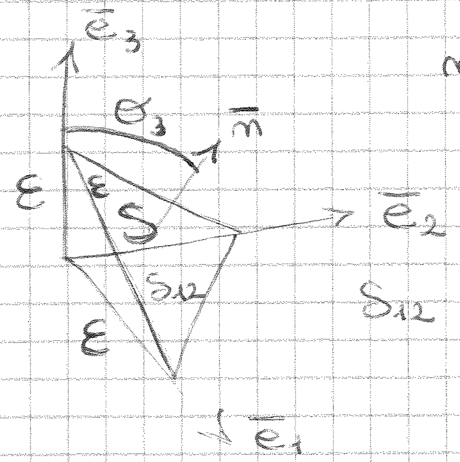
↓ $\varepsilon^4 + 4\varepsilon^3 + \underbrace{2\varepsilon^2} \longrightarrow \sigma(\overline{n})\varepsilon^2 + \sigma(-\overline{n})\varepsilon^2$

$$\varepsilon^4 = \varepsilon^4 + 4\varepsilon^3 + 2\varepsilon^2$$

Moltiplico per $\frac{1}{\varepsilon^2}$ e mando $\varepsilon \to 0$

$$\Rightarrow \sigma(-\overline{n}) = -\sigma(\overline{n})$$

↓ Lo sforzo in direzione $-\overline{n}$ è = a − lo SFORZO in direzione $\overline{n}$



$n_3 = \cos\theta_3$

θ_3 = angolo che $\overline{n}$ forma con $\overline{e}_3$

S = sup. ORTOGONALE a $\overline{n}$

S_{12} → superficie che sta nel PIANO x, y

$$\overline{n} = n_1\overline{e}_1 + n_2\overline{e}_2 + n_3\overline{e}_3$$

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$$

n_i = COSENI DIRETTORI

$$n_i = \overline{n} \cdot \overline{e}_i = \cos\theta_i$$

$$S_{12} = S\cos\theta_3 = S\,n_3$$

$$S_{23} = S\,n_1$$

$$S_{31} = S\,n_2$$

Tutte le superfici del BORDO vanno come ε^2

per l'equilibrio

$$0 \overset{\uparrow}{=} \underbrace{S\sigma(\bar{n})}_{\substack{\text{forza del}\\ \text{continuo che}\\ \text{agisce sulla}\\ \text{faccia inclinata}\\ (S)}} + S_{12}\,\sigma(-\bar{e}_3) + S_{31}\,\sigma(-\bar{e}_2) + S_{23}\,\sigma(-\bar{e}_1)$$

$$0 = \sigma(\bar{n}) + n_3\,\sigma(-\bar{e}_3) + n_2\,\sigma(-\bar{e}_2) + n_1\,\sigma(-\bar{e}_1)$$

Uso ora il LEMMA che mi dice: $\sigma(-\bar{e}_i) = -\sigma(\bar{e}_i)$

$$0 = \sigma(\bar{n}) - n_3\,\sigma(\bar{e}_3) - n_2\,\sigma(\bar{e}_2) - n_1\,\sigma(\bar{e}_1)$$

$$\sigma(\bar{n}) = \sum_i n_i\,\sigma(\bar{e}_i)$$

$\Longrightarrow$ l'APPLICAZIONE è LINEARE

$\{\bar{e}_i\}$ BASE di V

$\exists\,\{\bar{e}^i\}$ BASE (DUALE) di V^* $\qquad \bar{e}^i = \bar{e}_i$

$$\sigma = \sum_i \sigma(\bar{e}_i) \otimes \bar{e}^i = \sum_i \sigma(\bar{e}_i)\,\bar{e}_i\,\cdot$$

$$\bar{e}^i(\bar{n}) = n^i$$

$$\bar{e}^i(n^k\,\bar{e}_k) = n^k\,\delta^i_k = n^i$$

Questo è il TEOREMA di CAUCHY

(OSS: l'APPLICAZIONE σ è anche SIMMETRICA)

$$\bar{F}^{est}_{sup} = \int_{\partial D_t} \underbrace{\sigma(\bar{n})}_{\text{SFORZO}}\, dS$$

$$\sigma \bar{e}_i = \sigma^j{}_i \, \bar{e}_j$$

$$\sigma = \sigma^j{}_i \, \bar{e}_j \otimes \bar{e}^i$$

$$\sigma \in V \otimes V^*$$

$$\Rightarrow \bar{F}_{sup}^{est} = \int_{\partial D_t} \bar{e}_j \, \sigma^j{}_i \, n^i \, dS$$ $\rightarrow$ Abbiamo le condizioni per applicare il TEO. della DIVERGENZA

$$= \int_{D_t} \underbrace{\bar{e}_j \frac{\partial}{\partial x^i} \sigma^j{}_i}_{} \, dv$$ $\rightarrow$ DIVERGENZA del tensore σ ($\mathrm{DIV}\,\sigma$)

$$\frac{d\bar{P}}{dt} = \bar{F}_{vol}^{est} + \bar{F}_{sup}^{est}$$

$$\int_{D_t} \rho \, \bar{a} \, dv = \int_{D_t} \rho \, \bar{f} \, dv + \int_{D_t} \mathrm{DIV}\,\sigma \, dv$$

Per l'ARBITRARIETÀ di D_t

$$\Rightarrow \boxed{\rho \, \bar{a} = \rho \, \bar{f} + \mathrm{DIV}\,\sigma}$$

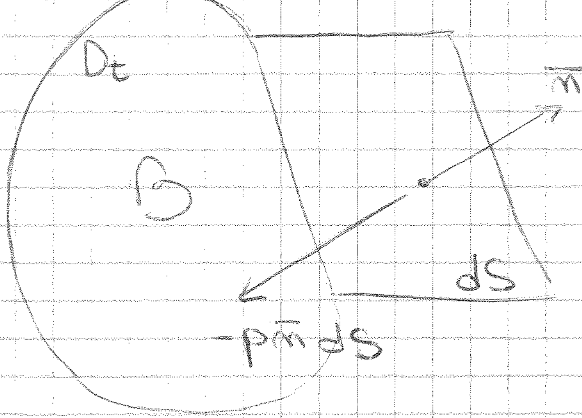
EQ. CARDINALE del CONTINUO $\rightarrow$ (determina la DINAMICA)

(è la 1ª eq. cardinale vista dal pto di vista del continuo)

$$\sigma^j{}_i = -p \, \delta^j{}_i$$

Se $\sigma^j{}_i$ fosse solo così $\Rightarrow \bar{F}_{AB} = -p \, \bar{n} \, dS$

(è una forza di PRESSIONE)



$$\underbrace{\sigma^j_i}_{\text{TENSORE degli SFORZI}} = \underbrace{-p\,\delta^j_i}_{\text{forza di pressione}} \underbrace{- \frac{2}{3}\eta(\bar{\nabla}\cdot\bar{v})\,\delta^j_i + 2\eta\, S^j_i}$$

La TRACCIA di questi 2 CONTRIBUTI mi dà 0 (perciò nell'espansione e nella contrazione del fluido suppongo non ci sia ATTRITO)

$$S^j_i = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v^j}{\partial x^i} + \frac{\partial v^i}{\partial x^j}\right)$$

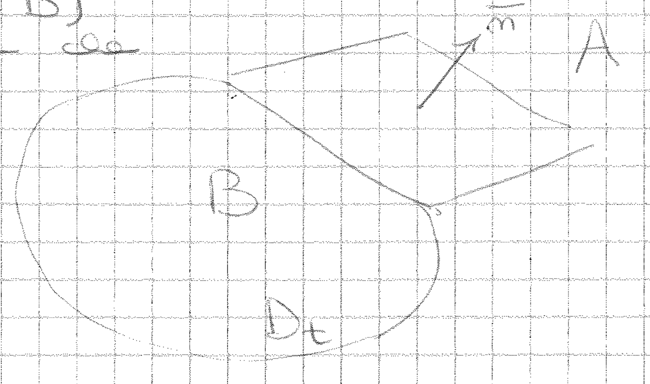
η = VISCOSITÀ

$\rho\,\bar{a} = \rho\,\bar{f} + \mathrm{div}\,\sigma$ → eq. della DINAMICA del CONTINUO

$\sigma_{ij} = -p\,\delta_{ij} - \frac{2}{3}\eta\,\bar{\nabla}\cdot\bar{v}\,\delta_{ij} + 2\eta\, S_{ij}$ → Tensore degli SFORZI

$$S_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_i} v_j + \frac{\partial}{\partial x_j} v_i\right)$$

Il versore individua un piano immaginario che divide il continuo in 2 parti (A e B) e ci dice qual è la forza che A esercita su B



$$\rho a_i = \rho f_i + \frac{\partial}{\partial x^j} \sigma_{ij} =$$

$$= \rho f_i - \frac{\partial}{\partial x^j} p\, \delta_{ij} - \frac{2}{3}\eta \frac{\partial}{\partial x^j} (\bar{\nabla} \cdot \bar{v})\, \delta_{ij} +$$

$$+ \eta \frac{\partial}{\partial x^j} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x^j} + \frac{\partial v_j}{\partial x^i} \right) =$$

$$= \rho f_i - \frac{\partial}{\partial x^i} p - \frac{2}{3}\eta \frac{\partial}{\partial x^i} (\bar{\nabla} \cdot \bar{v}) + \eta \Delta v_i +$$

$$+ \eta \frac{\partial}{\partial x^i} (\bar{\nabla} \cdot \bar{v})$$

(e poiché δ_{ij} converte j in i)

$$\underbrace{\rho \bar{a} = \underbrace{\cancel{\rho \bar{f}}} - \bar{\nabla} p + \frac{1}{3}\eta \underbrace{\bar{\nabla}(\bar{\nabla} \cdot \bar{v})}_{\text{GRADIENTE della DIVERGENZA}} + \eta \Delta \bar{v}}$$

EQ. di NAVIER-STOKES

Lo elimino perché di solito si considera solo FORZE ESTERNE

Se ci fosse sarebbe $\bar{f} = -\bar{\nabla} V$

Se $\eta = 0$

$$\Rightarrow \rho \bar{a} = \rho \bar{f} - \bar{\nabla} p =$$

$$= -\rho \bar{\nabla} V - \bar{\nabla} p \quad \rightarrow \text{EQ. DI EULERO}$$

per forze volumetriche e conservative

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \bar{\nabla} \cdot (\rho \bar{v}) = 0 \quad \rightarrow \text{eq. di CONTINUITÀ}$$

$$\rho = \rho(p)$$

$$\mathbb{P}(p) = \int \frac{dp}{\rho(p)} \quad \rightarrow \text{POTENZIALE della pressione}$$

Dividendo l'eq. di Eulero per ρ:

$$\overline{a} = -\overline{\nabla}(V + \mathbb{P}) \qquad (*)$$

Moltiplicando $(*)$ per $\overline{v}$:

$$\underbrace{\overline{v} \cdot \overline{a}}_{= \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\overline{v}^2\right)} = \underbrace{-\overline{\nabla}_{\overline{v}}(V + \mathbb{P})}_{= -\frac{d}{dt}(V+\mathbb{P})}$$

(in caso stazionario) → è una derivata TOT se V e $\mathbb{P}$ non dipendono da t, infatti in generale

$$\frac{d}{dt} g = \frac{\partial g}{\partial t} + \overline{\nabla}_{\overline{v}}\, g$$

In caso stazionario $\frac{\partial g}{\partial t} = 0$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\overline{v}^2 + V + \mathbb{P}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\overline{v}^2 + V + \mathbb{P} = \text{cost.} \quad \rightarrow \underline{\text{BERNOULLI}}$$

Se considero 1 tubo di fluido, su ciascuna linea di fluido la quantità "$\frac{1}{2}\overline{v}^2 + V + P$" è costante (può cambiare valore sulle diverse linee, ma non cambia su ognuna di esse)

EQUAZIONE di BURGERS NON VISCOSA → caso particolare dell'EQ. di EULERO

$$u_y + u u_x = 0$$

oppure

$$u_t + u u_x = 0$$

Se $u = v$

$$\frac{dv}{dt} = 0 \quad \text{, infatti}$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\overline{a} = \overline{0}$$

$$\overline{a} = \frac{\partial \overline{v}}{\partial t} + \overline{v} \cdot \overline{\nabla}\, \overline{v}$$

Esercizio

$u_y + C(u)\, u_x = 0 \implies$ eq. QUASI LINEARE del 1° ORDINE del tipo:

$$\bar{b}(\bar{x}, u) \cdot \bar{\nabla} u = d(x, u) = 0$$

1) $\dfrac{d\bar{x}}{dt} = \bar{b}$

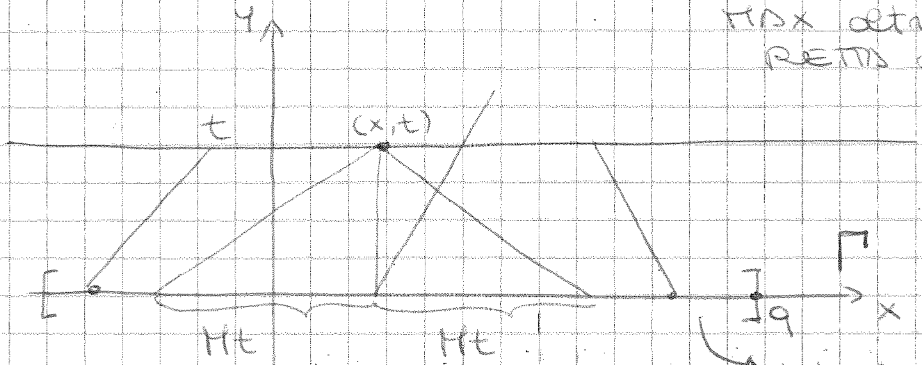
condizione iniziale:

$u(q, 0) = g(q) \implies$ e nostro Γ è l'asse delle x

2) $\dfrac{dz}{dt} = 0 \implies z$ è cost. lungo la CARATTERISTICA

1) $\implies \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = C(z) \implies x(t, q) = \underbrace{C(z)}\, t + q \\ \dfrac{dy}{dt} = 1 \implies y = t \end{cases}$

velocità delle CARATTERISTICHE legata all'inclinazione della RETTA. Esiste un LIMITE MAX oltre il quale la RETTA non può inclinarsi



intervallo connesso da dove partono le CARATTERISTICHE

OSS: su alcuni punti può non arrivare nessuna CARATTERISTICA

OSS: Se $c \in C(\mathbb{R})$ è LIMITATO, $|c| < M$

$\implies$ non c'è "SVUOTAMENTO", cioè ci sono delle zone dove non arrivo con le CARATTERISTICHE

MAPPA

$q \longrightarrow x(t, q) = c(g(q))\, t + q$

manda intervalli connessi in connessi

c e g sono continue $\implies$ anche q è continua

L'IMMAGINE è quindi connessa e non c'è quindi SVUOTAMENTO

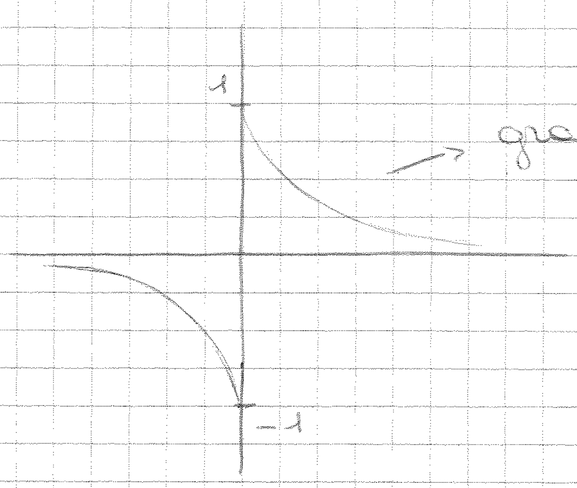
Esercizio

$u_y + C(u)\, u_x = 0$

$C(u) = \dfrac{sgn(u)}{1+|u|}$ → DISCONTINUA e LIMITATA

$g(q) = q$

$u(q,0) = q$



→ grafico di $C(u)$

$$x(t,q) = C(g(q))\,t + q = \frac{sgn(q)}{1+|q|}\cdot t + q$$

Considero le caratteristiche per $q>0$

$$x(t,q) = \frac{1}{1+q}\cdot t + q$$

$x(1+q) = t + q + q^2$

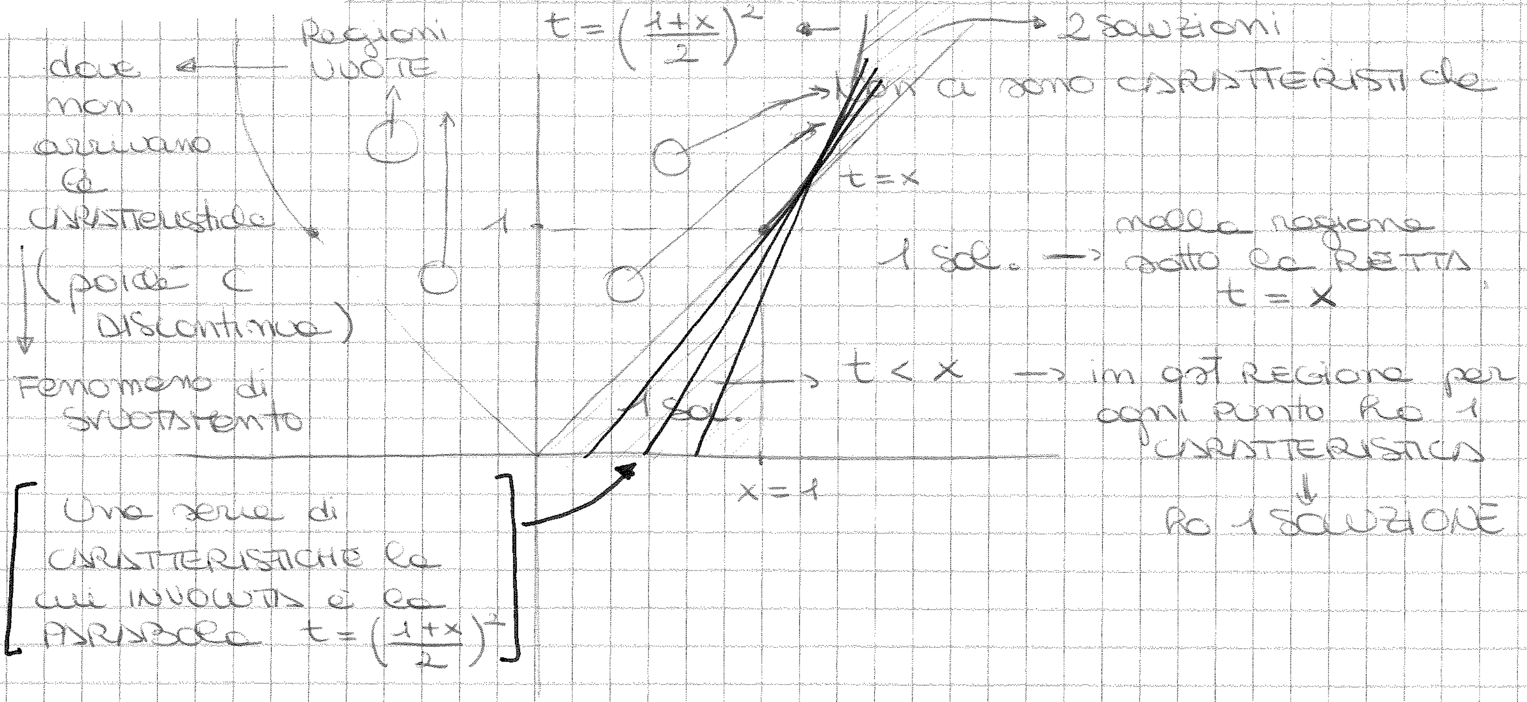
$q^2 + q(1-x) + t - x = 0$

$$q = \frac{(x-1) \pm \sqrt{(1-x)^2 - 4(t-x)}}{2}$$

se $x<1$

$\sqrt{(1-x)^2 - 4(t-x)} > 1-x$ → ho una SOLUZIONE

$\cancel{(1-x)^2} - 4(t-x) > \cancel{(1-x)^2} \Rightarrow t < x$



Se $x>1$ e $t>x$ e ~~...~~

$(1-x)^2-4(t-x)>0$ ⟹ ho 2 soluzioni

$1-2x+x^2-4t+4x>0$

$1+2x+x^2-4t>0$

$t<\left(\frac{1+x}{2}\right)^2$

$(t,q)\longrightarrow(x,y)$

$$\frac{\partial x}{\partial t}=\frac{1}{1+q}$$

$$\frac{\partial x}{\partial q}=-\frac{1}{(1+q)^2}t+1$$

$$\frac{\partial y}{\partial q}=0$$

$$\frac{\partial y}{\partial t}=1$$

determinante del nostro Jacobiano

$$\det\begin{pmatrix}\frac{1}{1+q} & -\frac{1}{(1+q)^2}t+1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\frac{1}{(1+q)^2}t-1=\det J$$

$\det J = 0$

$(1+q)^2 = t$

$q = -1 \pm \sqrt{t}$

Se $t > 1$, esiste un pto q per cui la MAPPA non è INIETTIVA

Sostituisco q in $x(t,q)$:

$$x = \frac{t}{\sqrt{t}} - 1 + \sqrt{t} = -1 + 2\sqrt{t} \implies t = \left(\frac{1+x}{2}\right)^2$$

EQUAZIONI che nascono dalle LEGGI DI CONSERVAZIONE

$$u_t + (F(u))_x = 0$$

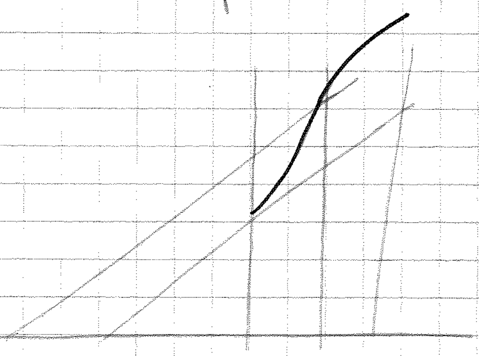
$$u_t + F'(u)\, u_x = 0 \quad (*) \quad (c(u) = F'(u))$$

$$\frac{dz}{dt} = 0$$

Quando più caratteristiche si incrociano quale consideriamo?

L'idea è di andare a tagliare con 1 curva

Il problema è capire come è fatta qst curva



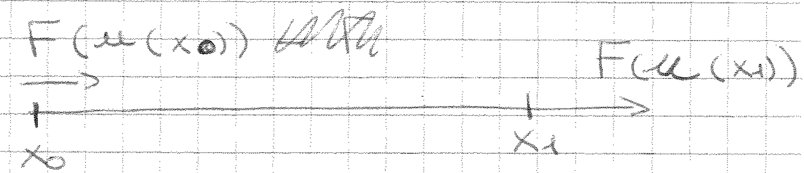
il flusso dipende dalla VARIABILE t

Se u è una sol. di $(*)$

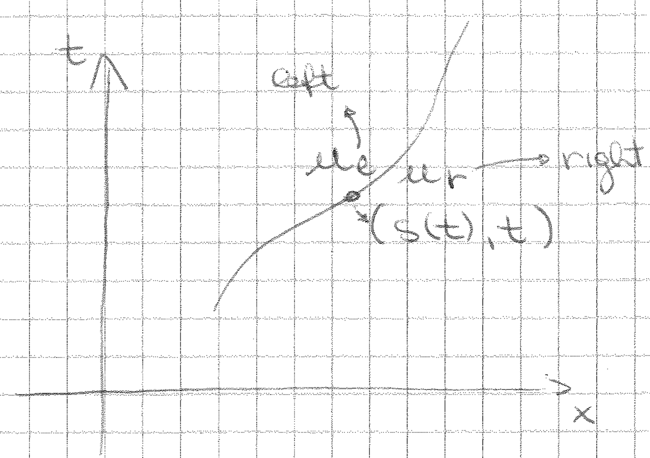
$$\frac{d}{dt}\int_{x_0}^{x_1} u\, dx = -\int_{x_0}^{x_1} (F(u))_x\, dx = -\left(F(u(x_1,t)) - F(u(x_0,t))\right)$$

$\downarrow$

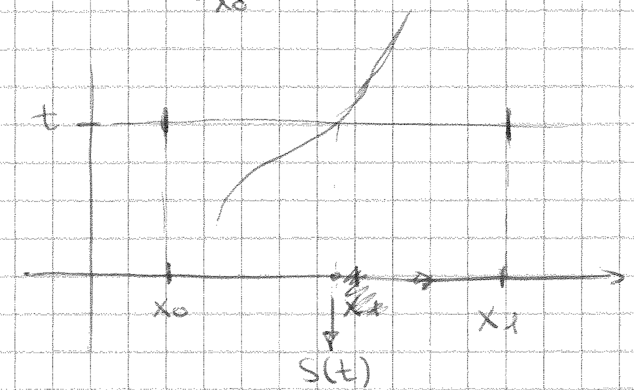
Ha senso anche se u non è derivabile



Supp che u abbia una sola ~~singolarità~~ DISCONTINUITÀ descritta da una curva



$$\int_{x_0}^{x_1} u\,dx = \int_{x_0}^{s(t)} u_\ell(x,t)\,dx + \int_{s(t)}^{x_1} u_r(x,t)\,dx$$



$$\frac{d}{dt}\int_{x_0}^{x_1} u\,dx = u_\ell(s(t),t)\,\dot{s} - u_r(s(t),t)\,\dot{s} +$$

$$+ \int_{x_0}^{s(t)} \frac{\partial u_\ell}{\partial t}(x,t)\,dx + \int_{s(t)}^{x_1} \frac{\partial u_r}{\partial t}(x,t)\,dx =$$

$$= -\left\{ F(u_r(x_1,t)) - F(u_\ell(x_0,t)) \right\}$$

$x_0 \longrightarrow s(t)$

$x_1 \longrightarrow s(t)$

$$\dot{s}\left[u_\ell(s(t),t) - u_r(s(t),t)\right] = F(u_\ell(s(t),t)) - F(u_r(s(t),t))$$

$\dot{s}\,\underbrace{\Delta u}_{\text{DISCONTINUITÀ di } u} = \underbrace{\Delta F}_{\text{DISCONTINUITÀ di } F \text{ (ea tramite del salto di } u)}$ $\longrightarrow$ da qui posso dedurre $\dot{s}$

$\underline{\dot{s}\,\Delta u = \Delta F}$ $\longrightarrow$ condizione di RANKINE - HUGONIOT

MODELLO del TRAFFICO

Consideriamo ora l'eq

$u_t + (F(u))_x = 0$

sotto questa forma

$u_t + (u\,v(u))_x = 0$

u = DENSITÀ dei VEICOLI sulla STRADA (è POSITIVA)

v = velocità dei VEICOLI

Più è grande la densità, più rallento

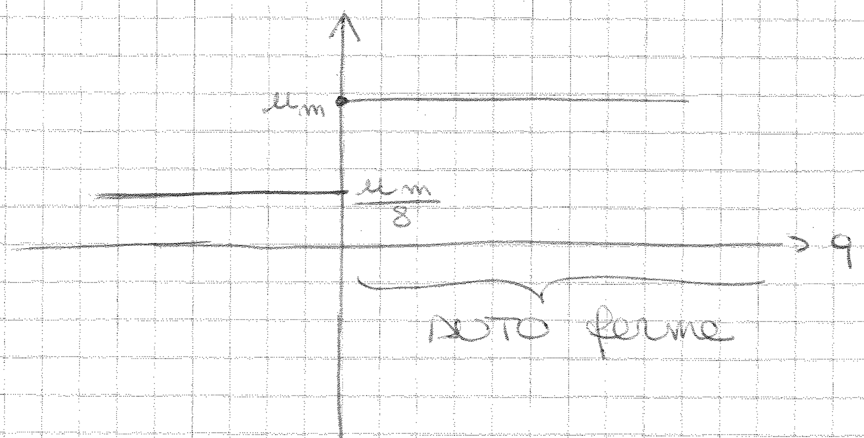
$$v(u) = \underset{\text{vel MAX}}{v_m}\left(1 - \frac{u}{u_m}\right)$$

È un problema UNIDIMENSIONALE

u_m = densità MAX (tutti i veicoli fermi)

$$\underbrace{u\big|_{t=0}}_{g(q)} = \begin{cases} u_m & \text{se } q > 0 \\ \dfrac{u_m}{8} & \text{se } q < 0 \end{cases}$$

$q \to$ è la coordinata x al tempo 0



$(*)$

$$F(u) = v_m\left(u - \frac{u^2}{u_m}\right)$$

$$F'(u) = v_m\left(1 - \frac{2u}{u_m}\right)$$

Ho delle AUTOMOBILI (un blocco di automobili) che stanno andando verso delle auto ferme

Mi aspetto che inizino a rallentare

$\Rightarrow$ il fronte delle auto ferme "va indietro" verso SINISTRA

Con quale velocità si sposta il fronte delle AUTO ferme?

$$\frac{dz}{dt} = 0 \qquad \frac{dy}{dt} = 1 \qquad \frac{dx}{dt} = F'(u) \quad (*)$$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$z = g(q) \qquad y = t \qquad x(t,q) = F'(g(q))\,t + q$$

Andiamo a vedere le caratteristiche che partono dalla REGIONE $q>0$

$x(t,q) = -v_m t + q$

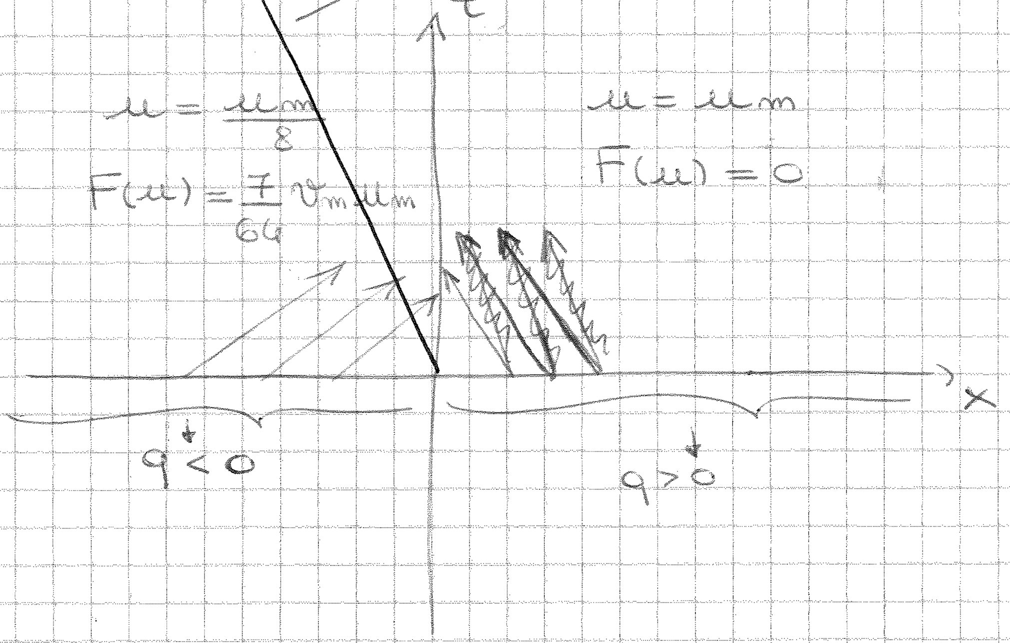
$u = u_m \longrightarrow$ per $q>0$

Se $q<0$ $\left(\Rightarrow u = \frac{u_m}{8}\right)$

$x(t,q) = \frac{3}{4} v_m t + q$

$u = \frac{u_m}{8} \longrightarrow$ per $q<0$

$\left(-\frac{v_m}{8} t, t\right)$



Le caratteristiche che partono da Sx vanno 3 volte + veloci di quelle " " " Dx

$\Delta F = -\frac{7}{64} v_m u_m$

$F(u)_d \quad F(u)_s$
(destra - sinistra)

$\Delta u = \frac{7}{8} u_m$

$u_m - \frac{u_m}{8}$

$\Longrightarrow \dot{S} = -\frac{1}{8} v_m$

$-v_m < \dot{S} < \frac{3}{4} v_m$

fronte dello SCHOK

$u_y + (F(u))_x = 0 \quad (*)$

$u(q,0) = g(q)$

$u_y + F'(u)\, u_x = 0 \quad \Longrightarrow$ derivando $(*)$

$x(t,q) = F'(g(q))\, t + q$

$y(t,q) = t$

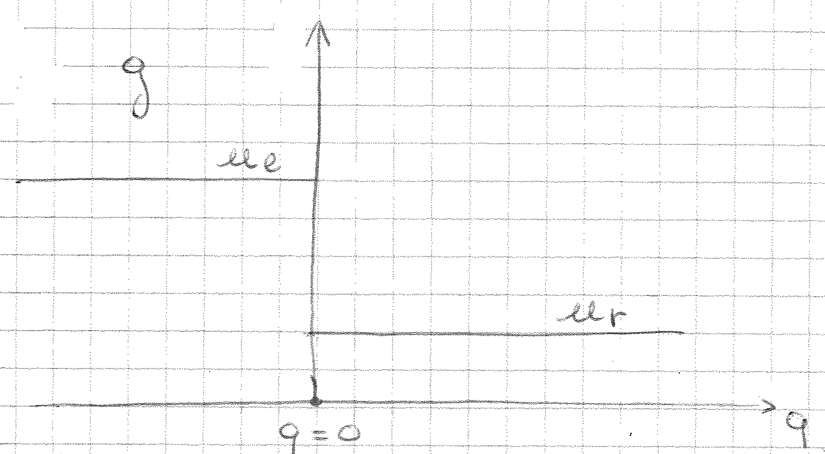
$q = x - F'(g(q))t$

$\Rightarrow g(q) = g(x - F'(g(q))t)$

$\dfrac{dz}{dt} = 0 \implies u = \text{cost} = g(q)$

u mantiene il suo valore lungo tutta la CARATTERISTICA

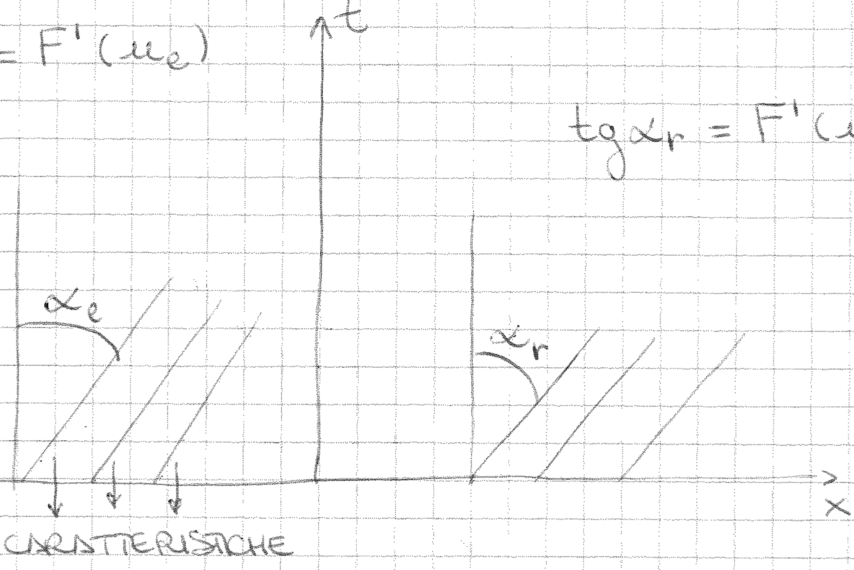
$\Rightarrow u = g(x - F'(u)t)$



q → Rappresenta la mia coordinata al tempo 0

$tg\,\alpha_e = F'(u_e)$

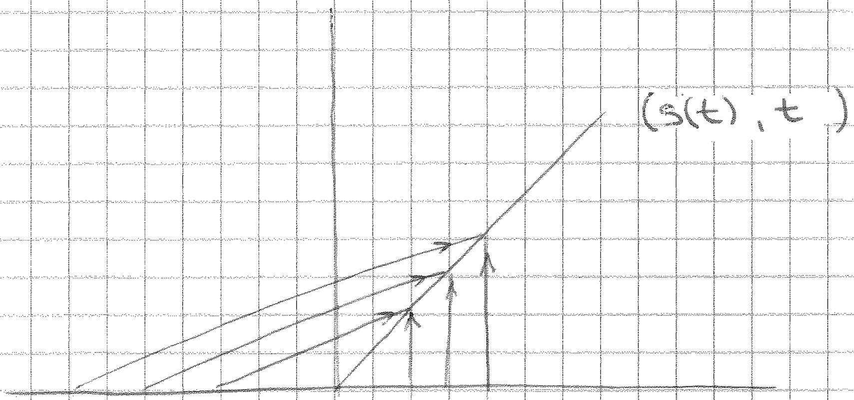
$tg\,\alpha_r = F'(u_r)$



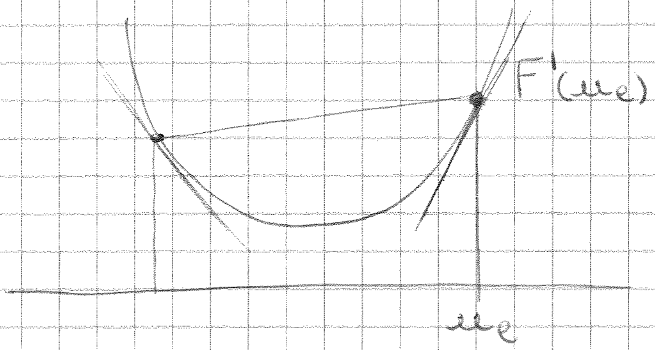
CASO F CONVESSA, F' CRESCENTE

1) Se $u_l < u_r \Rightarrow F'(u_l) < F'(u_r) \Rightarrow$ NON ho INCROCIO
(Cioè le CARATTERISTICHE a SX vanno + lente di quelle a DX)

2) Se $u_l > u_r \Rightarrow F'(u_l) > F'(u_r) \Rightarrow$ ho INCROCIO



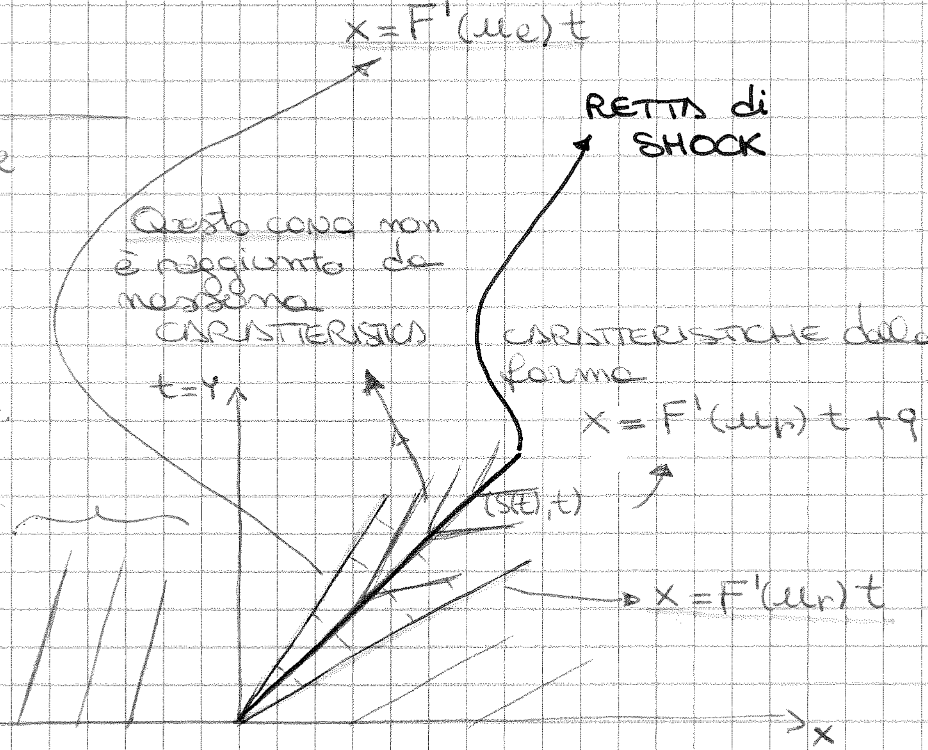
$$\dot{s} = \frac{\Delta F}{\Delta u} = \frac{F(u_r) - F(u_l)}{u_r - u_l}$$



$F'(u_r) < \dot{s} < F'(u_l)$

1) Quando non ho incrocio:

CARATTERISTICHE della forma
$x = F'(u_l)t + q$



$$\dot{s} = \frac{F(u_r) - F(u_e)}{u_r - u_e}$$

Le CARATTERISTICHE nascono da dove forniamo INFORMAZIONE

Non ci piace il fatto che ci sia una nuova sorgente di informazione.

Le CARATTERISTICHE non nascono dal fronte di SHOCK (RETTA di SHOCK)

↓

CONDIZIONE di ENTROPIA

↓

$$F'(u_r) < \dot{s} < F'(u_e)$$

Nel nostro caso non si verifica questa condizione, poiché nascono delle CARATTERISTICHE dalla RETTA di SHOCK.

L'idea è quindi ricoprire la regione del cono con delle CARATTERISTICHE che partono dall'ORIGINE, cioè vogliamo trovare i funzione $u = f\left(\frac{x}{t}\right)$

$$u_t + F(u)_x = 0$$

$$u_t + F'(u)\, u_x = 0$$

$$u_t = f'\left(\frac{x}{t}\right)\left(-\frac{x}{t^2}\right)$$

$$u_x = f'\left(\frac{x}{t}\right)\frac{1}{t}$$

$$-\frac{x}{t^2} f' + F'\left(f\left(\frac{x}{t}\right)\right) f' \frac{1}{t} = 0$$

$f' \neq 0$

$$F'\left(f\left(\frac{x}{t}\right)\right) = \frac{x}{t}$$

ONDA DI RAREFAZIONE

$$f = (F')^{-1}$$

$$u = (F')^{-1}\left(\frac{x}{t}\right) \longrightarrow$$ questa u soddisfa la funzione nel cono

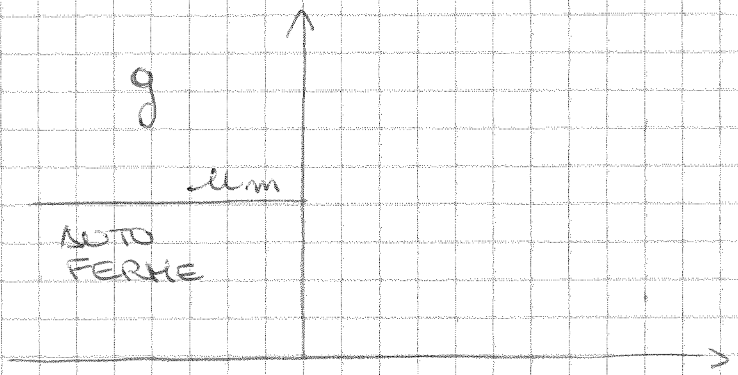
Es: PROBLEMA del SEMAFORO

$$u_t + (F(u))_x = 0$$

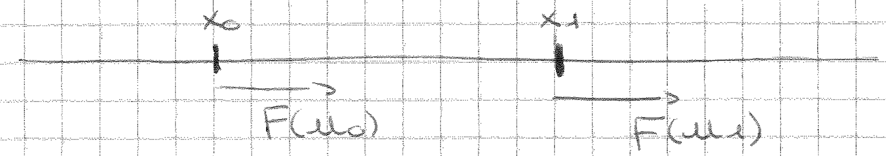
$$F(u) = u\, v(u)$$

velocità è tanto + grande, tanto più piccola è la densità di macchine (cioè se ci sono poche ")

$$v(u) = v_m \left(1 - \frac{u}{u_m}\right)$$



$$\frac{d}{dt}\int_{x_0}^{x_1} u\, dx = -F(u_1) + F(u_0)$$



La QUANTITÀ CONSERVATA è il numero di MACCHINE

$$F'(u) = v_m \left(1 - \frac{2u}{u_m}\right)$$

$$F'(u_l) = -v_m$$

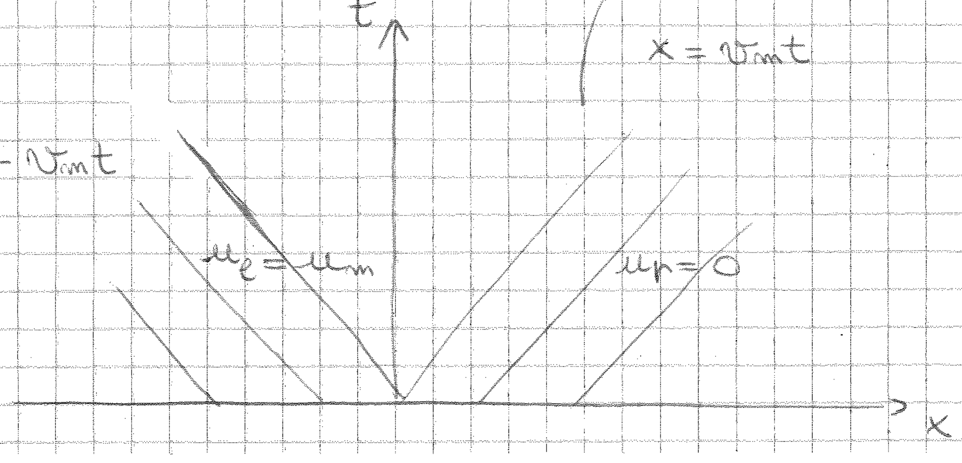
$$F'(u_r) = v_m$$

Le CARATT. a DX vanno avanti con VEL. v_m

$x = v_m t$

$x = -v_m t$

Le CARATT. a SX tornano INDIETRO con vel. $-v_m$



$$\frac{w}{v_m} = 1 - \frac{2u}{u_m}$$

$$\frac{2u}{u_m} = 1 - \frac{w}{v_m}$$

$$u = \frac{u_m}{2}\left(1 - \frac{w}{v_m}\right)$$

Quindi le soluzioni dentro il cono soddisfano l'equazione $\underbrace{u = \frac{u_m}{2}\left(1 - \frac{x}{v_m t}\right)}$

ONDA di RAREFAZIONE

EQ. di HAMILTON - JACOBI

$$\begin{cases} W_t + F(W_x) = 0 \\ W(q,0) = \int_0^q g(x)\,dx \end{cases} \quad (*)$$

$\longrightarrow$ è NON LINEARE del 1° ORDINE

W è l'AZIONE

W_x è la QUANTITÀ DI MOTO

$$\Rightarrow \begin{cases} W_{xt} + (F(W_x))_x = 0 \\ W_x(q,0) = g(q) \end{cases}$$

Pongo $u = W_x$

$$\Rightarrow \begin{cases} u_t + (F(u))_x = 0 \\ u(q,0) = g(q) \end{cases}$$

$\longrightarrow$ è QUASI LINEARE

$\longrightarrow$ CONSERVAZIONE della QUANTITÀ DI MOTO

La sol. di qst PROBLEMA può passare dalla sol. di $(*)$

EQ. NON LINEARI del 1° ORDINE

$F(Du, u, x) = 0 \quad (*)$ $\longrightarrow$ fa 0 perché u la soddisfa

$F: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

$(p, u, x) \longrightarrow F(p, u, x)$

Vogliamo applicare il METODO delle CARATTERISTICHE a queste funzioni e vedere se funziona

Data una sol. C^2 di $(*)$, $\exists$

$\gamma : t \longrightarrow (p(t), z(t), x(t))$

$p(t) := Du(x(t)) \qquad (p_j = u_{x^j}(x(t)))$

$z(t) := u(x(t))$

tale che γ soddisfa $\underbrace{\text{ODE}}_{\text{equazioni differenziali ordinarie}}$ del 1° ORDINE?

$$\frac{dp_j}{dt} = u_{x^j x^i} \dot{x}^i$$

$$F_{p_i} u_{x^i x^j} + F_z u_{x^j} + F_{x^j} = 0$$

Prendo $\dot{x}^i = F_{p_i}$ $\qquad u_{x^j} = p_j$

$$\Rightarrow \underbrace{u_{x^i x^j} \dot{x}^i}_{\dot{p}_j} + F_z p_j + F_{x^j} = 0$$

$$\Rightarrow \dot{p}_j = -F_{x^j} - F_z p_j$$

$$z = u(x(t))$$

$$\dot{z} = u_{x^i} \dot{x}^i = p_i F_{p_i}$$

Quindi il SISTEMA di EQ. ORDINARIE è:

$$\begin{cases} \dot{x}^i = F_{p_i}(p(t), z(t), x(t)) \\ \dot{p}_i = -F_{x^i} - F_z p_i \\ \dot{z} = F_{p_i} p_i \end{cases}$$

$b^i u_{x^i} = c$ $\longrightarrow$ EQ. QUASI LINEARE

oppure

$\bar{b}(u,x) \cdot \nabla u = c(u,x)$

$F = b^i p_i - c$

$F_{p_i} = b^i \Rightarrow F_{p_i} p_i = b^i p_i \underset{\downarrow}{=} c$
$(\text{se } F=0)$

[OSS: F lungo la CARATTERISTICA fa 0] ⊛

Quindi nel caso QUASI-LINEARE il sistema è

$$\begin{cases} \dot{x}^i = b^i(z,x) \\ \dot{z} = c \end{cases}$$

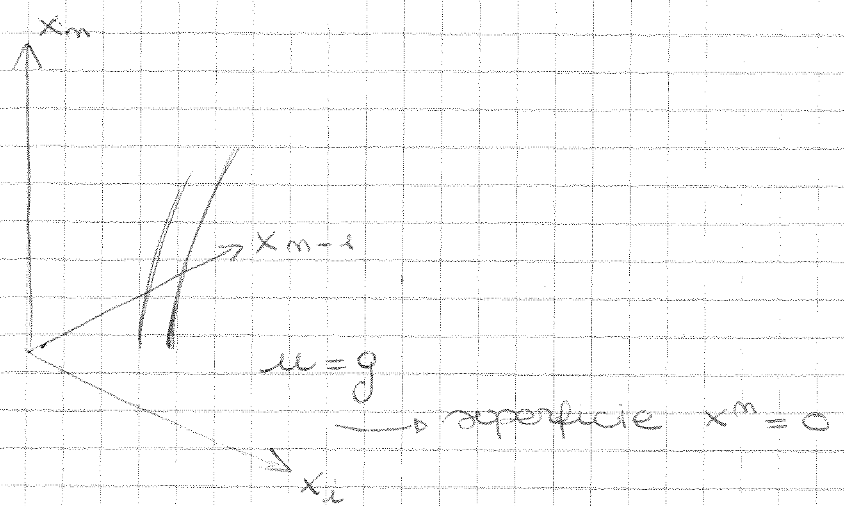
$\longrightarrow$ Non importa scrivere l'equazione per p

⊛ Infatti:

$\frac{dF}{dt} = F_{p_i}\dot{p}_i + F_z \dot{z} + F_{x^i}\dot{x}^i =$ $\longrightarrow$ usando l'equazione della CARATTERISTICA

$= F_{p_i}(-F_{x_i} - F_z p_i) + F_z(F_{p_i} p_i) + F_{x_i}(F_{p_i}) = 0$

$\Rightarrow$ F è costante



$$u_t + H(Du, \underset{\sim}{x}) = 0 \qquad x \in \mathbb{R}^n$$

$$H : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(t = x^{n+1})$$

$$F = p_{n+1} + H((p_1, \dots, p_n), (x_1, \dots, x_n)) = 0$$

(H non dipende da z)

caso $i = 1, \dots, n$

$$\dot{x}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$$

$$\dot{x}^{n+1} = 1 \implies x^{n+1} = t \longrightarrow \text{PARAMETRO EVOLUTIVO della CARATTERISTICA}$$

$i = 1, \dots, n$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial x^i} \qquad \text{(la derivata risp. a } z \text{ fa } 0)$$

$$\dot{p}_{n+1} = 0 \implies \underbrace{H}_{\text{HAMILTONIANA}} \text{ è COST. sulla CARATTERISTICA}$$

$\Downarrow$

$$\dot{z} = \frac{\partial H}{\partial p_i} p_i + p_{n+1} = \frac{\partial H}{\partial p_i} p_i - H = \underbrace{L}_{\text{LAGRANGIANA}} \quad \text{[è ENERGIA di CONSERVA]}$$

Abbiamo ottenuto le EQUAZIONI di HAMILTON:

$$\dot{x}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial x^i}$$

$$z = \underbrace{\int_0^t L \, dt}_{\text{AZIONE valutata sulla CURVA CARATTERISTICA } (*)} + \underbrace{g(x(0))}_{\text{condizione iniziale (dipende da dove sto partendo)}}$$

(INTEGRALE su CARATTERISTICA)

((*) In generale: l'INTEGRALE di 1 LAGRANGIANA è l'AZIONE)

Se le CARATTERISTICHE non si incrociano, la sol. della eq. di HAMILTON - JACOBI è l'AZIONE z.

$$\begin{cases} u_t + H(Du, \underbrace{x}_{\in \mathbb{R}^n}) = 0 \\ u(x,0) = g(x) \end{cases}$$

eq. di H. J. (eq. non lineare del 1° ordine)

$(t = x^{n+1})$

$u : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$(x, t) \longmapsto u(x,t)$

$F(Du, u, x) = 0$

$F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

$(p, z, x) \longmapsto F(p, z, x)$

$z(t) = u(x(t), t)$ → u valutata lungo la CARATTERISTICA

$t \longrightarrow (p(t), z(t), x(t))$ → CARATTERISTICA (ammesso che u sia sol.)

$p_i(t) = D_{x^i} u(x(t), t)$

$$\dot{x}^i = \frac{\partial F}{\partial p_i}$$

$$\dot{z} = \frac{\partial F}{\partial p_i} p_i$$

(derivando risp. a 1 indice basso, significa che l'indice è alto)

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial F}{\partial x^i} - \frac{\partial F}{\partial z} p_i$$

(derivando risp. a 1 indice alto, significa che l'indice è BASSO)

(se l'indice è in alto → stiamo parlando di 1 VETTORE
" " " " BASSO → " " " " COVETTORE,
ovvero di un elemento del duale di 1 sp. VETTORIALE)

oss:

Si contraggono sempre 1 elemento di livello ALTO (INDICE ALTO) e 1 elem di livello BASSO (INDICE BASSO)

$$F = p_{n+1} + H(\underbrace{\bar{p}}_{\substack{\parallel \\ (p_1 \dots p_n)}}, \bar{x})$$

1) $\dot{x}^i = \dfrac{\partial H}{\partial p_i}$

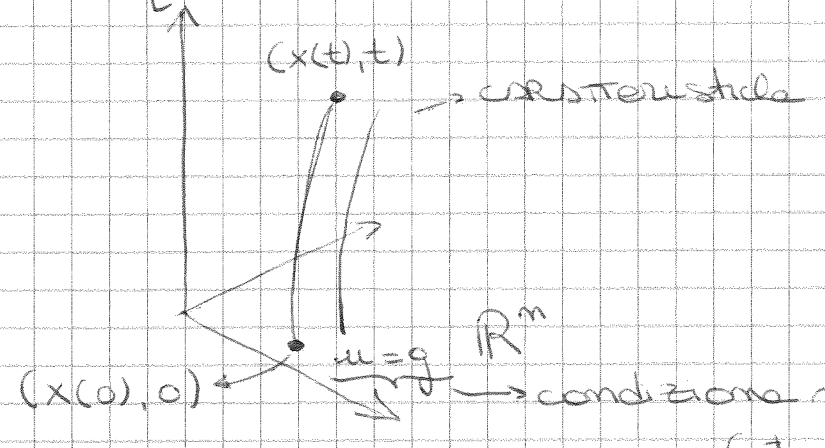
2) $\dot{z} = p_i \dfrac{\partial H}{\partial p_i} - H = L$ → TRASFORMATA di Legendre della LAGRANGIANA

3) $\dot{p}_i = - \dfrac{\partial H}{\partial x^i}$

1) e 3) eq di HAMILTON

In generale $L(x(t), \dot{x}(t), t)$

L è valutato sulla CARATTERISTICA



→ (dato integrando lungo la caratteristica che finisce nel p.to (x(t),t))

$$u(x,t) = \int_0^t L(x(t'), \dot{x}(t'))\, dt' + g(x(0)) \qquad (*)$$

→ non c'è dipendenza da t perché H non dip. da t

Se minimizzando il FUNZIONALE, il P.TO di MINIMO è proprio la CARATTERISTICA $\Rightarrow$ il valore di MINIMO è l'inf dell'espressione (*) calcolata su tutte le CURVE

I PUNTI DI MINIMO del FUNZIONALE

$$x(t') \longrightarrow \int_0^t L(x(t'), \dot{x}(t'), t')\, dt' = \underset{\text{FUNZIONALE AZIONE}}{S[x(t')]}$$

$(x : [0,t] \longrightarrow \mathbb{R}^n)$

soddisfano le EQUAZIONI di EULERO - LAGRANGE, cioè

$$-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} + \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

Supponiamo che $\forall\, \tilde{x}(t')$ $\quad (\tilde{x} : [0,t] \longrightarrow \mathbb{R}^n)$

$$S[x(t')] \leq S[\tilde{x}(t')]$$

cioè $x(t')$ è un MINIMO del funzionale AZIONE S

Sia $y : [0,t] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ funzione qualunque
$y(0) = 0$, $y(t) = 0$

$$\tilde{x}_\tau(t') = x(t') + \tau y(t')$$

$$S_\tau := S[\tilde{x}_\tau]$$

$$\forall \tau, \quad S_\tau \geq S_0 \qquad (S_0 = S[x(t')])$$

$$\left.\frac{dS_\tau}{d\tau}\right|_{\tau=0} = 0 \longrightarrow \text{perché è un p.to di MINIMO } (\tau = 0)$$

$$S_\tau = \int_0^t L(x(t') + \tau y(t'), \dot{x}(t') + \tau \dot{y}(t'), t')\, dt'$$

$\downarrow$
x ora è $\tilde{x}_\tau$

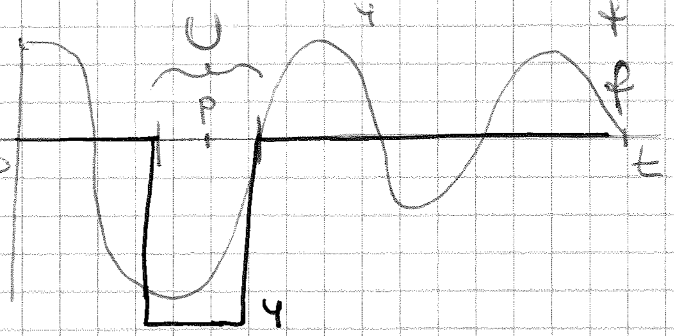
$$\left.\frac{dS_\tau}{d\tau}\right|_{\tau=0} = \int_0^t \Big(\frac{\partial L}{\partial x}\, y + \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot x}\,\dot y}_{= \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot x}y\right) - \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot x}\right)y} \Big)\, dt' =$$

$$= \int_0^t \underbrace{\left(\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot x}\right)}_{f} \underbrace{y}_{\text{funzione qualunque}}\, dt' + \underbrace{\left.\frac{\partial L}{\partial \dot x}\, y\right|_0^t}_{=0}$$

Se $f \neq 0$ in p

allora $f \neq 0$ in U intorno di p (per continuità)

Prendiamo $\underbrace{\mathrm{sgn}\, y}_{\text{segno di } y} = \underbrace{\mathrm{sgn}\, f}_{\text{segno di } f}$ in U, $y = 0$ fuori da U



(l'integrale sarebbe $\neq 0$ in U)

Supponiamo che $x(t')$ soddisfi Eulero-Lagrange

$$H(x,p,t) = \dot x^i \frac{\partial L(x,\dot x,t)}{\partial \dot x^i} - L(x,\dot x,t) = \dot x^i(x,p,t)\, p_i - L(x, \dot x^i(x,p,t), t)$$

$$p_i(x,\dot x,t) := \frac{\partial L}{\partial \dot x^i}(x,\dot x,t)$$

$\downarrow$

momento, o impulso, coniugato di x^i

Fissati x, t, supponiamo

$$\dot x \longrightarrow p(\dot x)$$

invertibile

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = \cancel{\frac{\partial \dot{x}^j}{\partial p_i} p_j} + \dot{x}^i - \cancel{\underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^k}}_{=p_k} \frac{\partial \dot{x}^k}{\partial p_i}}$$

$$\left(\dot{x}^k \frac{\partial p_k}{\partial p_i} = \dot{x}^k \delta_{ik} = \dot{x}^i \right)$$

$$p(t) = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\left(x(t), \dot{x}(t), t \right)$$

$\longrightarrow$ impulso coniugato calcolato sulla soluzione

$$\frac{\partial H}{\partial x^i} = \cancel{\frac{\partial \dot{x}^j}{\partial x^i} p_j} - \frac{\partial L}{\partial x^i} - \cancel{\underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^k}}_{=p_k} \frac{\partial \dot{x}^k}{\partial x^i}}$$

Le valutiamo sulle soluz. dell'eq. di E.-L.

$$\frac{d}{dt} p_i = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} = \frac{\partial L}{\partial x^i}$$

$$\frac{\partial H}{\partial x^i} = -\dot{p}_i$$

?

$\Rightarrow$ Le eq. di E-L (del 2° ordine) si possono sostituire nelle eq. di Hamilton (del 1° ordine)

Soluz. delle eq. di H-J nel caso più generale possibile

$$u(x,t) = \inf_{\substack{x(t') \\ \text{tale che} \\ x(t') = x}} \left\{ \int_0^t L\left(x(t'), \dot{x}(t'), t' \right) dt' + g(x(0)) \right\}$$

(cioè curve che partono dal p.to iniziale e arrivano al p.to x)

Prendendo l'inf sto prendendo proprio la CARATTERISTICA (non occorre dire quindi che integro lungo la // , ma lungo tutte le curve che partono da $x(0)$ e arrivano in (x,t))

Supponiamo che H non dipenda da x e t

Sia H C^2, convesso e superlineare e sia g LIPSCHITZ

Allora per $t > 0$

$$u(x,t) = \min_{y \in \mathbb{R}^n} \left\{ t\, L\left(\frac{x-y}{t} \right) + g(y) \right\} \rightarrow \text{HOPE - LAX}$$

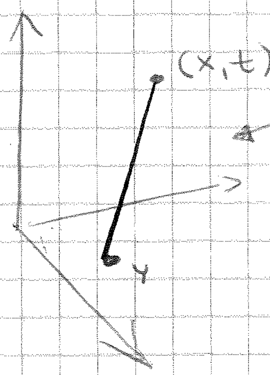
(y gioca il ruolo del pto $x(0)$)

dim :

- Dimostro $\leq$ (con l'inf al posto del min)

Considero una CURVA particolare :

$$t' \longrightarrow x(t') = y\left(1 - \frac{t'}{t}\right) + x\,\frac{t'}{t} \quad \rightarrow \text{è una } \underline{\text{RETTA}}$$



per $t' = 0 \Rightarrow x(t') = y$

per $t' = t \Rightarrow x(t') = x$

$$\dot{x}(t') = \frac{x-y}{t} \rightarrow \text{velocità della CURVA (che non dipende da } t'\text{)}$$

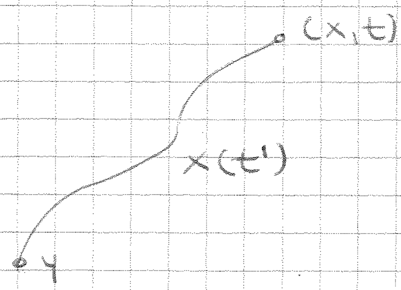
$$u(x,t) \leq \int_0^t \underbrace{L(\dot{x}(t'))}_{\substack{\text{non dipende da}\\ x \text{ e } t \text{ poiché}\\ H \text{ non dipende da}\\ x \text{ e } t}} dt' + g(\underbrace{x(0)}_{=y}) \leq$$

$$\leq t\, L\left(\frac{x-y}{t} \right) + g(y)$$

$$\Longrightarrow u(x,t) \leq \inf_{y} \left\{ t\, L\left(\frac{x-y}{t}\right) + g(y) \right\}$$

•) Dim. $\geq$

prendo 1 qualunque curva $x(t')$



$$\frac{1}{t}\int_0^t L(\dot{x}(t'))\, dt' \geq L\left(\frac{1}{t}\int_0^t \dot{x}(t')\, dt'\right) =$$

disuguaglianza di JENSEN

vale qsta poiché H è CONVESSA

$$= L\left(\frac{x - x(0)}{t}\right)$$

$$u(x,t) = \inf_{\substack{x(t') \\ t.c.\ x(t')=x}} \left\{ \int_0^t L(x(t'), \dot{x}(t'), t')\, dt' + \underbrace{g(x(0))}_{\text{costante}} \right\} \geq$$

$$\geq \inf_{x(0)} \left\{ t\, L\left(\frac{x - x(0)}{t}\right) + g(x(0)) \right\}$$

Abbiamo dim. la formula con l'inf, ma il min può essere raggiunto

H superlineare significa:

$$\lim_{p \to \infty} \frac{H(p)}{|p|} = +\infty$$

Se H è SUPERLINEARE $\Longrightarrow$ L è SUPERLINEARE

Se y la posso limitare a 1 COMPATTO $\Rightarrow$ il min c'è poiché sto facendo l'inf di 1 funzione continua

$$tL\left(\frac{x-y}{t}\right)+g(y) = |y|\left\{ t\,\underbrace{\frac{L\left(\frac{x-y}{t}\right)}{|y|}}_{\to +\infty} + \underbrace{\frac{g(y)}{|y|}}_{> -K} \right\} \longrightarrow +\infty$$

poiché g è LIPSCHITZ

Poiché

$$\frac{L\left(\frac{x-y}{t}\right)}{\frac{|y|}{\left|\frac{x-y}{t}\right|}\left|\frac{x-y}{t}\right|}$$

$\frac{L\left(\frac{x-y}{t}\right)}{\left|\frac{x-y}{t}\right|} \longrightarrow +\infty$ poiché L è superlineare

$\frac{|y|}{\left|\frac{x-y}{t}\right|} \longrightarrow 1$

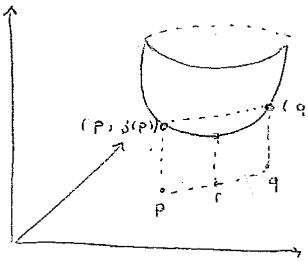
Allora la funzione va a $+\infty$, mandando y all'infinito, quindi c'è l'inf e quindi posso limitare y a un COMPATTO

$\Rightarrow$ l'inf posso sostituirlo con il MIN

$f : V \longrightarrow \mathbb{R}$ è convessa se

V spazio vettoriale

$$\forall \tau \in [0,1] \quad \text{vale} \quad f(\underbrace{\tau p + (1-\tau) q}_{x}) \leq \tau f(p) + (1-\tau) f(q)$$

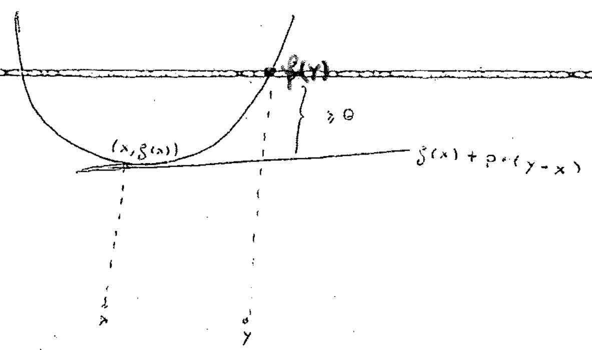


la retta che congiunge $(p, f(p))$ e $(q, f(q))$ sta sopra $f(r)$

Se f è convessa, allora f è continua

Il SUBDIFFERENZIALE in x è

$$\partial f(x) = \{ p \in \underset{\text{duale}}{V^*} : \forall y \ \ \underbrace{f(y) \geq \underbrace{f(x) + p \cdot (y-x)}_{\substack{\text{funzione affine} \\ \text{è un piano}}}}_{\text{il piano sta tutto sotto il grafico}} \}$$

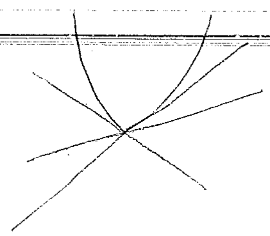


Se la funzione è C^1 $\Rightarrow$ abbiamo un solo piano con questa proprietà

Se $f \in C^1 \Leftrightarrow \partial f = \{ \overset{\text{differenziale}}{df} \} \quad \forall x$

(l'insieme si riduce a un solo elemento)

Se f non è C^1 possono esistere più piani



$\partial f \neq \emptyset$ ← sempre vero, per qualsiasi funzione convessa

f è SUPERLINEARE se

$$\lim_{v \to \infty} \frac{f(v)}{|v|} = +\infty$$

Se $\{e_i\}$ è una base

$$\bar{v} = v^i e_i$$

$$|v| := \sqrt{v^i \delta_{ij} v^j}$$

$\exists\, a, b > 0 : a|v|' \leq |v| \leq b|v|'$ (il ' indica che ci si riferisce ad un'altra base)

Il limite in realtà non dipende dalla norma nello spazio vettoriale

Sia $L : V \longrightarrow \mathbb{R}$ convessa e superlineare

$$v \longmapsto L(v)$$

definiamo TRASFORMATA DI LEGENDRE - FENCHEL

$$L^* : V^* \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$L^*(p) = \sup_{v \in V} (p \cdot v - L(v))$$

spesso si denota $H(p)$

TEOREMA

H è convessa, superlineare e $H^* = L$

Dim

<u>CONVESSA</u>

$$H(\tau p + (1-\tau) q) = \sup_v \{(\tau p + (1-\tau) q) \cdot v - L(v)\} = \sup_v \{\tau p \cdot v + (1-\tau) q \cdot v - \underbrace{L(v)}_{\tau L(v) + (1-\tau) L(v)}\} =$$

$= \sup_v \{ \tau (p \cdot v - L(v)) + (1-\tau)(q \cdot v - L(v)) \} \leq$

$\leq \tau \sup_v (p \cdot v - L(v)) + (1-\tau) \sup_v (q \cdot v - L(v))$

$= \tau H(p) + (1-\tau) H(q)$

$\Rightarrow H(\tau p + (1-\tau) q) \leq \tau H(p) + (1-\tau) H(q)$

SUPERLINEARE

$\lambda > 0$, fissiamo un prodotto scalare su V $\quad \cdot : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$

$H(p) = \sup_v (p \cdot v - L(v)) \geq p \cdot (\lambda \hat{p}) - L(\lambda \hat{p}) \geq \lambda |p| - \sup_{B(\lambda)} L$

scelgo un v particolare $v = \lambda \hat{p}$ ($\hat{p}$ versore)

L valutata su una sfera di raggio λ

$\lim_{p \to \infty} \frac{H(p)}{|p|} \geq \lambda \quad \forall \lambda$

(si introduce il prodotto scalare per dare un senso al limite)

non dipende dal prodotto scalare che abbiamo usato

$H^* = L$

$H(p) = \sup_v (p \cdot v - L(v))$

$\Rightarrow \forall p, v \quad H(p) \geq p \cdot v - L(v)$

$L(v) \geq p \cdot v - H(p) \quad \forall p, v$

$L(v) \geq \sup_p (p \cdot v - H(p)) = H^*(v)$

$\Rightarrow L(v) \geq H^*(v)$

Viceversa

$H^*(v) = \sup_p (p \cdot v - H(p)) = \sup_p \left(p \cdot v - \sup_{x \in V} (p \cdot x - L(x)) \right)$

$= \sup_{p \in V^*} \inf_{x \in V} (p \cdot (v-x) + L(x))$

$\exists\, s(v) \in V^* : \forall x \in V \quad L(x) \geq L(v) + s(v) \cdot (x-v) \Rightarrow s(v) \cdot (v-x) + L(x) \geq L(v) \quad \forall x$

Quindi

$H^*(v) \geq \inf_x (s \cdot (v-x) + L(x)) \geq L(v)$

$\Rightarrow H^* \geq L$

$H: V^* \longrightarrow \mathbb{R}$

$H(p) = \sup_v (p \cdot v - L(v))$

Il problema è se il sup è finito o no. Ovviamente H potrebbe valere $+\infty$

$H(p) = \sup_v (p \cdot v - L(v)) = \sup_v |v| \left(p \cdot \frac{v}{|v|} - \frac{L(v)}{|v|} \right)$

sempre introducendo un prodotto scalare

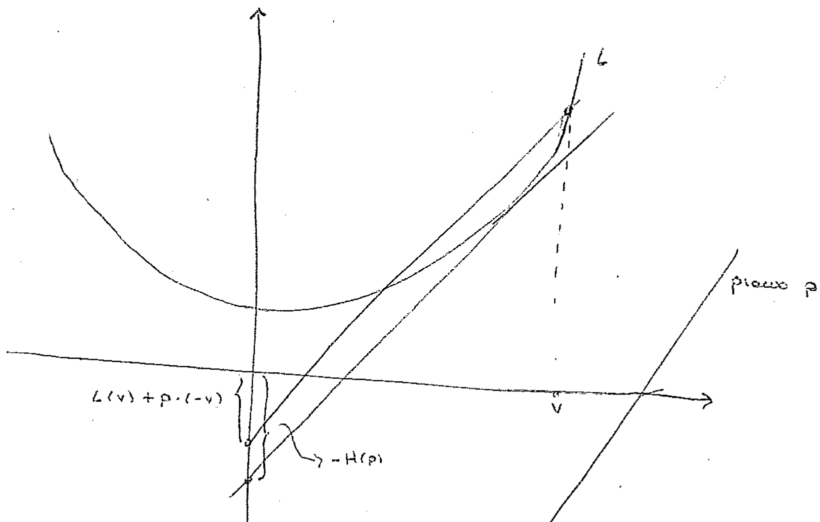
per v suff. grande questa quantità diventa negativa $\left(\text{poiché } \frac{L(v)}{|v|} \longrightarrow +\infty \right) \Rightarrow$ possiamo limitarci a un compatto

$\Rightarrow \exists$ un punto che raggiunge il sup $\Rightarrow$ è finito

$f = \sqrt{1 + x^2}$ è convessa ma non superlineare

$H(p) = - \inf_v (L(v) + p \cdot (-v))$

$- H(p) = \inf_v (L(v) + p \cdot (-v))$



TEOREMA

Sia L convessa e superlineare

Sono equivalenti

a) $p \in \partial L(v)$

b) $v \in \partial H(p)$

c) $L(v) + H(p) = p \cdot v$

Dim

$v \in \partial H(p) \Rightarrow p \in \partial L(v)$

Infatti:

$v \in \partial H(p)$ significa

$\forall x \quad H(x) \geq H(p) + v(x-p)$ (v individua un piano di supporto)

$\forall x \quad p \cdot v - H(p) \geq v \cdot x - H(x)$

$p \cdot v - H(p) \geq \sup_x (v \cdot x - H(x)) = L(v)$

$p \cdot (v-w) + (p \cdot w - H(p)) \geq L(v)$

$p \cdot w - H(p) \geq L(v) + p \cdot (w-v)$

$L(w) = \sup_q (q \cdot w - H(q)) \geq L(v) + p \cdot (w-v) \qquad \forall w$

$\Rightarrow p \in \partial L(v)$

Per dualità vale anche (a) $\Rightarrow$ (b)

Quindi abbiamo dimostrato (a) $\Leftrightarrow$ (b)

Ora si dimostra:

se $v \in \partial H(p) \Rightarrow H(p) + L(v) = p \cdot v$

se $v \in \partial H(p) \Rightarrow p \cdot v - H(p) \geq L(v)$ (lo abbiamo già visto)

per definizione

$H(p) = \sup_w (p \cdot w - L(w)) \geq p \cdot v - L(v)$

$$\begin{cases} H(p) + L(v) \leq p \cdot v \\ H(p) + L(v) \geq p \cdot v \end{cases} \Rightarrow H(p) + L(v) = p \cdot v$$

Dimostriamo che

se $H(p) + L(v) = p \cdot v \Rightarrow p \in \partial L(v)$

$H(p) = p \cdot v - L(v)$

$\sup_w (p \cdot w - L(w)) = p \cdot v - L(v)$

$\forall w \quad p \cdot w - L(w) \leq p \cdot v - L(v)$

$\forall w \quad L(w) \geq p \cdot (w-v) + L(v)$

$\Rightarrow p \in \partial L(v)$

✓

COROLLARIO

Se L e M sono C^1, allora

$v \longrightarrow dL(v)$ e' biettiva

$M^n = \{ (U_\alpha, \varphi_\alpha) \}$ ATLANTE

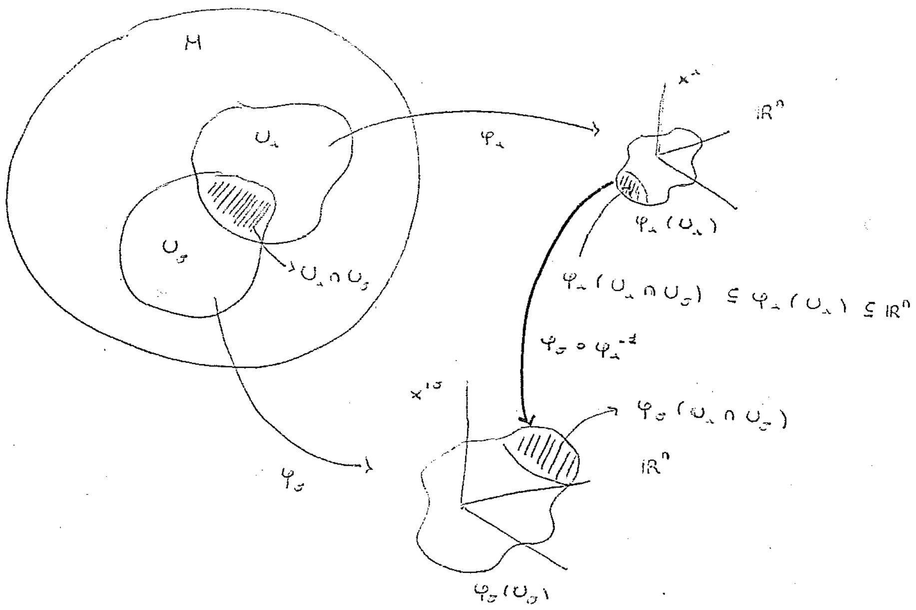
e' un insieme di mappe

$\varphi_\alpha : U_\alpha \longrightarrow \mathbb{R}^n$ iniettive

con U_α aperti di uno spazio topologico

φ_α sono tali che

$$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \longrightarrow \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \in C^k$$



$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} \longrightarrow x' = x'(x)$

$x'^\beta = x'^\beta(x^\alpha)$ ← CAMBIO DI COORDINATE

$f : M \longrightarrow \mathbb{R}$

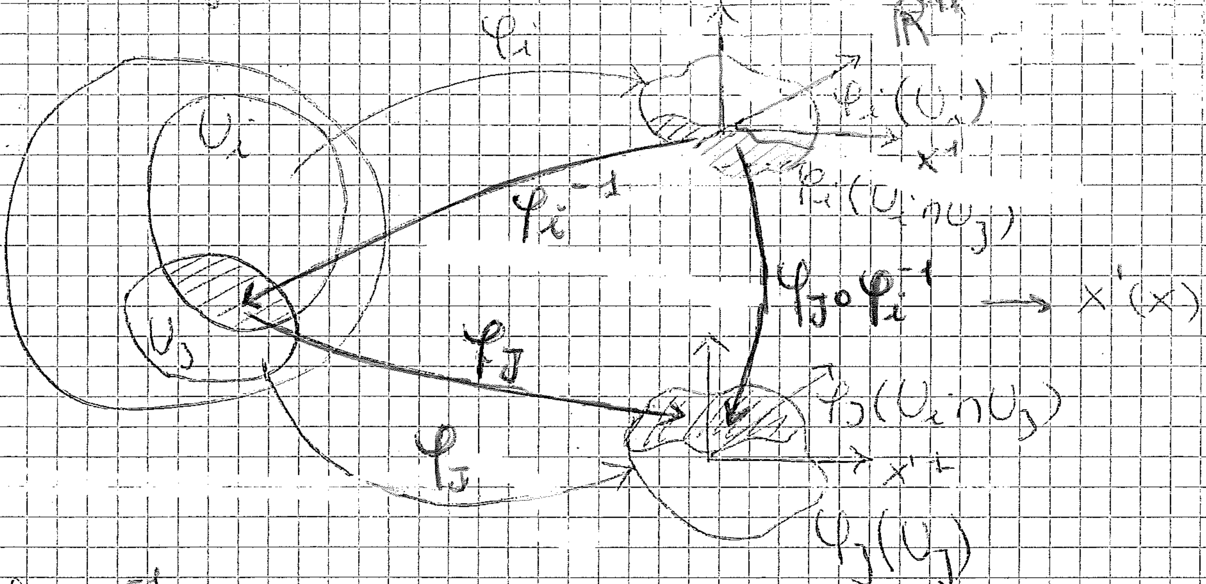
$\underbrace{f \circ \varphi_\alpha^{-1}}_{f(x)} : \underbrace{\varphi_\alpha(U_\alpha)}_{\subseteq \mathbb{R}^n} \longrightarrow \mathbb{R}$

$f \circ \varphi_\beta^{-1} \longrightarrow f(x') = f(x(x'))$

VARIETÀ DIFFERENZIABILI

$M = \{(U_i, \varphi_i)\}$ $\quad \varphi_i : U_i \to \mathbb{R}^n$ biiettive

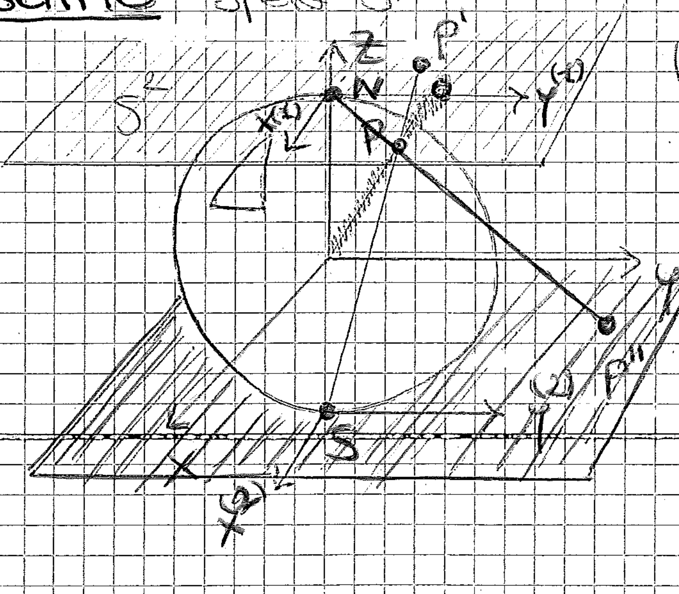
tali che $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$ è C^k



$\varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(U_i \cap U_j) \to \varphi_j(U_i \cap U_j)$

$x'^\mu = x'^\mu(x^\nu)$

Esempio Sfera S^2



P' è sul piano, $P \in S^2$

$U_1 = S^2 \setminus \{S\}$

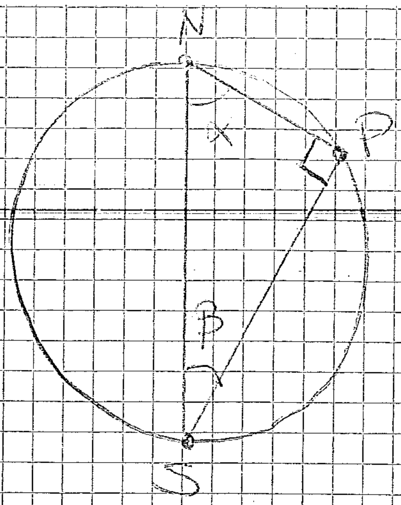
$U_2 = S^2 \setminus \{N\}$

$\varphi_1 : U_1 \to \mathbb{R}^2$

proiezione stereografica (parto da S congiungo a P e trovo P')

posso usare $x^{(1)}$ e $y^{(1)}$ come coordinate per P

$\varphi_2 : U_2 \to \mathbb{R}^2$ proiez stereografica (uso $x^{(2)}$ e $y^{(2)}$ come coordinate per P)



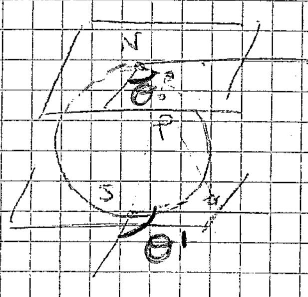
$$\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$$

$$r' = \sqrt{(x^{(2)})^2 + (y^{(2)})^2}$$

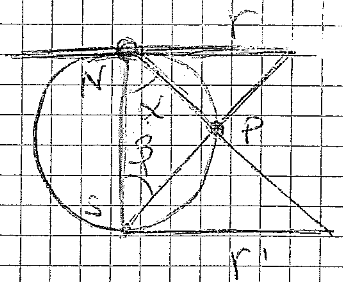
$$r = \sqrt{(x^{(1)})^2 + (y^{(1)})^2}$$

r' = dist. di P'' da S

r = dist. di P' da N



per costruzione, $\theta = \theta'$



$$r = 2\,\mathrm{tg}\,\beta$$

$$r' = 2\,\mathrm{tg}(\alpha)$$

$$\mathrm{tg}(\beta) = \frac{1}{\mathrm{tg}(\alpha)}$$

$$\Rightarrow \quad r = \frac{4}{r'}$$

$$x^{(2)} = r'\cos\theta' = \frac{4}{r}\cos\theta = \frac{4}{r^2}\, r\cos\theta = \frac{4}{r^2}\, x^{(1)}$$

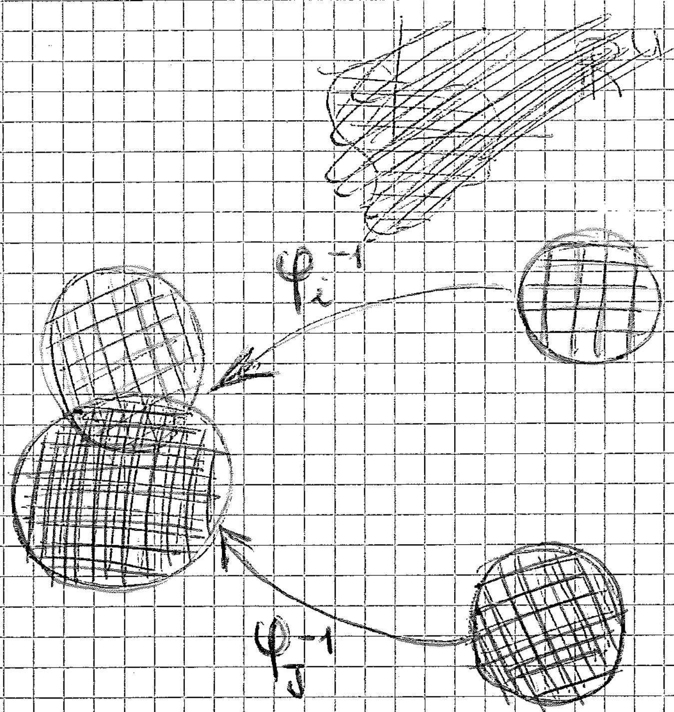
$$\begin{cases} x^{(2)} = \dfrac{4\, x^{(1)}}{(y^{(1)})^2 + (x^{(1)})^2} \\[2em] y^{(2)} = \dfrac{4\, y^{(1)}}{(y^{(1)})^2 + (x^{(1)})^2} \end{cases}$$

$U_1 \cap U_2 = S^2 \setminus \{N, S\}$

$\varphi_1(U_1 \cap U_2) = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$

$\varphi_2(U_1 \cap U_2) = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$

queste due CARTE sono incollate da quel CAMBIAMENTO di coordinate



Le quadrettature non sono le stesse, per questo ci servono mappe per il cambio di coordinate

Le varietà diff.li non vanno pensate come immerse in $\mathbb{R}^n$ ($\Rightarrow$ le v.d. hanno una geometria intrinseca)

SPAZIO TANGENTE

Date $\{x^i\}$ coordinate locali (= carta) di M, definite in un aperto $U \subseteq M$ (quindi $(U, \{x^i\})$ è una carta)

Dato $p \in U$ consideriamo gli operatori differenziali

$$\underbrace{v^i \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p}_{\text{è una somma per } i} \qquad v^i \text{ coefficienti}$$

Dato $f : U \to \mathbb{R}$, mandiamo $f \to v^i \dfrac{\partial f}{\partial x^i}\Big|_p$

(f si può pensare, per la carta, come una funzione da $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}$)

Allora definiamo $T_pM = \left\{ v^i \dfrac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p \right\}$ che è uno spazio vettoriale.

Definendo $e_i := \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p$ $\{e_i\}$ è una base di T_pM

Che succede cambiando sistema di coordinate?
(è ~~mal~~ posta la def?)

$$\frac{\partial}{\partial x^i} = \underbrace{\frac{\partial x'^j}{\partial x^i}}_{\text{jacobiano (è una matrice invertibile)}} \frac{\partial}{\partial x'^j}$$

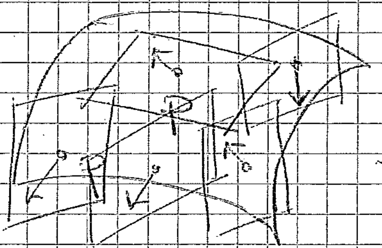
$$\left\{ v^i \frac{\partial}{\partial x^i} \right\}_p = \left\{ \underbrace{v^i \frac{\partial x'^j}{\partial x^i}}_{\text{nuovi coefficienti}} \frac{\partial}{\partial x'^j} \right\}_p = \left\{ v'^j \frac{\partial}{\partial x'^j} \right\}_p$$

$$e'_j := \frac{\partial}{\partial x'^j}$$

Dunque T_pM è ben definito.

TM := fibrato tangente = tangente

$$TM = \bigcup_{p \in M} T_pM$$



sono le DIREZIONI di DERIVAZIONE

è insieme di tutti i piani è il fibr. tangente

TM è una varietà differenziabile, di coordinate locali $\{x^i, v^i\}$

Quale è il cambio di carta?

$$\begin{cases} x'^j = x'^j(x^i) \\ v'^j = \dfrac{\partial x'^j}{\partial x^k} v^k \end{cases}$$

(nell'esempio, $x^1 = x^1$, $y^1 = x^2$, $x^2 = x'^1$, $y^2 = x'^2$)

questa applicazione manda

$$\{x^i, v^i\} \to \{x'^j, v'^j\}$$

Sia $v \in T_pM$

$\left\{ e_i = \frac{\partial}{\partial x^i} \right\}$ e' base

$\left\{ e'_j = \frac{\partial}{\partial x'^j} \right\}$ $\qquad v = v^i e_i = v'^j e'_j$

$$v'^j e'_j = \frac{\partial x'^j}{\partial x^k} v^k \frac{\partial}{\partial x'^j} = v^k e_k = v$$

$T^*_pM := (T_pM)^*$ cotangente in $p \in M$

$$\overset{\shortparallel}{\{ \omega_i e^i \}} \leftarrow \text{e' una somma sui } i$$

$\{e^i\}$ base **duale** di $\{e_i\}$

$\left(e^k(e_i) = \delta^k_i \quad \text{proprietà base duale} \right)$

La base duale di $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^i} \right\}$ si denota anche $\{ dx^j \}$

$$\Rightarrow dx^j \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right) = \delta^j_i$$

Come cambia la base duale? $\quad dx'^j = \frac{\partial x'^j}{\partial x^i} dx^i$

$$\frac{\partial}{\partial x'^k} = \underbrace{\frac{\partial x^i}{\partial x'^k}}\, \frac{\partial}{\partial x^i}$$

la base duale CAMBIA con la trasposta di questa, cioè CONTRAIAMO l'altro indice.

Come cambiano le componenti del duale?

$$\omega'_i = \frac{\partial x^k}{\partial x'^i} \omega_k$$

$$\omega \in T^*_pM$$

$$\left. \begin{aligned} dx'^j &= \frac{\partial x'^j}{\partial x^i} dx^i \\ \omega'_i &= \frac{\partial x^k}{\partial x'^i} \omega_k \end{aligned} \right\} \Rightarrow \omega'_i dx'^i \overset{\shortparallel}{=} \omega_i dx^i$$

$T^*M = \bigcup_{p \in M} T_p^* M$ ← FIBRATO COTANGENTE

è una varietà differenziabile

~~di coordinate locali~~ $\{x^i, p_i\}$ ← ω_i di prima

$$\begin{cases} x'^i = x'^i(x^j) \\ p'_j = \dfrac{\partial x^k}{\partial x'^j} p_k \end{cases}$$

Ogni sistema di coordinate Pavona? lavora con se stesso, per questo a volte si scrive $x^{j'}$ invece di x'^j.

METRICA

$g_p : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$ metrica definita sul piano tangente in p

$(v, w) \longmapsto g_p(v, w)$

$g : TM \times TM \to \mathbb{R}$, in ogni p diventa g_p, così l'ho su tutto TM

$g(v, w) = g(v^i e_i, w^j e_j)$ bilineare, simmetrica, non degenere

$g(v, w) = v^i w^j g(e_i, e_j) \overset{def}{=} g_{ij} v^i w^j$

Dunque $g = g_{ij}\, dx^i \otimes dx^j$, con $g_{ij} = g(e_i, e_j)$

$$g(v, w) = g_{ij}\, dx^i \otimes dx^j \left(v^s \frac{\partial}{\partial x^s}, w^k \frac{\partial}{\partial x^k} \right) =$$

$$= g_{ij} v^s \delta_s^i w^k \delta_k^j = g_{ij} v^i w^j$$

Notazione impropria usata a volte: $g = g_{ij}\, dx^i dx^j$

VARIETÀ RIEMANNIANA (DEFINIZIONE)

(M, g) con g definita positiva $\Rightarrow$ GEOMETRIA RIEMANNIANA

$x: [0, 1] \longrightarrow M$ curva

$t \longmapsto x(t)$

$\ell(x) = \int_0^1 \sqrt{g(\dot{x}, \dot{x})}\, dt$ sto usando la metrica per valutare la lunghezza della curva su M

Se g ha segnatura $(-, +, +, \dots, +) \Rightarrow$ geometria lorentziana

---

$F(Du, u, x) = 0$

$(P_i, z, x) \longrightarrow F(P_i, z, x)$

$\underbrace{Du \in T^* \mathbb{R}^n}$, $Du = \frac{\partial u}{\partial x^i} dx^i$

in quanto prende

$X \in T\mathbb{R}^n$ (cioè un vettore)

e lo manda in $D_X u \in \mathbb{R}$, $X \longmapsto D_X u$ è lineare in X

(ogni vettore viene mandato in un numero)

$\Rightarrow Du \in T^* \mathbb{R}^n$

$F: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ lineare

È meglio vederla con le varietà: x e P sono le coordinate del cotangente

$F: T^*M \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$((P, x), z)$

Quindi il concetto è più generale, che vive nelle varietà differenziali (per eq. di ordine ≥ 2 dovremo introdurre altri fibrati)

52

M = spazio-tempo , TM = spazio delle velocità

T^*M = spazio dei momenti

Andiamo a considerare

$$F(D^2u, Du, u, x) = 0$$

$$(P_{ij}, P_i, z, x) \longrightarrow F(P_{ij}, P_i, z, x)$$

$$z = u(x), \quad P_i = \frac{\partial u}{\partial x^i}(x), \quad P_{ij} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^i \partial x^j}(x)$$ ← sostituendoci tutto questo ottengo 0

$$P'_i = \frac{\partial u}{\partial x'^i} = \frac{\partial u}{\partial x^k} \frac{\partial x^k}{\partial x'^i} = P_k \frac{\partial x^k}{\partial x'^i}$$

$$P'_{ij} = \frac{\partial^2 u}{\partial x'^i \partial x'^j} = \frac{\partial}{\partial x'^i}\left(\frac{\partial u}{\partial x^k} \frac{\partial x^k}{\partial x'^j}\right) =$$

$$= \frac{\partial u}{\partial x^k} \frac{\partial}{\partial x'^i} \frac{\partial x^k}{\partial x'^j} + \frac{\partial x^k}{\partial x'^j} \frac{\partial}{\partial x'^i} \frac{\partial u}{\partial x^k} =$$

$$= P_k \frac{\partial}{\partial x'^i} \frac{\partial x^k}{\partial x'^j} + \frac{\partial x^k}{\partial x'^j} \cancel{\frac{\partial}{\partial x'^i} P_k} \frac{\partial x^s}{\partial x'^i} \frac{\partial^2 u}{\partial x^s \partial x^k}$$

$$= \frac{\partial x^k}{\partial x'^j} \frac{\partial x^s}{\partial x'^i} P_{sk} + \left(\frac{\partial}{\partial x'^i} \frac{\partial x^k}{\partial x'^j}\right) P_k$$

Posso quindi considerare una varietà diff. in cui la legge del cambio di carta è data da

$$\begin{cases} x'^i = x'^i(x^k) \\ P'_i = \dfrac{\partial x^k}{\partial x'^i} P_k \\ P'_{ij} = \text{vedi sopra} \end{cases}$$

(← scegliendo $i<j$, perché non interessano le derivate e per Schwartz $\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2}{\partial y \partial x}$)

Questa varietà si chiama FIBRATO DEI GETTI $(J^2 Y)$

Un' eq. diff. è 1 funz. (IPERSUPERFICIE o VINCOLO) in J^2M

---

1) M varietà differenziabile di coordinate $\{x^i\}$

2) TM " " " " $\{x^i, v^i\}$

3) T^*M " " " " $\{x^i, p_i\}$

4) J^2M " " " " $\{x^i, \underbrace{p}_{=z}, p_i, p_{ij}\}$

$z \downarrow$ valore di u nel p.to di espansione di TAYLOR

CAMBIO di COORDINATE:

1) $x'^i = x'^i(x^j)$

2) $\begin{cases} x'^i = x'^i(x^j) \\ v'^i = \dfrac{\partial x'^i}{\partial x^j} v^j \end{cases}$

(OSS: M si chiama BASE, TM TANGENTE, T^*M COTANGENTE, J^2M GETTI d'ORDINE 2)

3) $\begin{cases} x'^i = x'^i(x^j) \\ p'_i = \dfrac{\partial x^j}{\partial x'^i} p_j \end{cases}$

4)

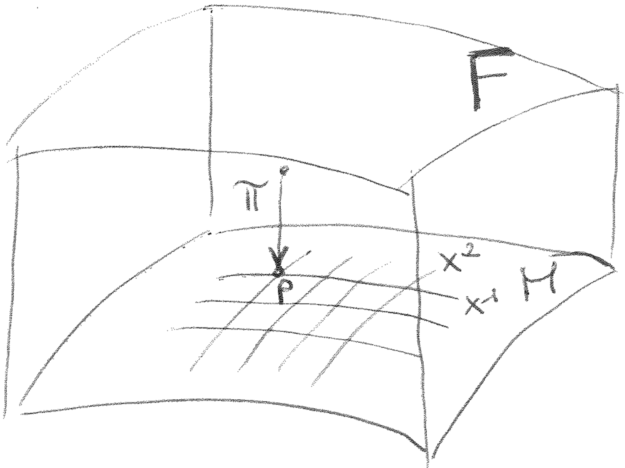
$$\begin{cases} x'^i = x'^i(x^j) \\ p'_i = \dfrac{\partial x^j}{\partial x'^i} p_j \\ p'_{ij} = \dfrac{\partial x^k}{\partial x'^j} \dfrac{\partial x^s}{\partial x'^i} p_{sk} + \left(\dfrac{\partial}{\partial x'^i} \dfrac{\partial x^k}{\partial x'^j} \right) p_k \\ p' = p \end{cases}$$

Tutte queste STRUTTURE si chiamano FIBRATI, poiché esiste 1 APPLICAZIONE $\pi : F \longrightarrow M$

$F = TM \qquad (x^i, v^i) \xrightarrow{\pi} x^i$

$F = T^*M \qquad (x^i, p_i) \xrightarrow{\pi} x^i$

$F = J^2 M \qquad (x^i, p_i, p_{ij}) \xrightarrow{\pi} x^i$



$\pi^{-1}(p) =$ FIBRA di p (La FIBRA è uno SPAZIO VETTORIALE)

Se $F = TM$, $\pi^{-1}(p) = T_p M$ → è uno SPAZIO TANGENTE

Se $F = T^*M$, $\pi^{-1}(p) = T^*_p M$ → è lo spazio cotangente

$$\underbrace{T^{(a,b)}M}_{\downarrow} = \bigcup_{p\in M} (\underbrace{T_p M}_{\text{è 1 SP. VETT.}})^a \otimes (\underbrace{T_p^* M}_{\text{è il DUALE dello SP. VETT.}})^b$$

è il FIBRATO TENSORIALE di tipo (a, b), cioè

a VOLTE <u>CONTROVARIANTE</u> → (è la parte del TANGENTE)

b " e <u>COVARIANTE</u> → (" " " " COTANGENTE)

Se $t \in T^{(a,b)}M$

$$t = t^{i_1 i_2 \dots i_a}_{j_1 j_2 \dots j_b}\, e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_a} \otimes e^{j_1} \otimes \dots \otimes e^{j_b}$$

$$g : M \longrightarrow (T^*M)^2$$

$$g = g_{ij}\, e^i \otimes e^j$$

$$u : M \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$p_i = \frac{\partial u}{\partial x^i}\Big|_x$$

$$p_{ij} = \frac{\partial u}{\partial x^i \partial x^j}\Big|_x$$

Siamo in grado di costruire 1 VARIETÀ DIFFERENZIABILE $J^k M$ che è un FIBRATO, infatti c'è un'APPLICAZIONE π

$$\pi : J^k M \longrightarrow M$$

$$u : M \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\underbrace{J^k_p u} \in \pi^{-1}(p)$$

è un altro modo per scrivere:

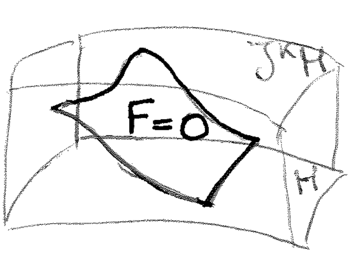
$$= \left(u(p),\ \frac{\partial u}{\partial x^i}(p),\ \dots,\ \frac{\partial^k u}{\partial x^{i_1} \dots \partial x^{i_k}}(p) \right)$$

Sia data

$$F : J^k M \longrightarrow \mathbb{R}$$

tale che $dF \neq 0$ in $\{F = 0\}$

$\Rightarrow$ il luogo $\{F = 0\}$ diventa 1 IPERSUPERFICIE REGOLARE



Allora $u : M \to \mathbb{R}$ risolve l'eq. DIFFERENZIALE (di ORDINE $\leq K$) determinata da F se $\forall p \in M \quad F(J^K_p u) = 0$

L'eq. DIFF. è di ORDINE K se

$$\frac{\partial F}{\partial p_{i_1 \dots i_K}} \neq 0 \quad \text{in } \{F = 0\}$$

(*) fa 0 perché x'^i non dipende da p_{ij}, infatti $x'^i = x'^i(x^j)$

Vediamo come TRASFORMA $\frac{\partial F}{\partial p_{ij}}$ quando CAMBIO CARTA con $F : J^2 M \to \mathbb{R}$

$$\frac{\partial F}{\partial p_{ij}} = \frac{\partial F}{\partial x'^K} \underbrace{\frac{\partial x'^K}{\partial p_{ij}}}_{(*) = 0} + \frac{\partial F}{\partial p'} \underbrace{\frac{\partial p'}{\partial p_{ij}}}_{= 0} + \frac{\partial F}{\partial p'_K} \underbrace{\frac{\partial p'_K}{\partial p_{ij}}}_{= 0} + \frac{\partial F}{\partial p'_{KS}} \frac{\partial p'_{KS}}{\partial p_{ij}} =$$

(poiché p' non dipende da p_{ij})

(poiché p'_K non dipende da p_{ij})

(coordinate del VECCHIO SISTEMA: p_{ij}

" " NUOVO " : x'^K, p', p'_K, p'_{KS})

$$= \frac{\partial F}{\partial p'_{KS}} \cdot \frac{\partial p'_{KS}}{\partial p_{ij}} = \frac{\partial F}{\partial p'_{KS}} \cdot \frac{\partial x^i}{\partial x'^K} \cdot \frac{\partial x^j}{\partial x'^S}$$

$$\frac{\partial F}{\partial p'_{KS}} = \frac{\partial F}{\partial p_{ij}} \cdot \frac{\partial x'^K}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial x'^S}{\partial x^j}$$

poiché la FORMA è BIL. SIMMETRICA

(*) $\Rightarrow$ ho una METRICA (non sul TANGENTE, ma sul COTANGENTE)

$$t'^{KS} = t^{ij} \frac{\partial x'^K}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial x'^S}{\partial x^j}$$

$\downarrow$

è un TENSORE 2 VOLTE CONTROVARIANTE

OSS: Posso passare da 1 metrica sul COT. a 1 metrica sul TANG. se la METRICA è INVERTIBILE

$$\frac{\partial F}{\partial p_{ij}} e_i \otimes e_j \in (TM)^2 = \underbrace{T^{(2,0)} M}_{\text{FIBRATO 2 VOLTE CONTROVARIANTE}}$$

$$\varphi : J^2 M \longrightarrow T^{(2,0)} M$$

$$J^2_x u \longrightarrow \frac{\partial F}{\partial p_{ij}} (J^2_x u)\, e_i \otimes e_j \in T^{(2,0)} M$$

poiché i p_{ij} sono SIMMETRICI ($p_{ij} = p_{ji}$)

FORMA BILINEARE SIMMETRICA

PRODOTTO TENSORIALE

$\{b_i\}$ BASE di V

$\{\tilde{b}_i\}$ " " $\tilde{V}$

$$V \otimes \tilde{V} = \{ v^{ij}\, b_i \otimes \tilde{b}_j \}$$

Suppongo $\dim V = 2$, $\dim \tilde{V} = 2$

$$\Rightarrow V \otimes \tilde{V} = \{ v^{11} b_1 \otimes \tilde{b}_1 + v^{21} b_2 \otimes \tilde{b}_1 + v^{12} b_1 \otimes \tilde{b}_2 + v^{22} b_2 \otimes \tilde{b}_2 \}$$

$\dim (V \otimes \tilde{V}) = 4$

(In generale la DIM. di $V \otimes \tilde{V}$ è il prodotto tra la dim. di V e la dim di $\tilde{V}$) $\longrightarrow$ cioè $\dim (V \otimes \tilde{V}) = \dim V \cdot \dim \tilde{V}$

La DEFINIZIONE è BEN POSTA.

V SPAZIO VETTORIALE

$$\underbrace{\mathrm{End}(V)}_{\text{(ENDOMORFISMO di } V)} = \overbrace{\underbrace{V \otimes V^*}_{V^{(1,1)}}}^{\text{SPAZIO TENSORIALE}} = \{ a^i{}_j\, e_i \otimes e^j \}$$

La BASE del DUALE è definita in modo tale che $e^j(e_i) = \delta^j{}_i$

Se $a \in \mathrm{End}(V)$

$a = a^i{}_j\, e_i \otimes e^j$

$$v \longrightarrow a(v) := a^i{}_j\, e_i \otimes e^j (v) = \underbrace{\overset{\text{MATRICE}}{\overbrace{a^i{}_j}}\, v^j}_{w^i \text{ (sono le componenti del vettore immagine)}} e_i \in V$$

$v = v^j e_j$

$e^j (v) = v^j$

$$V^{(0,2)} = V^* \otimes V^* = \{ \overbrace{g_{ij}\, e^i \otimes e^j}^{\text{FORME BILINEARI su } V} \}$$

Se g_{ij} è SIMMETRICO $\Longrightarrow$ $g_{ij} e^i \otimes e^j$ diventa 1 FORMA BILINEARE SIMMETRICA

Se $g \in V^{(0,2)}$

$$g = g_{ij}\, e^i \otimes e^j$$

$$\underbrace{(v,w)}_{\in V \times V} \xrightarrow{g} g(v,w) = g_{ij}\, e^i(v)\, e^j(w) = g_{ij}\, v^i w^j$$

EQ. DIFFERENZIALE della FORMA

$$a^{ij}(x) \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} u + \tilde{F}(x, Du, u) = 0 \qquad (*)$$

$$F = a^{ij}(x)\, p_{ij} + \tilde{F}(x, p_i, p) = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial p_{ij}} = a^{ij}(x) \longrightarrow$$ Questo mi definisce 1 FORMA BILINEARE sul COTANGENTE

$a = a^{ij}(x)\, e_i \otimes e_j$ è una METRICA su T^*M

Se la METRICA è INVERTIBILE $\Rightarrow$ posso ottenere 1 METRICA sul TANGENTE TM

(da pag. 38 a pag. 44 delle DISPENSE di FASANO $\rightarrow$ sbagliate)

Se la SEGNATURA di a è DEFINITA cioè $(+,+)$ o $(-,-)$

$\Rightarrow$ si parla di EQUAZIONE ELLITTICA

Se è INDEFINITA cioè $(-,+)$ o $(+,-)$

$\Rightarrow$ EQ. IPERBOLICA

Se è DEGENERE cioè $(0,+)$ o $(0,-)$

$\Rightarrow$ EQ. PARABOLICA

OSS:

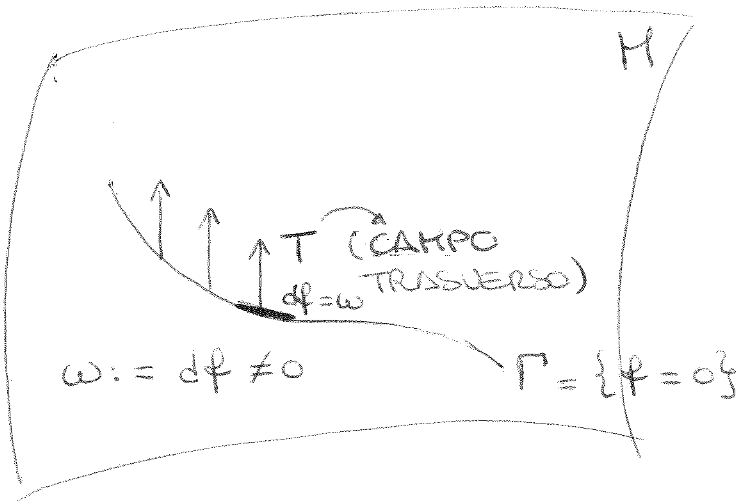
- Fare il det di $a^i{}_j$ è un concetto che NON dipende dalla CARTA
- Fare il det di a^{ij} è un concetto che dipende dalla CARTA

$$\tilde{\partial}^i{}_K = \partial^{iJ} \underbrace{\delta_{JK}}_{\text{METRICA di } \mathbb{R}^n}$$

È sbagliato usare una METRICA di $\mathbb{R}^n$

$$\delta_{iJ} \frac{\partial x^i}{\partial x'^K} \frac{\partial x^J}{\partial x'^S} \neq \delta_{KS}$$

Quindi la CLASSIFICAZIONE va fatta con la SEGNATURA e NON con il DETERMINANTE



$\omega \in T^*M$

$\omega(x) = \partial_x f \in \mathbb{R}$

$$u|_\Gamma = \psi$$

$$\partial_T u|_\Gamma = \phi$$

Esiste 1 sol. dell'eq del 2° ORDINE, almeno in un INTORNO?

TEO DI CAUCHY - KOWALESKI

Se Γ, T, ψ, ϕ, F sono REALI ANALITICHE ed ed è soddisfatta la CONDIZIONE

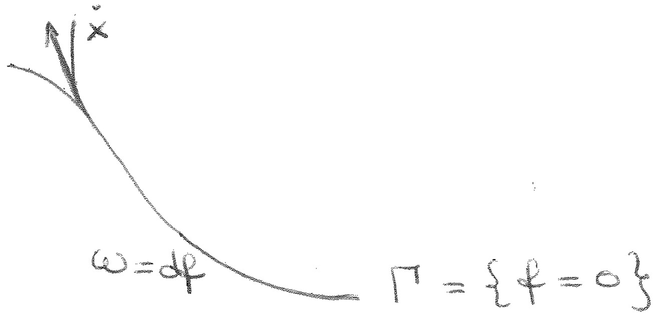
$$\frac{\partial F}{\partial p_{iJ}} \omega_i \omega_J \neq 0 \text{ su } \Gamma \quad \left(\text{cioè } \Gamma \text{ è NON CARATTERISTICA} \right)$$

allora $\exists$ SOLUZIONE ANALITICA u di $(*)$ in un INTORNO di Γ

$$b^i(x)\,\partial_i u = c(x)$$

$$F(x, Du, u) = b^i \partial_i u - c$$

EQ. CARATTERISTICA



$$\dot{x}^i = \frac{\partial F}{\partial p_i} = b^i$$

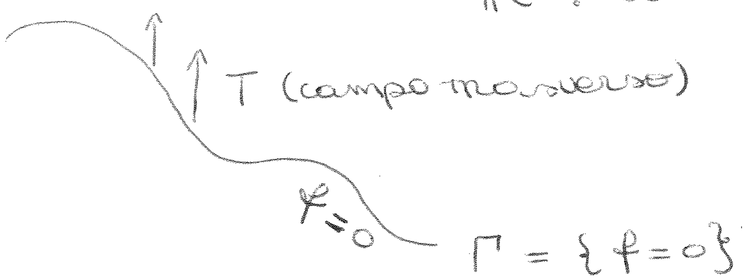
$$\partial_{\vec{b}} f = b^i \partial_i f = \frac{\partial F}{\partial p_i}\omega_i \neq 0$$

$$\left(\partial_{\vec{b}} = b^i \partial_i\right)$$

$$a^{ij}(x)\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} u + \tilde{F}(Du, u, x) = 0$$

$$F = a^{ij}(x)\, p_{ij} + \tilde{F}$$

$\mathbb{R}^n$: DOMINIO



$u|_\Gamma$

$\partial_T u|_\Gamma$

$\omega = df_\Gamma \neq 0$

$\omega \in T^*\mathbb{R}^n$

Esiste la sol. in un INTORNO se la CURVA Γ è NON CARATTERISTICA

Γ è NON CARATTERISTICA se $\underbrace{\frac{\partial F}{\partial p_{ij}}\omega_i\omega_j\Big|_\Gamma}_{\parallel} \neq 0$

$$a^{ij}(x)\,\partial_i f\,\partial_j f\,\Big|_\Gamma \neq 0$$

$$df = \partial_i f \underbrace{dx^i}_{e^i}$$

Se $\det(a^{ij}) \neq 0$

$\Rightarrow \exists\, b_{ij} : b_{ij} a^{jk} = \delta_i^k$

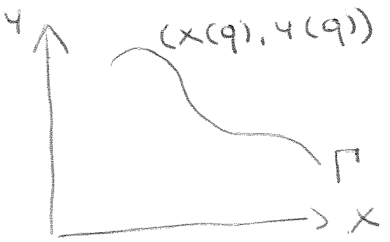
$b := b_{ij}(x)\, e^i \otimes e^j$

$\downarrow$

è una METRICA sul DUALE (cioè sul TANGENTE)

Suppongo $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^2$, quindi ho 2 coordinate

Parametrizzo Γ così: $(x(q), y(q))$



$$\Gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$q \longmapsto (x(q), y(q))$$

1) $u(x(q), y(q)) = g(q)$ $\longrightarrow$ questa relazione mi dà u lungo TUTTA la CURVA Γ

2) $\partial_T u\,(x(q), y(q)) = h(q)$

$$\frac{d}{dq} = \bar{t} = \frac{dx}{dq}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{dy}{dq}\frac{\partial}{\partial y} = \frac{dx}{dq} e_1 + \frac{dy}{dq} e_2 =$$
$$= x'(q) e_1 + y'(q) e_2$$

$\bar{t}$ $\downarrow$ VETTORE TANGENTE

$\bar{n} := -y'(q) e_1 + x'(q) e_2$ $\longrightarrow$ VETTORE NORMALE (NORMALE al vettore $\bar{t}$)

Mi serve introdurre $\bar{n}$ per dire che T è TRASVERSO

$T = \alpha(q)\, \bar{n} + \beta(q)\, \bar{t}$ con $\alpha \neq 0$, condizione affinché T sia TRASVERSO

Nelle IPOTESI abbiamo g e h ANALITICHE.

Anche T analitico $\Rightarrow$ anche α e β sono ANALITICHE

Da 1) derivando:

$x' u_x + y' u_y = g'$

$$T = \alpha(q)\,\overline{m} + \beta(q)\,\overline{t} =$$
$$= (\beta x' - \alpha y')\, e_1 + (\beta y' + \alpha x')\, e_2$$

$$(\beta x' - \alpha y')\, u_x + (\beta y' + \alpha x')\, u_y = h \quad \longrightarrow \quad (\text{dalla } 2))$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x' & y' \\ \beta x' - \alpha y' & \beta y' + \alpha x' \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g' \\ h \end{pmatrix}$$

Si può risolvere qst SISTEMA qnd il $\det(A) \neq 0$

$$\det(A) = \alpha(x'^2 + y'^2) \neq 0 \implies A \text{ invertibile}$$

perché $\overline{t} \neq 0$ (cioè $x'(q)$ e $y'(q)$ sono $\neq 0$)

$$u_x = W(q)$$
$$u_y = Z(q)$$

$$\frac{d}{dq} u_x(q) = W'(q)$$

$$x' u_{xx} + y' u_{xy} = W' \qquad (a)$$

$$\frac{d}{dq} u_y(q) = Z'(q)$$

$$x' u_{yx} + y' u_{yy} = Z' \qquad (b)$$

u ce la costruiamo in modo t.c. soddisfi l'eq. differenziale.
I DATI ci portano delle condizioni per la derivata seconda
Per ora ne abbiamo trovate 2 di eq. con " "
((a) e (b))

$$0 = a^{11}\underbrace{(x)}_{(\text{sarebbe } (x,y))} u_{xx} + 2a^{12}(x)\, u_{xy} + a^{22}(x)\, u_{yy} +$$

$$+ \tilde{F}(\underbrace{u_x}_{\uparrow W}, \underbrace{u_y}_{\uparrow Z}, \underbrace{u}_{\uparrow g}, \underbrace{x, y}_{\uparrow (x(q), y(q))})$$

VALUTIAMO su Γ:

$$a^{11}(q)\, u_{xx} + 2a^{12}(q)\, u_{xy} + a^{22}(q)\, u_{yy} = \underbrace{R(q)}$$

è $-\tilde{F}$ valutata su Γ

la conosce grazie ai DATI

Fin qui ho 3 EQUAZIONI nelle INCOGNITE u_{xx}, u_{xy} e u_{yy}

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x' & y' & 0 \\ 0 & x' & y' \\ a^{11} & 2a^{12} & a^{22} \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} u_{xx} \\ u_{xy} \\ u_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W' \\ Z' \\ R \end{pmatrix}$$

Siamo in grado di determinare le derivate seconde sulla CURVA dei DATI? SI, se $\det(A) \neq 0$

$$\det \begin{pmatrix} x' & y' & 0 \\ 0 & x' & y' \\ a^{11} & 2a^{12} & a^{22} \end{pmatrix} = a^{22}(x')^2 + a^{11}(y')^2 - 2a^{12}x'y' =$$
$$= a^{22}\omega_2\omega_2 + a^{11}\omega_1\omega_1 + 2a^{12}\omega_1\omega_2$$

Si definisca un COVETTORE:

$\omega = -y'dx + x'dy = -y'e^1 + x'e^2$

$\omega(\bar{t}) = 0$

Infatti:

$\omega(\bar{t}) = -y'e^1(t) + x'e^2(t) = -y'x' + x'y' = 0$

Se df non è univocamente determinato

$\mathrm{Ker}(df)$ è lo SPAZIO TANGENTE

ω ha lo stesso NUCLEO di df

$a^{ij}\omega_i\omega_j \neq 0 \longrightarrow$ Abbiamo trovato la condizione di CAUCHY - COWALESKI

È una condizione sufficiente per trovare tutte le DERIVATE SECONDE

$$a^{ij} = \frac{\partial F}{\partial p_{ij}}$$

$$a'^{ij} = a^{ks} \underbrace{\frac{\partial x'^i}{\partial x^k} \frac{\partial x'^j}{\partial x^s}}_{\text{JACOBIANO relativo alla TRASFORMAZIONE}}$$

(g^{KS} è una METRICA sul cotangente)

Def: $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ è CARATTERISTICA se

$$g(df, df) = 0 = g^{ij}\partial_i f\, \partial_j f$$

$g \in T^{(2,0)}M$, $M = \mathbb{R}^n$

$g = g^{ij}\,\partial_i \otimes \partial_j = g^{ij}\, e_i \otimes e_j$

(tensore 2 volte CONTROVARIANTE)

Se $n=2$, possiamo chiamare CURVA CARATTERISTICA una qualunque curva $\gamma = \{f=0\}$ con f CARATTERISTICA

(In realtà parlare di CURVE CARATTERISTICHE non è sensato poiché non sono curve, cioè PARAMETRIZZATE, ma sono INSIEMI di LIVELLO)

Se le COORDINATE sono TUTTE FUNZ. CARATTERISTICHE
$\Longrightarrow$ i TERMINI sulla DIAGONALE sono 0

$n=2$ e SEGNATURA $(+,-)$

$g: V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$, $\dim V = 2$

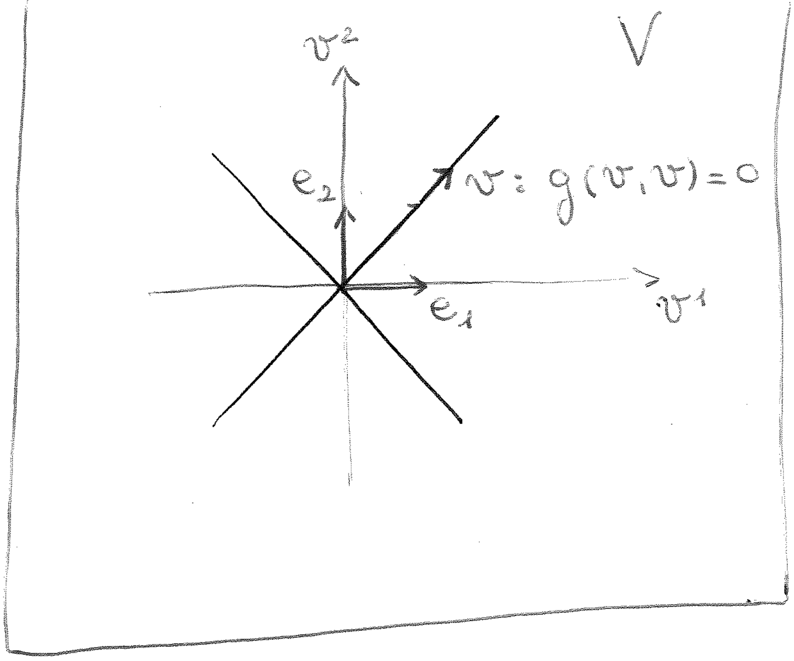
segnatura $(+,-)$

$\exists$ una BASE per cui

$$g = e^1 \otimes e^1 - e^2 \otimes e^2$$

$$g(v,v) = (v^1)^2 - (v^2)^2$$

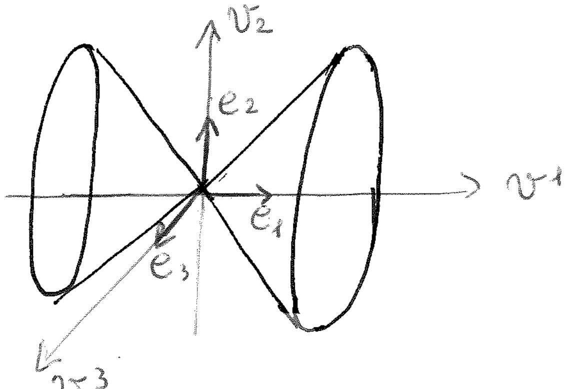
dove $v = v^1 e_1 + v^2 e_2$



Se $n = 3$ e segnatura $(+,-,-)$

$$g = e^1 \otimes e^1 - e^2 \otimes e^2 - e^3 \otimes e^3$$

$$g(v,v) = (v^1)^2 - (v^2)^2 - (v^3)^2$$

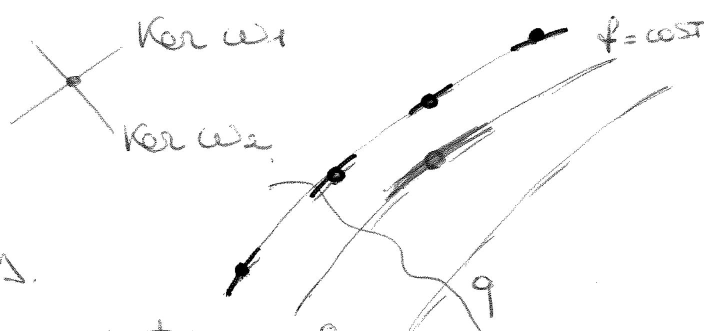


$\omega \in T^*\mathbb{R}^2$

In ogni punto abbiamo 2 COVETTORI che annullano g

$g(\omega_1, \omega_1) = 0$

$g(\omega_2, \omega_2) = 0$



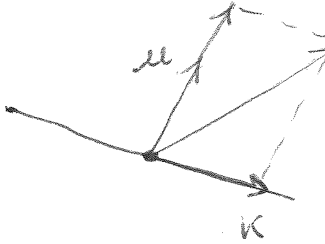
In ogni punto abbiamo 1 RETTA.

La DISTRIBUZIONE di RETTE possiamo integrarla

(per fare ciò si può trasformare la DISTRIBUZIONE di Retta in 1 campo VETTORIALE e integrare il CAMPO vettoriale)

Otteniamo 1 FOLIAZIONE

$\underset{\text{PROPORZIONALE}}{\omega_1 \propto df} \Rightarrow$ Ker ω_1 è anche il Ker df



$\mathrm{Ker}\,\omega = \mathrm{Ker}\,\eta$

$$v = \alpha u + K$$

$$\eta(v) = \alpha\eta(u) + \underbrace{\eta(K)}_{=0} = \alpha\frac{\eta(u)}{\omega(u)}\omega(u) + \frac{\eta(u)}{\omega(u)}\omega(K) =$$

($\omega(u) \neq 0$ poiché u l'ho preso TRASVERSO)

$$= \frac{\eta(u)}{\omega(u)}\underbrace{(\alpha\omega(u) + \omega(K))}_{\omega(v)}$$

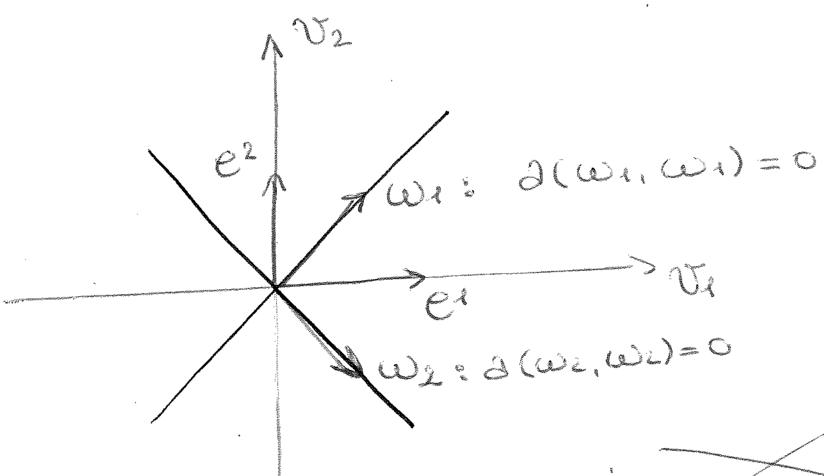
Quindi 2 COVETTORI con lo stesso NUCLEO sono PROPORZIONALI

$\Rightarrow a(df, df) = 0$

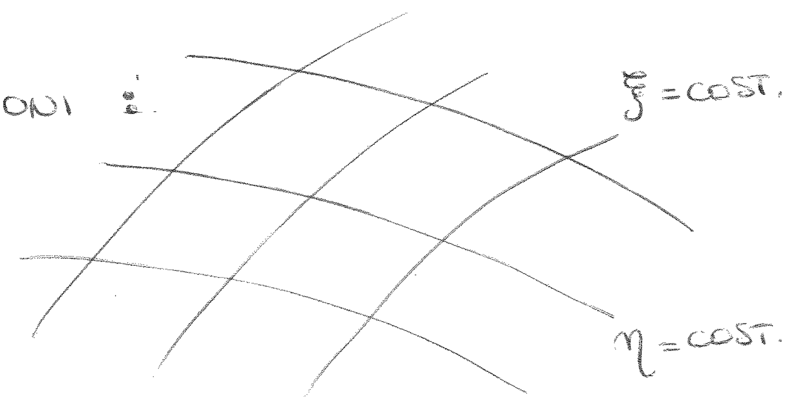
Possiamo sempre trovare localmente delle funzioni CARATTERISTICHE (basta integrare la DISTRIBUZIONE di RETTE)

Tutto questo discorso va applicato ad a sul DUALE:

$$a : V^* \times V^* \longrightarrow \mathbb{R}$$



Otteniamo quindi 2 DISTRIBUZIONI:



$$a^{ij} \partial_i \xi \, \partial_j \xi = 0$$

$$a^{ij} \partial_i \eta \, \partial_j \eta = 0$$

$$(\underbrace{x}_{=x^1}, \underbrace{y}_{=x^2}) \longrightarrow (\underbrace{\xi}_{=x'^1}, \underbrace{\eta}_{=x'^2})$$

$$a'^{\xi\xi} = a'^{\eta\eta} = 0$$

$$a'^{11} = a'^{22} = 0$$

$$\left(a'^{ij} \right) = \begin{pmatrix} 0 & a'^{12} \\ a'^{12} & 0 \end{pmatrix}$$

$$a'^{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x'^i \partial x'^j} = 2 a'^{12} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}$$

$$2 a'^{12} u_{\xi\eta} + \tilde{F}(Du, u, x) = 0$$

Divido per $2a'^{12}$:

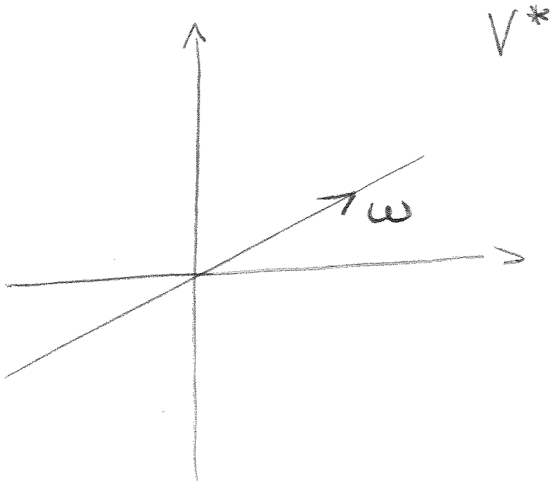
$$u_{\xi\eta} + \check{F}(Du, u, x) = 0$$

CASO METRICA a DEGENERE

$$\exists\, \omega : a(\cdot, \omega) = 0$$

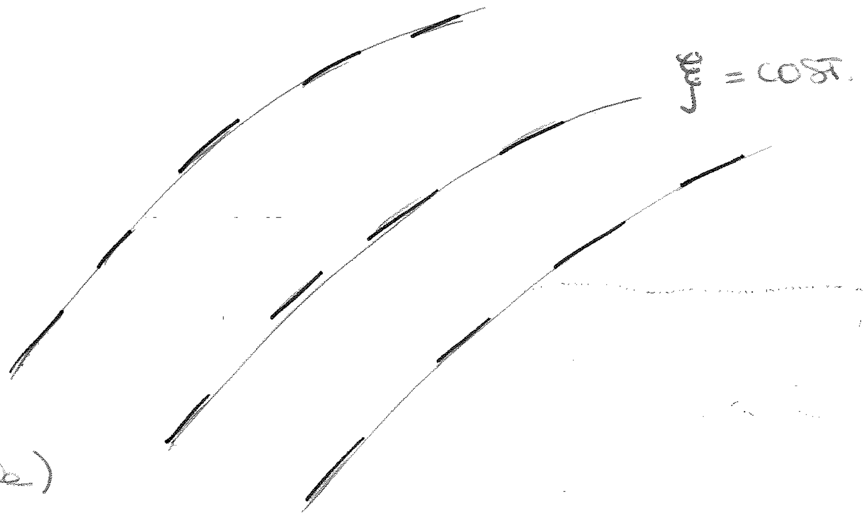
$$V = T\mathbb{R}^2$$

$V^* = T^*\mathbb{R}^2 \longrightarrow$ siamo sul DUALE



C'è 1 forma QUADRATICA che si annulla in ω e in tutti i VETTORI a cui PROPORZIONALI.

ω mi genera 1 DISTRIBUZ. di RETTE che posso integrare



(proporzionale)
↑
$\omega \propto d\xi$

$a(\cdot, d\xi) = 0$

Per parametrizzare tutti i PUNTI del piano ho bisogno di 1 altra COORDINATA.

Prendo η generica. (a caso)

$a(d\xi, d\xi) = 0 \longrightarrow$ è la condizione $a'^{11} = 0$

$a(d\eta, d\eta) = 0 \longrightarrow$ " " " $a'^{21} = 0$

$\xi = x'^{1}$

$\eta = x'^{2}$

$$a'^{21} = a^{ks} \underbrace{\frac{\partial \overset{\eta}{x'^{2}}}{\partial x^{k}}}_{\text{differenziale della } \eta} \underbrace{\frac{\partial \overset{\xi}{x'^{1}}}{\partial x^{s}}}_{\text{differenziale della } \xi} = a(d\eta, d\xi)$$

(contratto alla METRICA a^{ks})

$$\begin{pmatrix} a'^{ks} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a'^{22} \end{pmatrix}$$

$$a'^{22} u_{\eta\eta} + \tilde{F}(Du, u, x) = 0$$

$$\Longrightarrow u_{\eta\eta} + \check{F}(Du, u, x) = 0$$

[L'eq del CASO PARABOLICO si dovrebbe ridurre a questa

$$u_{\eta\eta} - u_\xi + f(u, x) = 0$$

(forse non è vero)]

$$u_{\eta\eta} + \underbrace{a u_\eta + b u_\xi}_{\left(a \frac{\partial}{\partial \eta} + b \frac{\partial}{\partial \xi}\right) u} + f(u, \eta, \xi) = 0$$

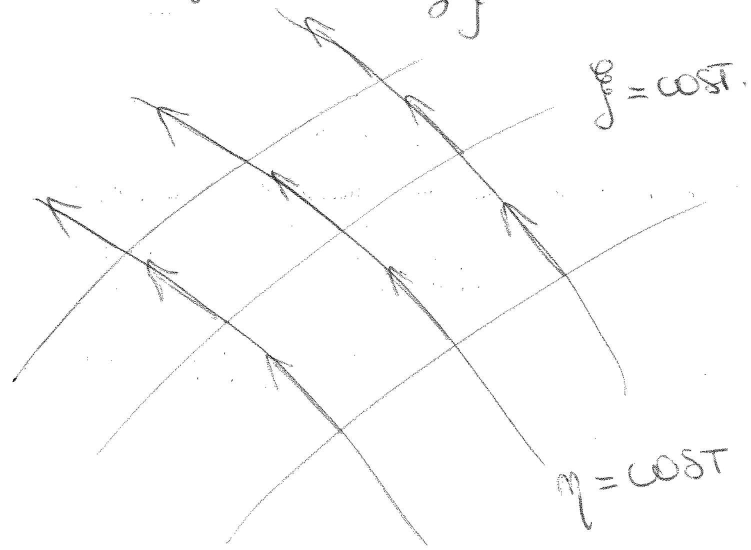
Come posso semplificare questo TERMINE?

$\left(a \frac{\partial}{\partial \eta} + b \frac{\partial}{\partial \xi}\right)$ → È un CAMPO VETTORIALE nello SPAZIO $\mathbb{R}^2$

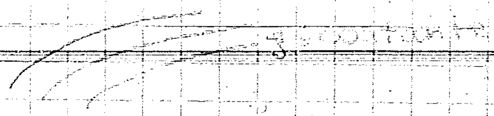
Tra tutte le funzioni η che posso scegliere prenderò quelle che hanno come insiemi di livello le CURVE INTEGRALI del CAMPO (cioè η la prendo tangente alle CURVE INTEGRALI del CAMPO).

$$\Longrightarrow \frac{\partial}{\partial \eta} = 0$$

$$\Longrightarrow a u_\eta + b u_\xi = b \frac{\partial u}{\partial \xi}$$



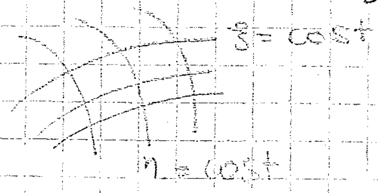
Come prima, ω mi determina una distribuzione nello spazio che può essere integrata. Parametrizzo questa funzione ed ottengo ξ con la seguente fogliatura



Ora $\omega \propto d\xi$ e quindi $\underbrace{a(\cdot, d\xi) = 0}$

↳ Condizione più forte di quella trovata prima, perchè al 1° posto posso metterci qualsiasi funzione.

Per parametrizzare tutto il piano mi serve un'altra coordinata: ne scelgo una generica che chiamo η



$\forall \eta$ che scelgo avrò $a(d\eta, d\xi) = 0$ (cioè $a'^{12} = 0$)
Inoltre $a'^{11} = a(d\xi, d\xi) = 0$ (lo si vede sostituendo $\xi = x'^1$ e $\eta = x'^2$ nella definizione di a'^{21})

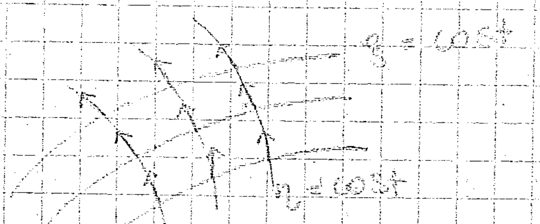
$\Rightarrow (a'^{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a'^{22} \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ l'equazione diventa $a'^{ij} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x'^i \partial x'^j} = 2a'^{22} \dfrac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \eta}$

$\Rightarrow a'^{22} u_{\eta\eta} + F(Du, u, x) = 0 \quad \Rightarrow u_{\eta\eta} + \check{F}(Du, u, x) = 0$

Localmente ci riduciamo sempre alla forma
$u_{\eta\eta} + \underbrace{a u_\eta + b u_\xi}_{= \left(a \frac{\partial}{\partial \eta} + b \frac{\partial}{\partial \xi}\right) u} + f(u, \eta, \xi) = 0$

$\hookleftarrow$ Questo è un campo in $\mathbb{R}^2$
Sceglierò η in modo che i suoi insiemi di livello siano gli integrali del campo (sempre che il campo sia trasverso a ξ, il che non è sempre vero)
In questo caso $a \dfrac{\partial}{\partial \eta} = 0$
quindi $u_{\eta\eta} - b u_\xi + f(u, \eta, \xi) = 0$



(è un'equazione del calore in cui la capacità termica dipende dal punto)
(per $b = 1$ sarebbe proprio l'equazione del calore)

19/04/2016

ES: Equazione delle onde $u_{xx} - u_{yy} + \tilde{F} = 0$

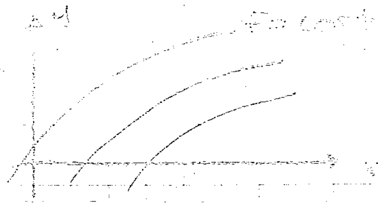
$(a^{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Quindi le funzioni caratteristiche dovranno soddisfare

$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} & \dfrac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial f / \partial x \\ \partial f / \partial y \end{pmatrix} = 0$

$\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^2 - \left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^2 = 0 \quad (*)$

Poi si passa alle curve caratteristiche, che è fun insieme di livello della funzione f soluzione di (*)

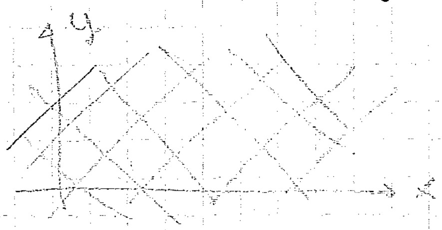


$F = y - a(x)$

$f = 0$ sse $y = a(x)$

$(a')^2 = 1 \qquad a' = \pm 1 \qquad y = \pm x +$ costante

$\Rightarrow$ le curve caratteristiche sono rette parallele alle bisettrici (non sono come le ho disegnate)



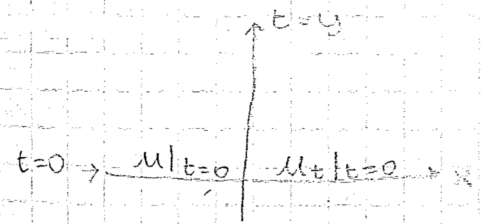
Ho due caratteristiche $\begin{cases} \xi = x + y \\ \eta = x - y \end{cases}$

Queste le possiamo invertire, ottenendo $\begin{cases} x = (\xi + \eta)/2 \\ y = (\xi - \eta)/2 \end{cases}$

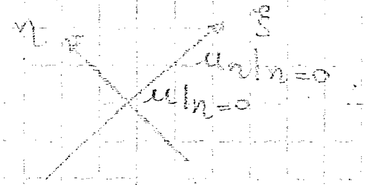
$$\frac{\partial}{\partial \xi} = \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial y} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta} = \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial y} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}\right)$$

$u_{xx} - u_{yy} + \tilde{F} = 0$ (eq. di d'Alembert) con il cambio di coordinate diventa $\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}\right) u + \tilde{F} = 0$, che si riduce a $4 u_{\xi\eta} + \tilde{F} = 0$



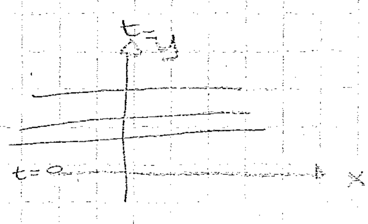
Si può pensare di risolvere



Ma questo non ci piace perché non si può applicare Cauchy-Kovaleski, in quanto il problema è malposto essendo Γ non trasverso, ma tangente. Se infatti dessimo u_η fissandolo su ξ, avrei fissato anche $u|_{\eta\xi=0}$ infrangendo l'eq. delle onde (mantenendo fisso η).

ES: Equazione del calore $u_{xx} - u_y + \tilde{F} = 0$

$$(a^{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$



f funzione caratteristica deve soddisfare

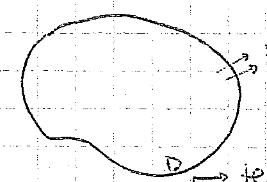
$$0 = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \;\; \frac{\partial f}{\partial y}\right) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \partial f/\partial x \\ \partial f/\partial y \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2$$

$\Rightarrow f = f(t)$ con $t = y$ cioè f dipende solo da y

$\Rightarrow$ f sono rette parallele all'asse x

Non si può usare Cauchy-Kovaleski perché se fisso $u|_{t=0}$ ho u_{xx}, quindi non posso fissare liberamente y (lungo il trasverso) in quanto deve sempre valere l'equazione $u_{xx} - u_y + \bar{F} = 0$ e $u_{xx}, \bar{F}$ sono fissati.

Da dove viene l'equazione del calore?



$\to F$ (sta uscendo del flusso di calore dal bordo)

$$\underbrace{\frac{d}{dt}\int_D \underbrace{c(x)}_{\text{capacità termica}} \overset{\text{temperatura}}{\tilde{u}}\, dV}_{= \int_D c\,\frac{\partial u}{\partial t}\, dV} = -\int_{\partial D} \overset{\text{flusso di calore}}{\bar{F}} \cdot dS \qquad \bar{F} = -\overbrace{K(x)}^{\text{conducibilità termica}}\,\nabla u$$

$= $ (teor. divergenza) $\int_D \bar{\nabla}\cdot(K\nabla u)\, dV$

Il flusso aumenta se la differenza di temperatura tra interno e esterno diminuisce

Poichè D è arbitrario $c\frac{\partial u}{\partial t} = \bar{\nabla}\cdot(K\nabla u)$, cioè $c\frac{\partial u}{\partial t} - \bar{\nabla}\cdot(K\nabla u) = 0$

che si riconduce (sotto opportune ipotesi) $u_t - \Delta_x u = 0$ (eq. del calore)

$a^{ij}\frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{\partial f}{\partial x^j} = 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x^i} = 0 \Rightarrow f = \text{cost}$

Cambio coordinate $a'^{ij} = a^{ks}\frac{\partial x'^i}{\partial x^k}\frac{\partial x'^j}{\partial x^s}$

caso $n=2$

Esiste $x'(x)$: $a'^{ij} = a(x)\,\delta^{ij}$? (cioè $a'^{ij} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$)

Quante metriche esistono che sono esprimibili in questo modo, cioè diagonali? la famiglia di metriche diagonalizzabili dipende da a, x e $x'(x)$; cioè la famiglia di metriche che si possono rendere proporzionali all'identità dipende da 3 funzioni: una è $a(x)$, una il cambio di coordinate e l'altra la funzione di arrivo (cioè 2 $x'(x)$)

Ma la famiglia di metriche generiche $(a^{ij}) = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ dipende da 3 funzioni (a, b, c).

Allora si possono mettere in relazione? Sì (lo vedremo)

caso $n=3$

Famiglia metriche generiche $(a^{ij}) = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & e & d \\ c & d & f \end{pmatrix}$ dipende da 6 funzioni

La famiglia delle metriche che potrebbero essere rese proporzionali ~~all'identità dipende da 4 funzioni: 1 è $a(x)$, 3 sono di $x'(x)$.~~

Sono solo 4, non 6 $\Rightarrow$ Non funziona.

Supponiamo allora di voler portare la metrica in forma diagonale

$(a^{ij}) = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$

Ora dipende da 6 funzioni (a, b, c e le 3 del cambio di coordinate)

È sempre possibile $\forall$ metrica in $\mathbb{R}^3$ arrivare a una forma diagonale? Sì

In 4 dimensioni non è più possibile neppure diagonalizzare.

Ho 4 cambi di coordinata e 10 parametri, quindi devo scrivere una metrica che dipenda da 6 funzioni $\to$ cioè funzioni da cui dipende la generica.

In questo caso la matrice giusta è la seguente (a blocchi)

$$\begin{pmatrix} a & e & 0 & 0 \\ e & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & f \\ 0 & 0 & f & d \end{pmatrix}$$

Torniamo a $n=2$.
Cerchiamo un cambio di coordinate tale che
$a'^{11} =: a^{\xi\xi} = a^{\eta\eta} = a$
$a'^{12} =: a^{\xi\eta} = 0$

$$a^{\xi\xi} = a^{ij} \frac{\partial \xi}{\partial x^i} \frac{\partial \xi}{\partial x^j} = a^{xx} \xi_x^2 + 2a^{xy} \xi_x \xi_y + a^{yy} \xi_y^2$$

Analogamente $a^{\eta\eta} = a^{xx} \eta_x^2 + 2a^{xy} \eta_x \eta_y + a^{yy} \eta_y^2$

Le sottraggo e ottengo (2)

$$a^{\xi\eta} = a^{ij} \frac{\partial \xi}{\partial x^i} \frac{\partial \eta}{\partial x^j} = a^{xx} \xi_x \eta_x + a^{xy}(\xi_x \eta_y + \xi_y \eta_x) + a^{yy} \xi_y \eta_y \quad (1)$$

$\Rightarrow$ La condizione grazie alla quale la metrica viene portata in qualcosa di proporzionale all'identità ~~è~~ sono:

$$\begin{cases} 0 = a^{xx} \xi_x \eta_x + a^{xy}(\xi_x \eta_y + \xi_y \eta_x) + a^{yy} \xi_y \eta_y & (1) \\ 0 = a^{xx}(\xi_x^2 - \eta_x^2) + 2a^{xy}(\xi_x \xi_y - \eta_x \eta_y) + a^{yy}(\xi_y^2 - \eta_y^2) & (2) \end{cases}$$

Moltiplico la prima per $2i$ e sommo con la seconda
$\Rightarrow 0 = a^{xx}(\xi_x + i\eta_x)^2 + a^{yy}(\xi_y + i\eta_y)^2 + 2a^{xy}(\xi_x + i\eta_x)(\xi_y + i\eta_y)$

Sia $\zeta = \dfrac{\xi_x + i\eta_x}{\xi_y + i\eta_y}$

Allora $0 = a^{xx}\zeta^2 + a^{yy} + 2a^{xy}\zeta \Rightarrow \zeta = \dfrac{-a^{xy} \pm \sqrt{(a^{xy})^2 - a^{xx}a^{yy}}}{a^{xx}}$

L'argomento della radice è <0 perché la matrice a^{ij} è definita positiva (e $\Delta = -\det(a^{ij})$)
$\Rightarrow$ Ho le due soluzioni $\zeta = \dfrac{-a^{xy} \pm i\sqrt{|\delta|}}{a^{xx}}$, $|\delta| = a^{xx}a^{yy} - (a^{xy})^2$

Sostituisco la ζ appena trovata nella sua definizione e trovo

$$\xi_x + i\eta_x = (\xi_y + i\eta_y)\left(\frac{-a^{xy} + i\sqrt{|\delta|}}{a^{xx}}\right) =$$

$$= -\frac{a^{xy}}{a^{xx}}\xi_y - \frac{\sqrt{|\delta|}}{a^{xx}}\eta_y + i\left(-\frac{a^{xy}}{a^{xx}}\eta_y + \frac{\sqrt{|\delta|}}{a^{xx}}\xi_y\right)$$

Eguaglio parti reale e immaginarie ed ottengo

$$\xi_x = -\frac{\sqrt{|\delta|}}{a^{xx}}\eta_y - \frac{a^{xy}}{a^{xx}}\xi_y \Rightarrow \eta_y = -\frac{a^{xx}\xi_x + a^{xy}\xi_y}{\sqrt{|\delta|}}$$

$$\eta_x = \frac{\sqrt{|\delta|}}{a^{xx}}\xi_y - \frac{a^{xy}}{a^{xx}}\eta_y \Rightarrow \xi_y = \frac{a^{xx}\eta_x + a^{xy}\eta_y}{\sqrt{|\delta|}}$$

Queste (in qualunque forma siano scritte) si chiamano equazioni di Beltrami

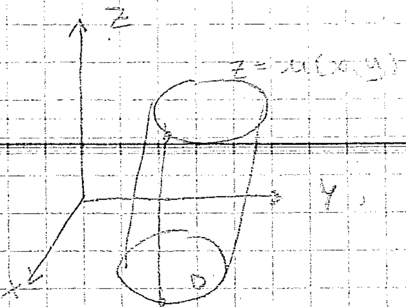
---

Sostituendo ξ_y in ξ_x e ricordando $\left(\dfrac{(a^{xx})^2}{\sqrt{|\delta|}} + \sqrt{|\delta|}\right) = \dfrac{a^{xx}a^{yy}}{\sqrt{|\delta|}}$,
si ottiene
$\xi_x = -(a^{xy}\eta_x + a^{yy}\eta_y)/\sqrt{|\delta|}$ e analogamente
$\xi_y = (a^{xx}\eta_x + a^{xy}\eta_y)/\sqrt{|\delta|}$

Voglio studiare il caso in cui $a^{xx} = a^{yy} = 1$, $a^{xy} = 0$, $|\delta| = 1$.
La trasformazione che manda il laplaciano in qualcosa di proporzionale a se stesso è

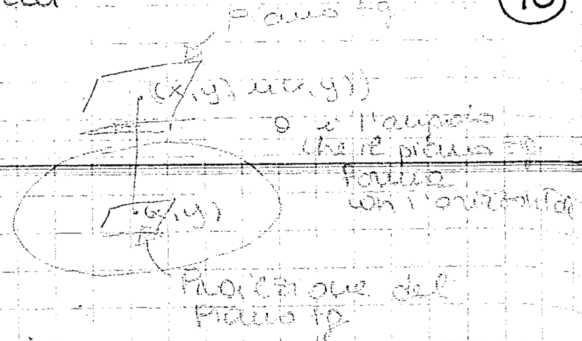
$$\begin{cases} \xi_x = -\eta_y \\ \xi_y = \eta_x \end{cases}$$

ES: Equazione ellittica a derivate parziali



Fis. $z = u|_{\partial D}$

$u|_{\partial D} = \varphi$



Problema: determinare una superficie minima (cioè che ha come bordo il bordo di D). La superficie è $\propto$ all'area del grafo

Devo minimizzare $S[u] = \int_{\text{GRAFO DI } u} dA$ (Grafo di u definisce la superficie in $\mathbb{R}^3$ a partire da $D \subseteq \mathbb{R}^2$)

$$\underbrace{d\tilde{A}}_{\text{Area proiezione}} = \overbrace{dA}^{\text{Area piano tg}} \cos\theta \Rightarrow dA = \frac{dx\,dy}{\cos\theta}$$

$$|\nabla u| = \operatorname{tg}\theta$$

$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\theta}} = \frac{1}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}} = \Rightarrow \frac{1}{\cos\theta} = \sqrt{1+|\nabla u|^2}$$

$$S[u] = \int_D \sqrt{1+|\nabla u|^2}\, dx\, dy$$

$$\delta S = S[\underset{\text{minimo}}{u} + \delta u] - S[u] = 0 \quad (*)$$ Cerco il min come punto stazionario

$$\delta \int_D \sqrt{1+|\nabla u|^2}\, d^2x = \int_D \frac{\nabla u \cdot \nabla \delta u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}\, d^2x = \text{Per parti}$$

$$= \int_D \underbrace{\nabla \cdot \left(\frac{\nabla u\, \delta u}{\sqrt{\ }} \right)}\, d^2x - \int_D \nabla \cdot \left(\frac{\nabla u}{\sqrt{\ }} \right) \delta u \, d^2x$$

Applico teorema della divergenza e ottengo 0 (perché δu sul bordo è 0)

$\Rightarrow$ Per $(*)$ e per l'arbitrarietà di D si ha la condizione

$$\nabla \cdot \left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}} \right) = 0$$

Voglio tirare fuori l'ellittica

$$\frac{\Delta u}{\sqrt{\ }} - \frac{1}{2} \frac{\nabla u}{(\sqrt{\ })^3} \cdot \nabla |\nabla u|^2 = 0 \quad , \text{ cioè}$$

$$(1+|\nabla u|^2)\, \Delta u - \nabla_j u\, \nabla_i u\, \nabla_i \nabla_j u = 0$$

$$\underbrace{\{ (1+|\nabla u|^2)\, \delta^{ij} - \nabla^i u\, \nabla^j u \}}_{= (a^{ij})} \frac{\partial^2 u}{\partial x^i \partial x^j} = 0$$

(a^{ij}) è definita positiva perché vediamo cosa succede se la contraggo con un vettore

$$a^{ij} v_i v_j = (1+|\nabla u|^2)|v|^2 - \underbrace{(\nabla_i u\, v^i)^2}_{\leq |\nabla u|^2 |v|^2} \geq |v|^2 > 0$$

$\Rightarrow$ È ellittica in tutto $\mathbb{R}^3$ (e lo è anche in $\mathbb{R}^n$)

Non sempre si trovano eq. ellittiche in tutto lo spazio

EQUAZIONI delle ONDE in 2 Dimensioni

$n = 2$

$u_{xx} - u_{tt} = 0$

Se vogliamo metterci la VELOCITÀ:

$u_{xx} - \frac{1}{C^2} u_{tt} = 0$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \underbrace{\frac{1}{C^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}}_{\frac{\partial^2 u}{\partial (ct)^2}} = 0$$

Se passiamo a queste coordinate:

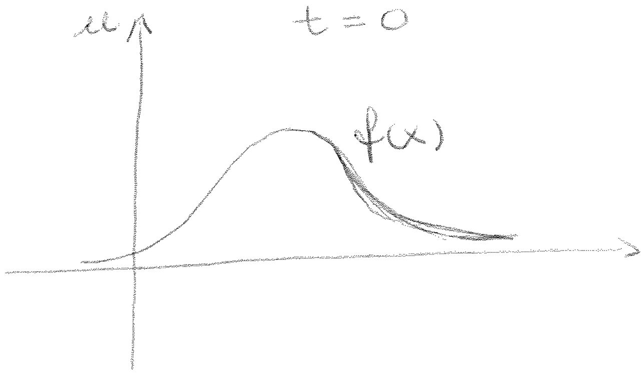
$\xi = x + t$

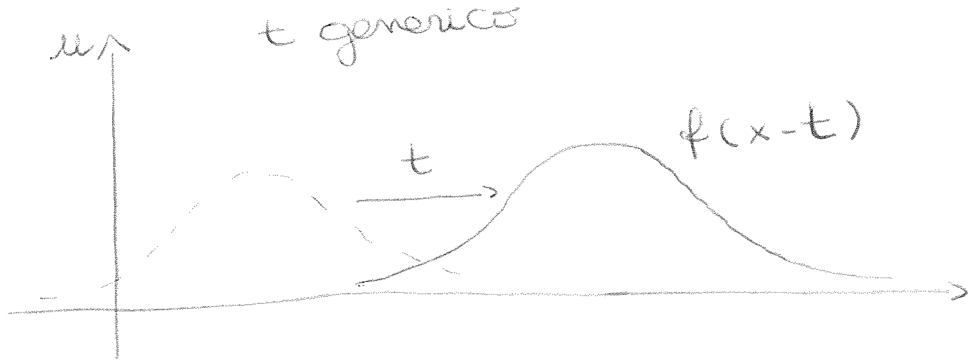
$\eta = x - t$

la nostra eq. diventa: $u_{\xi\eta} = 0$

$u = g(\xi) + f(\eta)$

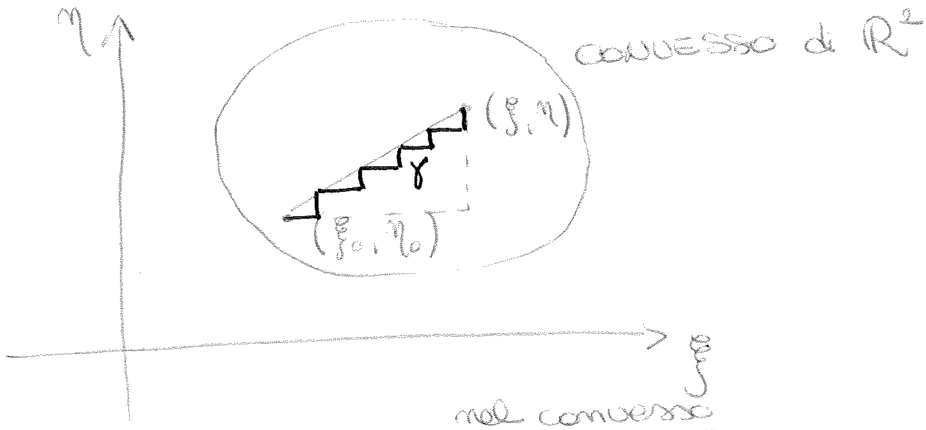
$u(x,t) = g(x+t) + f(x-t)$ $\longrightarrow$ qst eq. rappresenta la SOMMA di 2 ONDE





L'onda f viaggia verso DX, l'onda g verso SX

Questo è la soluzione + generale, sempre se ci focalizziamo su un CONVESSO.



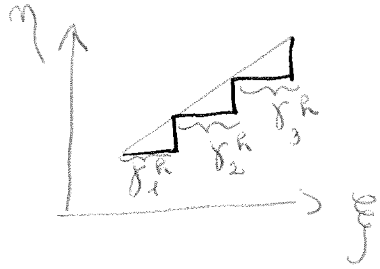
Qualsiasi altro P.TO (ξ,η) nel convesso è collegato da 1 RETTA a (ξ_0,η_0)

$u_{\xi\eta}=0$

$u_\xi = h(\xi)$

Devo trovare 1 percorso che mi porta da (ξ_0,η_0) a (ξ,η) (ad esempio γ o quello ---¦)

$$u(\xi,\eta) = \underbrace{\int_\gamma Du\cdot dl}_{\displaystyle \int_\gamma (u_\xi\, d\xi + u_\eta\, d\eta) = (*)} + u(\xi_0,\eta_0)$$



γ_i^v → generico segmento verticale

γ_i^h → gen. segm. orizzontale

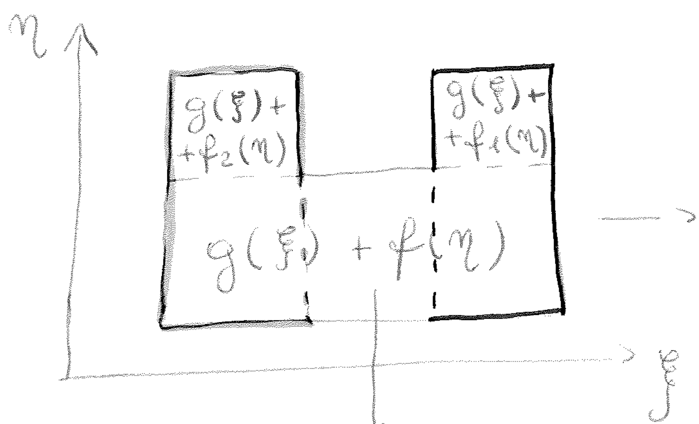
Quando integro orizzontalmente ho solo il 1° termine $u_\xi d\xi$, qnd " verticalmente " " " 2° " $u_\eta d\eta$

$$(*) = \sum_i \int_{\gamma_i^h} u_\xi\, d\xi + \sum_i \int_{\gamma_i^v} u_\eta\, d\eta$$

$$u(\xi,\eta) = u(\xi_0,\eta_0) + \underbrace{\int_{\xi_0}^{\xi} h(\xi')\,d\xi'}_{g(\xi)} + \underbrace{\int_{\eta_0}^{\eta} r(\eta')\,d\eta'}_{f(\eta)}$$

$\Rightarrow$ Una eq. di qst tipo : $u = g(\xi) + f(\eta)$ è sol.
e se siamo in I convesso è l'UNICA SOL.

Se non siamo in I " qst non è VERO:



→ DOMINIO non convesso

Sol convesso (rettangolo) ho la sol. $g(\xi) + f(\eta)$

Nel RETTANGOLO $\square$ la $g(\xi)$ deve essere la stessa, mentre la f sarà data da $f(\eta) + f_2(\eta)$

Stessa cosa per $\square$, con $f_1(\eta) \neq f_2(\eta)$

Andiamo ora a studiare il PROBLEMA DI CAUCHY:

Fissiamo al tempo $t=0$:

$u(x,0) = u_0(x)$

$u_t(x,0) = v_0(x)$

Vogliamo conoscere la SOLUZIONE $\forall x$ e $\forall t$

$$u(x,t) = g(x+t) + f(x-t) \quad (3)$$

$$u(x,0) = u_0(x) = g(x) + f(x) \quad (1)$$

$$u_t = g'(x+t) - f'(x-t)$$

$$u_t(x,0) = g'(x) - f'(x) = v_0(x) \quad (*)$$

Integrando $(*)$:

$$g(x) - f(x) = \int_{x_0}^{x} v_0(x')\,dx' \quad (2)$$

Sommando (1) e (2):

$$2g(x) = u_0(x) + \int_{x_0}^{x} v_0(x')\,dx'$$

Sottraendo (1) e (2):

$$2f(x) = u_0(x) - \int_{x_0}^{x} v_0(x')\,dx'$$

$$\Rightarrow g(x) = \frac{1}{2} u_0(x) + \frac{1}{2}\int_{x_0}^{x} v_0(x')\,dx'$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{2} u_0(x) - \frac{1}{2}\int_{x_0}^{x} v_0(x')\,dx'$$

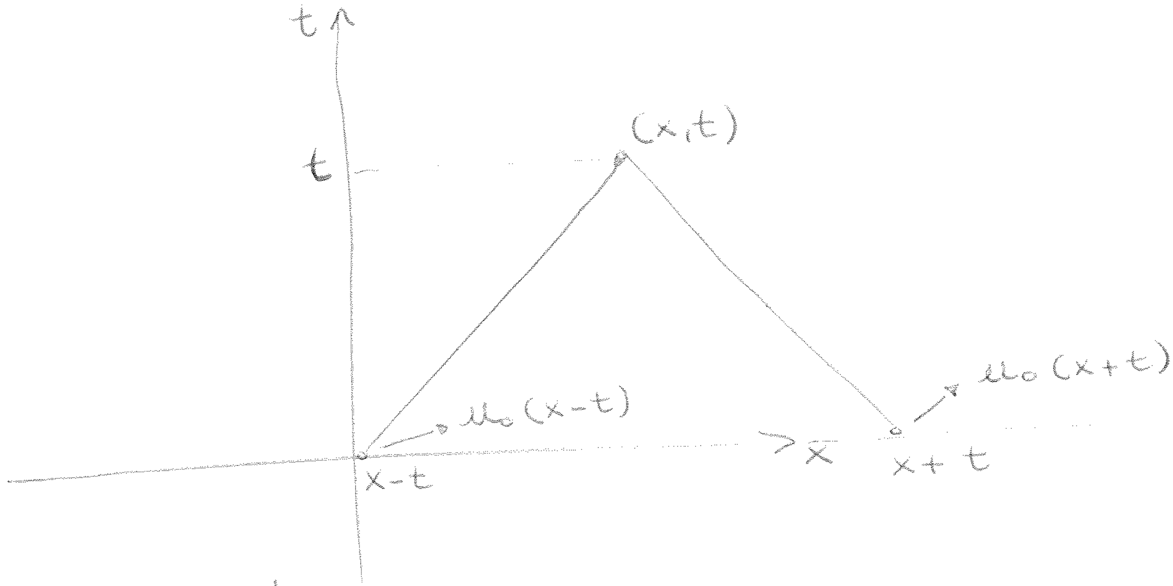
Sostituiamo f e g in (3) (espressione della soluzione):

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(u_0(x+t) + u_0(x-t)\right) + \underbrace{\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x+t} v_0(x')\,dx' - \frac{1}{2}\int_{x_0}^{x-t} v_0(x')\,dx'}_{\left(= \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x_0} v_0(x')\,dx'\right)}$$

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(u_0(x+t) + u_0(x-t)\right) + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} v_0(x')\,dx'$$

FORMULA di D'ALEMBERT

Se $u_0 \in C^2$ e $v_0 \in C^1 \Rightarrow u \in C^2$



Le CARATTERISTICHE (rette inclinate di 45°) rappresentano la propagazione del FRONTE d'onda

$\frac{1}{2}\left(u_0(x+t) + u_0(x-t)\right)$ → sto facendo la media dei valori di u dei valori che mi raggiungeranno

CORDA PIZZICATA → corda che all'istante 0 viene lasciata andare a vel. nulla che poi ritorna nella sua posizione

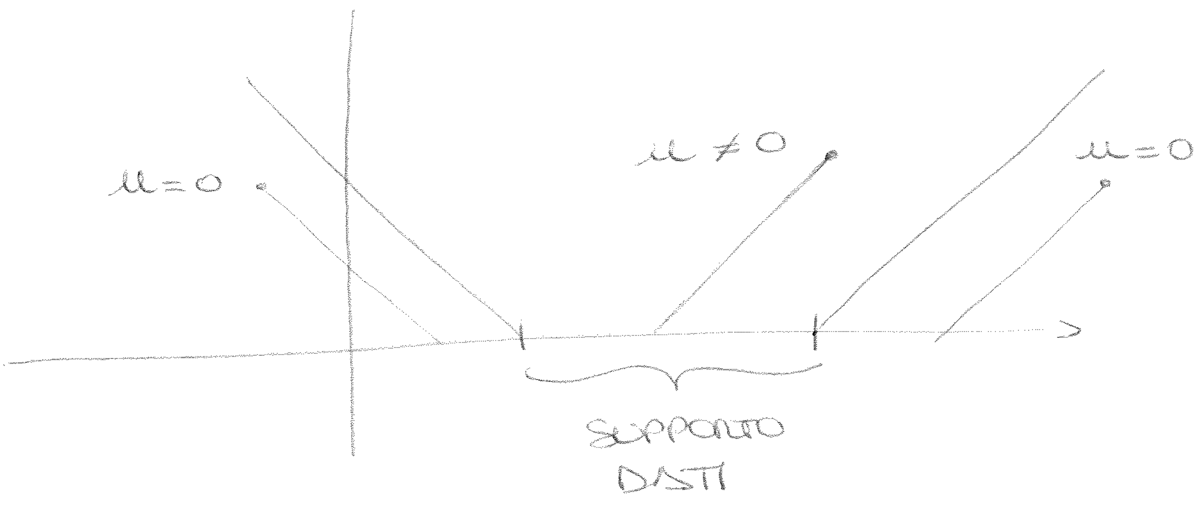
$\begin{pmatrix} u_0 \neq 0 \\ v_0 = 0 \end{pmatrix}$

Se $u_0 = 0$, $v_0 \neq 0$ → al tempo 0 è come se stesse ferma, agli istanti successivi si muoverà

↓

CORDA BATTUTA

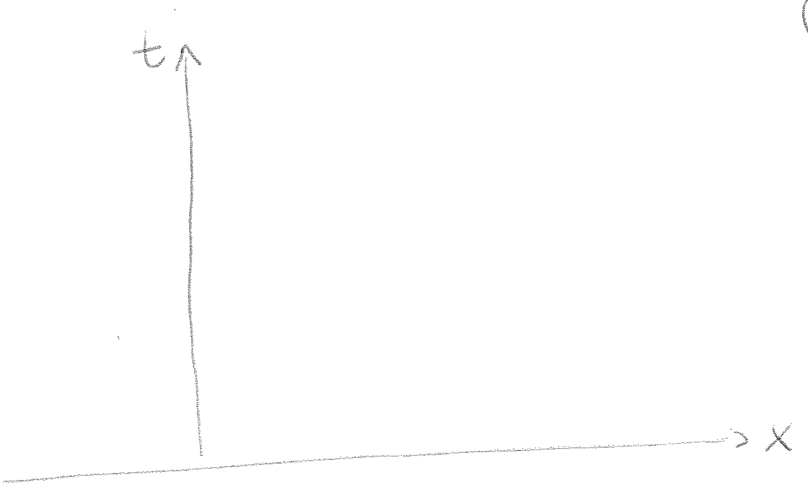
Il bordo del cono ci interessa per la CORDA PIZZICATA (ciò che è fuori non ci interessa)



$u = 0$ dove i PUNTI sono RAGGIUNTI da fronti d'onda che non partono dal SUPPORTO DATI,
$u \neq 0$ dove i punti sono raggiunti da fronti d'onda che partono dal SUPP. DATI

(Tutto ciò vale per CORDE INFINITE)

Per CORDE SEMI-INFINITE:



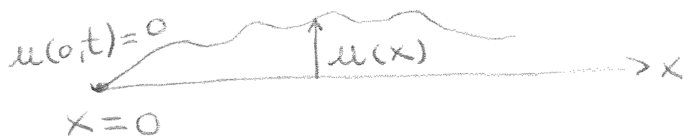
Per $x > 0$

$$\begin{cases} u(x,0) = u_0(x) \\ u_t(x,0) = v_0(x) \end{cases}$$

$$u(0,t) = 0$$

al tempo 0 la CORDA è tenuta FERMA (quindi non c'è spostamento)

$u(x) \longrightarrow$ rappresenta lo SPOSTAMENTO della CORDA risp. alla posizione d'equilibrio



Per $x < 0$

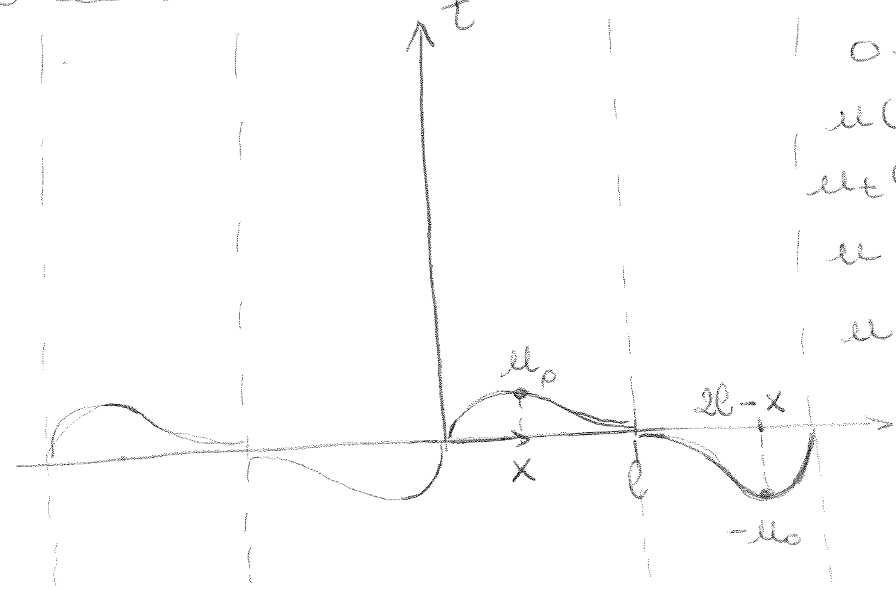
$$\left.\begin{aligned} u_0(x) &= -u_0(-x) \\ v_0(x) &= -v_0(-x) \end{aligned}\right\} \text{Impongo che queste FUNZIONI siano DISPARI}$$

Sulla SEMIRETTA si può sempre usare la FORMULA di D'Alembert sempre che le condizioni iniziali siano estese in modo DISPARI (e cancellare così i contributi dei PUNTI opposti nel caso $x < 0$)

In qst modo $u_0(x+t) + u_0(x-t) = 0$ e

$$\int_{x-t}^{x+t} v_0(x')\,dx' = 0$$

CASO DEL SEGMENTO:



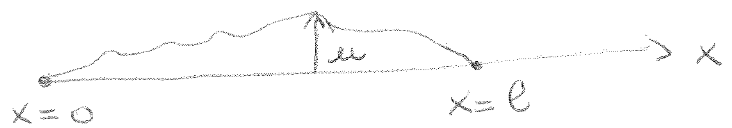
$0 \le x \le l$

$u(x,0) = u_0(x)$

$u_t(x,0) = v_0(x)$

$u(0,t) = 0$

$u(l,t) = 0$

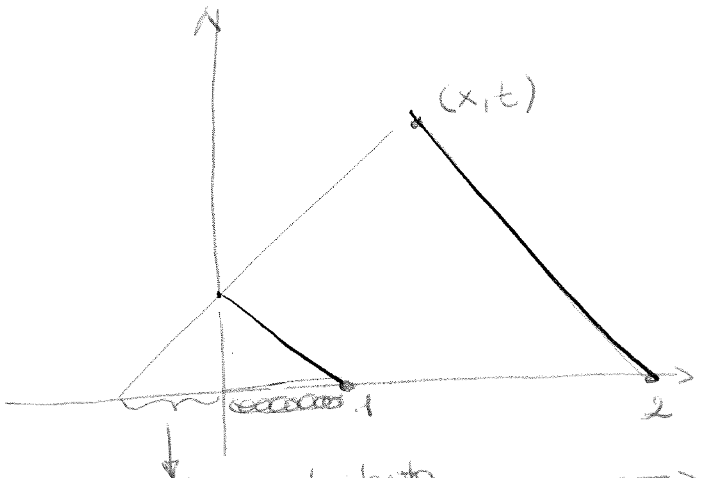


Su tutte queste RETTE | u fa 0

Dobbiamo fare in modo che valgano le seg. equazioni:

$u_0(x) = -u_0(-x)$

$u_0(x) := -u_0(l-(x-l)) = -u_0(2l-x)$

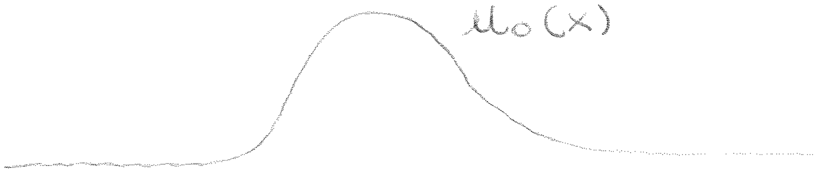


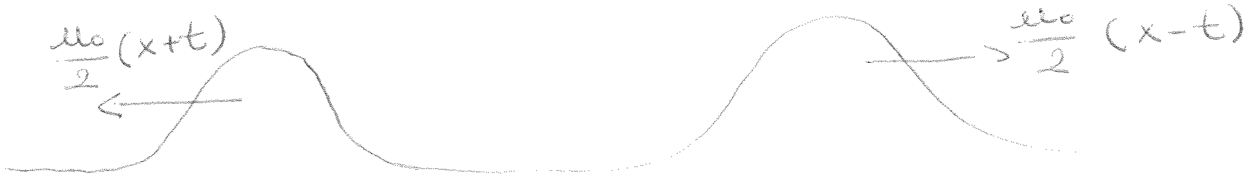
Questo contributo cancella (andando a INTEGRARE) $\Rightarrow$ Posso INTEGRARE v_0 da 1 a 2

L'onda si propagherebbe sempre se non ci fosse il VINCOLO, essendoci il VINCOLO torna indietro e si ribalta

Nel caso della CORDA PIZZICATA l'onda si rompe in 2

$\underbrace{\text{CORDA PIZZICATA}}$ → caso in cui $v_0 = 0$





Nel caso della CORDA BATTUTA (caso in cui $u_0 = 0$)

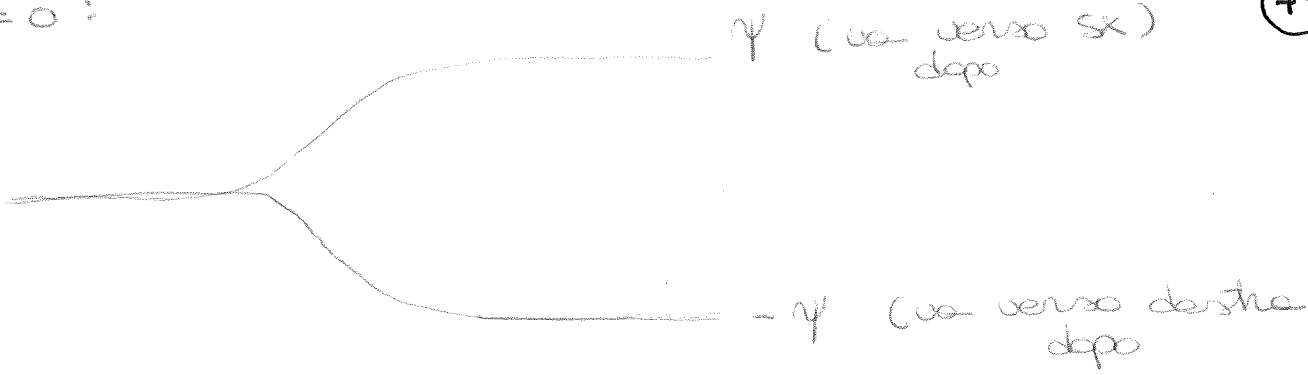
Conviene definire una curva

$$\psi(x) = \frac{1}{2}\int_{x_0}^{x} v_0(x')\,dx'$$

$$u(x,t) = \psi(x+t) - \psi(x-t)$$

ψ inizia ad essere $\neq$ da v_0 qnd entra nel supporto di v_0, ed è costante quando esce dal " " ".

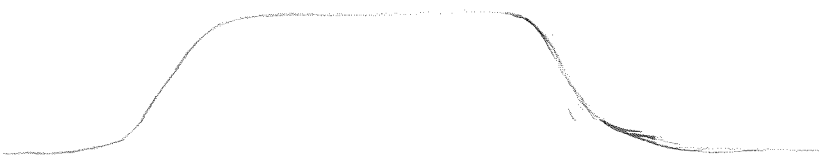
$t = 0$:



t GENERICO:

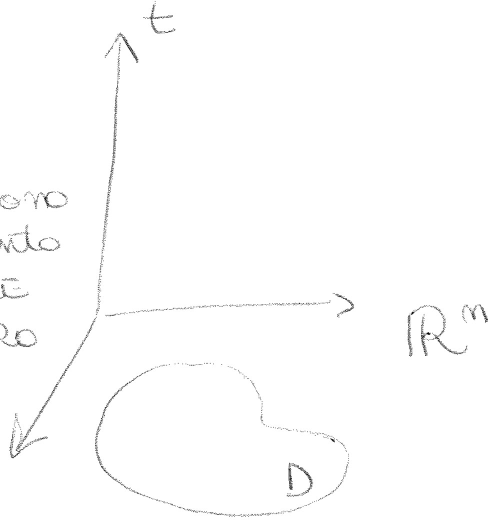
La SOMMA delle 2 onde sarà qcs del tipo:

$$\circledast \quad \mathcal{L} = \frac{1}{2}\left[(\quad)^2 - (\quad)^2 \right]$$



$$\left.\begin{aligned} & u_{tt} - \Delta_x u = 0 \\ & u(x,0)\big|_{x \in D} = g(x) \\ & u_t(x,0)\big|_{x \in D} = h(x) \\ & u(x,t)\big|_{x \in \partial D} = 0 \end{aligned}\right\}$$

EQ. delle onde che descrivono lo spostamento della PELLE del TAMBURO



dominio: D = forma del TAMBURO

L'EQ. delle ONDE è 1 EQUAZIONE VARIAZIONALE, cioè:

$$S[u] = \frac{1}{2}\int dt \int d^n x \underbrace{\left[(\partial_t u)^2 - (D_x u)^2 \right]}_{\circledast\ \mathcal{L} \ = \ \text{densità LAGRANGIANA}}$$

δu ha supporto compatto $\subsetneq D \times \mathbb{R}$

$$\delta S = \int dt\, d^n x \left\{ \partial_t u\, \partial_t \delta u - \underbrace{D_x u \cdot D_x \delta u}_{\nabla \cdot (\delta u\, D u) - \delta u\, \Delta_x u} \right\} =$$

$$= \int dt\, d^n x \left\{ -\partial_t^2 u + \Delta_x u \right\} \delta u$$

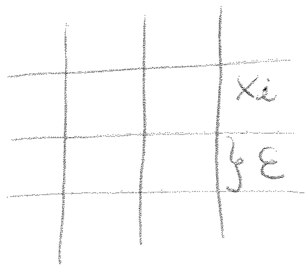
$\delta S = 0$ se u soddisfa la EQUAZIONI delle onde
$\Rightarrow$ il FUNZIONALE è STAZIONARIO (se u soddisfa la eq. delle ONDE)

$$L = \frac{1}{2} \int d^n x \left\{ (\partial_t u)^2 - (\underbrace{D_x u}_{u(x_{i+1}) - u(x_i)})^2 \right\} = \frac{1}{2} \int d^n x\, \mathcal{L}$$

$\downarrow$
LAGRANGIANA

$q_i = u(x_i)$, $\dot{q}_i = u_t(x_i)$

$$L = \frac{1}{2} \sum_i \varepsilon^n \dot{q}_i^2 - V(\bar{q})$$



La lagrangiana possiede un'hamiltoniana che viene conservata, anche in qst problema deve esserci qualcosa che viene conservato

$$H = \dot{q}^i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} - L$$

hamiltoniana

$\mathcal{H}$ = densità HAMILTONIANA

$$H = \int d^n x \overbrace{\left(u_t \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_t} - \mathcal{L} \right)}^{\mathcal{H}} =$$

$$= \int d^n x \left(u_t^2 - \left(\frac{1}{2} \left(u_t^2 - (Du)^2 \right) \right) \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \int d^n x \left(u_t^2 + (Du)^2 \right)$$

La DENSITÀ HAMILTONIANA viene conservata?

$$\frac{d}{dt} H = \int d^n x \left\{ u_t \cdot u_{tt} + \underbrace{D_x u \cdot D_x u_t}_{= \nabla \cdot (u_t D_x u) - u_t \Delta_x u} \right\} =$$

$$= \int d^n x \left\{ u_t \cdot u_{tt} - u_t \Delta_x u \right\} =$$

la DIVERGENZA va via qnd integro sul BORDO.

$$= \int d^n x \, u_t \{ \underbrace{u_{tt} - \Delta_x u}_{\text{eq. di D'Alambert dove } u \text{ è soluzione}} \} = 0$$

Avevamo supposto che l'HAMILTONIANA veniva calcolata sulla soluzione

Supponiamo u^1, u^2 SOLUZIONI di qst problema

$\Rightarrow \tilde{u} = u^1 - u^2$ è soluzione con $\tilde{g} = \tilde{h} = 0$

Poiché l'energia si conserva $\Rightarrow$ l'energia di $\tilde{u}$ si conserva

$$\underbrace{H(\tilde{u})}_{\text{energia di } \tilde{u}} = \frac{1}{2} \int d^n x \left\{ \tilde{u}_t^2 + (D_x \tilde{u})^2 \right\}$$

$$\| $$

$$H(\tilde{u})\Big|_{t=0} = \frac{1}{2} \int d^n x \left\{ \tilde{h}^2 + (D_x \tilde{g})^2 \right\} = 0$$

Allora l'integrale è $= 0$ $\forall t$, cioè: $(\tilde{h} = 0 = \tilde{g})$

$\forall t \quad \tilde{u}_t = D_x \tilde{u} = 0 \quad \Rightarrow \tilde{u} = \text{cost.} = 0$

$\Rightarrow$ Se la SOLUZIONE ESISTE, essa è UNICA.

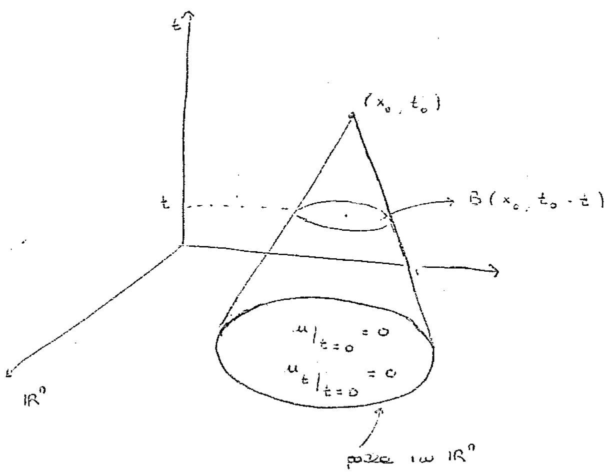
(82)

AGRIVENTURE

l'eq delle onde è variazionale

$$H(t) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} d^n x \left\{ (\partial_t u)^2 + (Du)^2 \right\}$$

$$\partial_t^2 u - \Delta_x u = 0$$

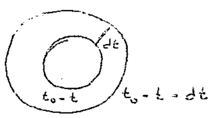


$$e(t) = \frac{1}{2} \int_{B(x_0, t_0 - t)} d^n x \left\{ u_t^2 + (Du)^2 \right\}$$

energia nella palla $B(x_0, t_0 - t)$

([illegible] sulle sezioni del cono)

$$e(0) = 0$$



$$\dot{e}(t) = \int_{B(x_0, t_0 - t)} d^n x \left\{ u_t u_{tt} + \underbrace{Du \cdot Du_t}_{= \nabla \cdot (u_t Du) - u_t \Delta_x u} \right\} - \frac{1}{2} \int_{\partial B(x_0, t_0 - t)} \left\{ u_t^2 + (Du)^2 \right\} dS =$$

integro per parti

$$= \underbrace{\int_{B(x_0, t_0 - t)} d^n x \left\{ u_{tt} - \Delta_x u \right\} u_t}_{= 0} + \int_{\partial B(x_0, t_0 - t)} u_t Du \cdot d\vec{S} - \frac{1}{2} \int_{\partial B(x_0, t_0 - t)} \left\{ u_t^2 + (Du)^2 \right\} dS \leq 0$$

$$d\vec{S} = \hat{n}\, dS$$

$$h = u_t Du \cdot \hat{n} - \frac{1}{2} \left\{ (u_t)^2 + (Du)^2 \right\}$$

$$| u_t Du \cdot \hat{n} | \leq | u_t | | Du |$$

$$h \leq | u_t Du \cdot \hat{n} | - \frac{1}{2} \left\{ (u_t)^2 + (Du)^2 \right\} \leq -\frac{1}{2} (u_t - |Du|)^2 \leq 0$$

$\Rightarrow \dot{e}(t) \le 0$

$\dot{e}(t) \le 0$ ⇒ nel tempo può solo diminuire

$e(t)$ parte da 0 $(e(0)=0)$.

$\Rightarrow e(t) = 0 \quad \forall t$

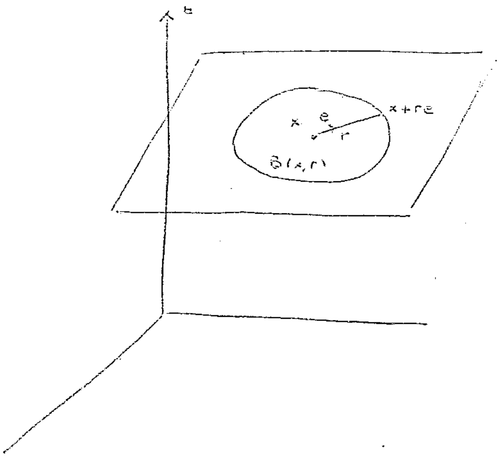
$n = 3$

$u : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \qquad C^2$

$u_{tt} - \Delta_x u = 0$

$u(x,0) = g(x)$

$\partial_t u(x,0) = h(x)$



$\fint$ = media

$S(r)$ = superficie della sfera di raggio r

$\Rightarrow$ per $n=3 \quad S(r) = 4\pi r^2$

$B(r)$ = volume della palla di raggio r

$\Rightarrow$ per $n=3 \quad B(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$

$S(r) = r^{n-1} S(1)$

$B(r) = r^n B(1)$

$$B(r) = \int_{B(r)} dV = \int_0^r S(r')\,dr' = S(1)\frac{r^n}{n} = S(r)\frac{r}{n}$$

integrale del volume sulla palla

$\Rightarrow B(r) = S(r)\frac{r}{n}$

AGRIVENTURE

$$U(x,r,t) = \fint_{\partial B(x,r)} u(y)\, dS(y)$$

$$\fint = \frac{1}{S(r)} \int$$

$$U(r,x,t) = \frac{1}{S} \int_{\partial B(0,1)} u(x+re)\, dS(e) \qquad S = S(1)$$

$$U_r = \frac{1}{S} \int_{\partial B(0,1)} Du(x+re)\cdot \vec{e}\, dS(e)$$

$$U_r = \fint_{\partial B(x,r)} Du(y)\cdot \vec{e}(y)\, dS(y) = \frac{1}{S(r)} \int_{B(x,r)} \Delta u\, dV = \frac{r}{n}\frac{1}{B(r)} \int_{B(x,r)} \Delta u\, dV = \frac{r}{n} \fint_{B(x,r)} \Delta u\, dV$$

Teorema della divergenza

$$r^{n-1} U_r = \frac{1}{S} \int_{B(x,r)} u_{tt}\, dV$$

$$(r^{n-1} U_r)_r = \frac{1}{S} \int_{\partial B(x,r)} u_{tt}\, dS = \frac{r^{n-1}}{S(r)} \int_{\partial B} u_{tt}\, dS = r^{n-1} \fint_{\partial B(x,r)} u_{tt}\, dS$$

$$(r^{n-1} U_r)_r = r^{n-1} U_{tt}$$

$$U_{rr} r^{n-1} + (n-1) r^{n-2} U_r = r^{n-1} U_{tt}$$

$$U_{rr} + \frac{n-1}{r} U_r - U_{tt} = 0 \qquad (*)$$

$$\tilde{U} = rU$$

$$\tilde{U}_r = rU_r + U$$

$$\tilde{U}_{rr} = rU_{rr} + 2U_r$$

$$\tilde{U}_{tt} = rU_{tt}$$

$n = 3$

Moltiplico $(*)$ per r e ottengo

$$\tilde{U}_{rr} - \tilde{U}_{tt} = 0$$

$$G(r) = \fint_{\partial B(x,r)} g\, dS$$

$$H(r) = \fint_{\partial B(x,r)} h \, dS$$

$$U_{rr} + \frac{2}{r} U_r - U_{tt} = 0$$

$$U(r,0) = G(r)$$

$$U_t(r,0) = H(r)$$

$$\tilde{G} = rG$$

$$\tilde{H} = rH$$

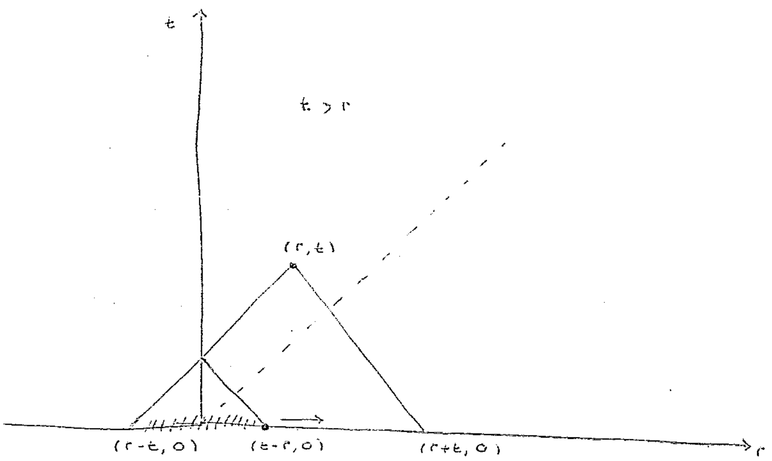
$$\tilde{U}_{rr} - \tilde{U}_{tt} = 0$$

$$\tilde{U}(r,0) = \tilde{G}(r)$$

$$\tilde{U}_t(r,0) = \tilde{H}(r)$$

$$\lim_{r \to 0} U(r,t) = u(x,t)$$

$$\tilde{U}(0,t) = 0$$



$$\tilde{U}(x,r,t) = \frac{1}{2}\left\{ \tilde{G}(r-t) + \tilde{G}(r+t) \right\} + \frac{1}{2}\int_{r-t}^{r+t} \tilde{H}(r)\, dr =$$

$\tilde{G}$ e' dispari

$$= \frac{1}{2}\left\{ \tilde{G}(r+t) - \tilde{G}(t-r) \right\} + \frac{1}{2}\int_{t-r}^{t+r} \tilde{H}\, dr$$

$$u(x,t) = \lim_{r \to 0} U(x,r,t) = \lim_{r \to 0} \frac{\tilde{U}(x,r,t)}{r} = \tilde{G}'(t) + \tilde{H}(t) = \frac{\partial}{\partial t}\underbrace{\left(t \fint_{\partial B(x,t)} g \, dS \right)}_{\tilde{G}(t)} + \underbrace{t \fint_{\partial B(x,t)} h \, dS}_{\tilde{H}(t)} =$$

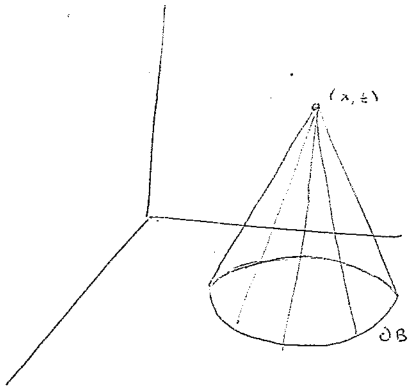
$$= \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{t}{\pi} \int_{\partial B(0,1)} g(x+te)\, dS(e) \right) = \frac{1}{\pi}\int_{\partial B(0,1)} g(x+te)\, dS(e) + \frac{t}{\pi}\int_{\partial B(0,1)} Dg(x+te)\cdot \bar{e}\, dS(e) =$$

$$= ⨍_{\partial B(x,t)} g(y)\, dS(y) + ⨍_{\partial B(x,t)} Dg(y)\cdot(y-x)\, dS$$

Quindi,

$$u(x,t) = ⨍_{\partial B(x,t)} \{ h(y)t + g(y) + Dg(y)\cdot(y-x) \}\, dS(y)$$

FORMULA DI KIRCHOFF



$n=2$

$$u_{tt} - \Delta_x^{(n=2)} u = 0$$

$$u(x_1, x_2, \underset{t}{0}) = g(x_1, x_2)$$

$$u_t(x_1, x_2, 0) = h(x_1, x_2)$$

$$u : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

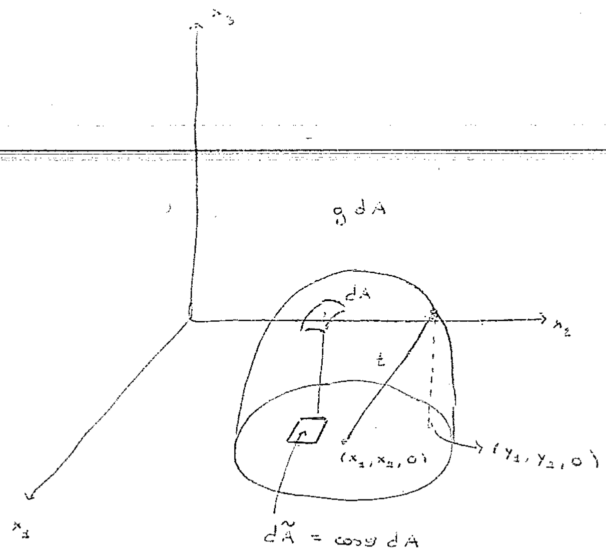
$$\bar{u}(x_1, x_2, x_3, t) := u(x_1, x_2, t)$$

$$\bar{g}(x_1, x_2, x_3, 0) := g(x_1, x_2)$$

$$\bar{h}(x_1, x_2, x_3, 0) := h(x_1, x_2)$$

$$\bar{u}_{tt} - \Delta_x^{(n=3)} \bar{u} = u_{tt} - \Delta_x^{(n=2)} u = 0$$

$$u(x_1, x_2, t) = \bar{u}(x_1, x_2, 0, t) = \underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\left(t ⨍_{\partial B((x_1,x_2,0),t)} \bar{g}\, dS \right)}_{= \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{4\pi t} \int_{\partial B((x_1,x_2,0),t)} \bar{g}\, dS \right)} + ⨍_{\partial B((x_1,x_2,0),t)} \bar{h}\, dS = (*)$$



$$dA = \frac{d\tilde{A}}{\cos\vartheta} = \sqrt{1+\tan^2\vartheta}\; d\tilde{A} = \sqrt{1+|\nabla g|^2}\; dy_1\, dy_2$$

$$g = \sqrt{t^2 - |y-x|^2}$$

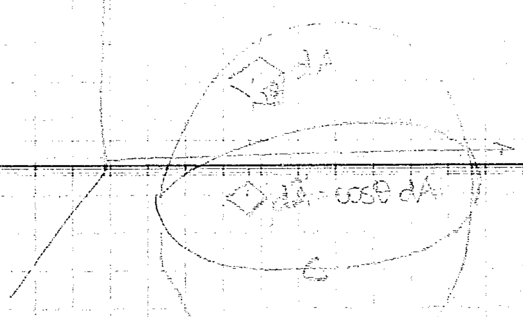
$\uparrow\ \uparrow$
$\in \mathbb{R}^2$

$$(\nabla g)^i = -\frac{1}{\sqrt{}}\,(y-x)^i \qquad i = 1, 2$$

$$|\nabla g|^2 = \frac{|y-x|^2}{t^2 - |y-x|^2}$$

$$\sqrt{1+|\nabla g|^2} = \frac{t}{\sqrt{t^2 - |y-x|^2}}$$

$$(*) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2\pi} \int_{B(x,t)} \frac{g(y)}{\sqrt{t^2 - |y-x|^2}}\, dA(y) \right) + \int_{B(x,t)} \frac{t\,h}{\sqrt{}}\, dS$$



Sto integrando sulla sfera. Poiché $\overline{u}$ non dipende da x_3 posso integrare solo sulla circonf. con centro $(x_1, x_2, 0)$.

Il contributo di dA all'integrale è $g\,dA$.
Ma se faccio l'integrale su C devo farlo su $\tilde{A}$

$$\Rightarrow dA = \frac{d\tilde{A}}{\cos\theta} = \sqrt{1+tg^2\theta}\; d\tilde{A}$$

Sono l'eq. della semisfera, $f = \sqrt{t^2 - |y-x|^2}$ (per farlo sulla sfera basta raddoppiare)

$$\Rightarrow dA = \sqrt{1+|\nabla f|^2}\; dy_1\, dy_2$$

$$(\nabla f)^i = \frac{1}{\sqrt{1+|y-x|^2}}\,(y-x)^i \qquad i = 1, 2$$

$$|\nabla f|^2 = \frac{|y-x|^2}{t^2 - |y-x|^2} \qquad \sqrt{1+|\nabla f|^2} = \frac{t}{\sqrt{t^2-|y-x|^2}}$$

$$\Rightarrow u(x_1, x_2, t) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{B(x,t)} \frac{g(y)\, dA(y)}{\sqrt{t^2-|y-x|^2}}\right) + \int_{B(x,t)} \frac{t\,h}{\sqrt{\cdots}}\, dS$$

L'area è $4\pi t^2$, ma devo prendere l'integrale 2 volte, ecco perché $1/2\pi$

28/04/2016

$$= \frac{t^2}{t^2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{B(x,t)} \frac{g(y)\, dy}{\sqrt{}}\right) + \frac{t^2}{t^2}\frac{1}{2\pi}\int_{B(x,t)} \frac{h(y)}{\sqrt{}}\, dy =$$

$$= \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{t^2}{2}\fint_{B(x,t)} \frac{g(y)\, dy}{\sqrt{}}\right) + \frac{t^2}{2}\fint_{B(x,t)} \frac{h(y)}{\sqrt{}}\, dy =$$

$$= \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{t^2}{2}\fint_{B(0,1)} \frac{g(x+tz)}{\sqrt{t^2 - t^2z^2}}\, dz\right) + \frac{t^2}{2}\fint_{B(x,t)} \frac{h(y)}{\sqrt{\cdots}}\, dy =$$

$y = x+tz$; $x, y, z \in \mathbb{R}^2$

$$= \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{t}{2}\fint_{B(0,1)} \frac{g(x+tz)}{\sqrt{1-|z|^2}}\, dz\right) + \frac{t^2}{2}\fint_{B(x,t)} \frac{h(y)}{\sqrt{\cdots}}\, dy =$$

$$= \frac{1}{2}\fint_{B(0,1)} \frac{g(x+tz)}{\sqrt{1+|z|^2}}\, dz + \frac{t}{2}\fint_{B(0,1)} \frac{Dg(x+tz)\cdot z}{\sqrt{1-|z|^2}}\, dz + \frac{t^2}{2}\fint_{B(x,t)} \cdots =$$

$$= \frac{1}{2}\left(t\fint_{B(x,t)} \frac{g(y)}{\sqrt{t^2-|y-x|^2}}\, dy\right) + \frac{t}{2}\fint \underbrace{\frac{Dg(y)\cdot(y-x)/t}{\sqrt{1-\left|\frac{y-x}{t}\right|^2}}}_{= \frac{Dg(y)\cdot(y-x)}{\sqrt{t^2-|y-x|^2}}}\, dy + \frac{t^2}{2}\fint_{B(x,t)} \frac{h(y)}{\sqrt{t^2-|y-x|^2}}\, dy =$$

$$= \frac{1}{2}\fint_{B(x,t)} \frac{g(y)\,t + t\,Dg(y)\cdot(y-x) + t^2 h(y)}{\sqrt{t^2-|y-x|^2}}\, dy$$

Formula di Poisson

Consideriamo nuovamente l'equazione delle onde $u_{tt} - \Delta_x u = 0$ su un dominio D (è il caso di una membrana che oscilla in un dominio D, ad esempio il tamburo) con condizioni iniziali

$u(x,0) = g(x)$
$u_t(x,0) = h(x)$
$u(x,t)|_{\partial D} = 0$

Cerco un metodo risolutivo basato sulla conformazione spettrale di D.
Considero una soluzione formalizzata $u(x,t) = U(x)T(x)$.

Quali sono le soluzioni esprimibili in questo modo (cioè con x e t separati)?
Sostituendo $u(x,t) = U(x)\,T(t)$ ~~ho~~ nell'equazione ho
$U T_{tt} - T \Delta_x U = 0$

$$f = \frac{\Delta_x U}{U}(x) = \frac{T_{tt}}{T}(t) \quad \text{se } U \neq 0$$

dipende da x, dipende da t
ma per il membro di destra dipende solo da t $\Rightarrow f = \text{cost} =: -\lambda$

$U(x)\big|_{\partial D} = 0$

$$\begin{cases} \Delta_x U = -\lambda U & \text{eq. Helmholtz} \\ \cancel{T_{tt} = -\lambda T} \end{cases}$$

~~(la soluzione è sinusoidale)~~

in una dimensione è l'oscillatore armonico

Moltiplico la prima per U ed ottengo
$$\int_D dV\, U\, \Delta_x U = -\lambda \int_D U^2 dV$$
$U \Delta_x U = \nabla \cdot (U \nabla U) - (\nabla U)^2$
Applico il teorema della divergenza: sul bordo U fa zero (perché u fa 0, in quanto rappresenta di quanto si alza la membrana)
$$\Rightarrow -\int_D dV\, (\nabla U)^2 = -\lambda \int_D U^2 dV$$
$\Rightarrow \lambda \geq 0$
Se $\lambda = 0 \Rightarrow u$ è costante. Altrimenti $\lambda > 0$.
$\Rightarrow$ La soluzione è sinusoidale (anche se non ho risolto Helmholtz l'ho ~~dett~~ dedotto)

Considero uno spazio di Hilbert $L^2(D)$
Qui l'operatore laplaciano è lineare autoaggiunto
(e la soluzione dell'equazione di Helmholtz mi fornisce gli autovalori del laplaciano)

Dovrei arrivare a dire che $\exists \{U_n\}$ base di $L^2(D)$ di autovettori di Δ_x, $\Delta_x U_n = -\lambda_n U_n$.

Perché Δ_x è autoaggiunto?
Se $U, V \in C^2(D)$ funzioni che si annullano sul bordo ($U, V|_{\partial D} = 0$), vale
$$\int_D \bar{V}\, \Delta_x U\, dV = \int_D \overline{\Delta_x V}\, U\, dV$$
(c'è il segno del coniugato perché di solito ci si immerge nei complessi)
$$\int_D \bar{V}\, \Delta_x U\, dV = -\int_D \overline{\nabla V} \cdot \nabla U\, dV$$ per il teorema della divergenza
Se lo applico 2 volte ottengo che Δ_x è simmetrico.
$\Rightarrow \lambda_n \geq 0$
Considero la seconda equazione $T_{tt} = -\lambda_n T$
con soluzione $T_n = A_n \operatorname{sen}(\sqrt{\lambda_n}\, t) + B_n \cos(\sqrt{\lambda_n}\, t)$ (è la soluzione relativa all'autovalore λ_n)

U_n e T_n sono entrambi soluzione, ma non è detto che anche $u = \sum_n U_n T_n$ lo sia.
(non abbiamo un risultato in convergenza di questo tipo)

$$u(x,0) = \sum_n U_n(x) \overbrace{T_n(0)}^{=B_n} = g(x)$$
$$u_t(x,0) = \sum_n U_n(x) \underbrace{(T_n)_t(0)}_{= A_n \sqrt{\lambda_n}} = h(x)$$

Sceglierò A_n e B_n in modo tale che le identità
$\sum_n U_n(x)\ B_n = g(x)$ (A)
$\sum_n U_n(x)\ A_n \sqrt{\lambda_n} = h(x)$ (B)
siano verificate.

Per esempio, dalla prima posso ottenere $B_n = \int_D dV\ g\ U_n$

$A_n = \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} \int_D dV\ h\ U_n$

A_n e B_n dipendono dallo spettro di D, cioè del laplaciano

Posso riconoscere la forma del tamburo conoscendone il suono? ~~Sì~~ No
La frequenza è $\sqrt{\lambda_n}$, dunque posso trovare lo spettro, ma purtroppo ci sono tamburi con forme diverse con il medesimo spettro

Caso particolare $D \subseteq \mathbb{R}$
Se $D = [0, \ell]$ vengono fuori le serie di Fourier.
Problem.: $\underbrace{\Delta_x U_n}_{= \frac{\partial^2 U_n}{dx^2}} = -\lambda_n U_n$, $U(0) = U(\ell) = 0$
Siamo in una sola dimensione.
In generale $U_n(x) = C_n \operatorname{sen}(\sqrt{\lambda_n}\ x) + D_n \cos(\sqrt{\lambda_n}\ x)$
Impongo le condizioni iniziali
$0 = U_n(0) = D_n \Rightarrow U_n(x) = C_n \operatorname{sen}(\sqrt{\lambda_n}\ x)$
$0 = U_n(\ell) = C_n \operatorname{sen}(\sqrt{\lambda_n}\ \ell)$
$\sqrt{\lambda_n} = \frac{n\pi}{\ell} \Rightarrow U_n = \text{costante} \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{\ell} x\right)$
Se la voglio normalizzata, impongo che l'integrale sull'intervallo faccia 1
$1 = \int_0^\ell U_n^2\ dx = C_n^2 \int_0^\ell \operatorname{sen}^2\left(\frac{n\pi}{\ell} x\right) dx = C_n^2 \frac{\ell}{2}$
$\Rightarrow C_n = \sqrt{\frac{2}{\ell}}$
$\Rightarrow U_n = \sqrt{\frac{2}{\ell}} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{\ell} x\right)$

Sia A matrice simmetrica con v_1, v_2 autovettori
$v_2 \cdot \lambda_1 v_1 = v_2 \cdot A v_1 \underset{\text{A simmetrica}}{=} A v_2 \cdot v_1 = \lambda_2 v_2 \cdot v_1$
$\Rightarrow (\lambda_2 - \lambda_1)\ v_2 \cdot v_1 = 0$
$\Rightarrow v_2 \cdot v_1 = 0$
$\lambda_2 \neq \lambda_1$

In questo modo possiamo vedere anche che gli U_n sono ortogonali.
Possiamo dunque esprimere $u(x,t)$ in questo modo
$u(x,t) = \sum_n \sqrt{2/\ell}\ \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{\ell} x\right) \left\{ A_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{\ell} t\right) + B_n \cos\left(\frac{n\pi}{\ell} t\right)\right\}$
Ponendo le condizioni (A) e (B) in serie di Fourier si ottiene
$g(x) = \sum_n \sqrt{\frac{2}{\ell}} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{\ell} x\right) B_n \underset{(*)}{\Rightarrow} B_n = \int_0^\ell g \sqrt{\frac{2}{\ell}} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{\ell} x\right)$
$h(x) = \sum_n \sqrt{\frac{2}{\ell}} \frac{n\pi}{\ell} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{\ell} x\right) A_n \Rightarrow A_n = \frac{\ell}{n\pi} \int_0^\ell h \sqrt{\frac{2}{\ell}} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{\ell} x\right)$
(*) moltiplico a destra e sinistra per U_m, poi integro, ottenendo
$\int_0^\ell g\ U_m\ dx = \sum_n \delta_{mn} B_n = B_m$

Se $B_n < \frac{1}{n^2} \Rightarrow g(x)$ è una serie uniformemente convergente.

Quando succede questo però?

$$B_n = \sqrt{\frac{2}{\ell}} \int_0^\ell g(x)\left(-\frac{d}{dx}\cos\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)\right)\frac{\ell}{n\pi}\,dx \stackrel{\uparrow}{=} \text{integro per parti}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\ell}} \underbrace{\int_0^\ell g'(x)\cos\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)dx}_{\text{è minore di una costante } K = \max g'(x)} \quad \frac{\ell}{n\pi}\left(\leq \frac{1}{n}\right) \stackrel{\uparrow}{=} \text{ripeto}$$

K: indipendente da n

$$= \left(\frac{\ell}{n\pi}\right)^2 \sqrt{\frac{2}{\ell}} \int_0^\ell g'(x)\left(\frac{d}{dx}\,\text{sen}\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)\right)dx =$$

$$= \left(\frac{\ell}{n\pi}\right)^2 \sqrt{\frac{2}{\ell}} \int_0^\ell g''(x)\,\text{sen}\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)dx < C\,\frac{1}{n^2}$$

C: costante indipendente da n

$\Rightarrow$ Per t fissato, $g(x)$ converge uniformemente

Esempio: tamburo circolare

$u_{tt} - \Delta_x^{(n=2)} u = 0$

$D = B(0,R) \subseteq \mathbb{R}^2$ ← disco

$u(x,0) = g(x)$

$u_t(x,0) = h(x)$

$$\Delta_x u \stackrel{\text{cambio coordinate}}{=} \partial_r^2 u + \frac{1}{r}\partial_r u + \frac{1}{r}\underline{(\text{parte angolare})}$$

↳ Non me la ricordo.

Come si scrive il laplaciano, se non lo ricordo?

$S[u] = \frac{1}{2}\int_D (\nabla u)^2\, dV$, δu supporto compatto

$\delta S = \int_D \nabla u \cdot \nabla \delta u\, dV = -\int_D \Delta u\, \delta u\, dV$

$\Rightarrow \Delta u$ è variazione del funzionale $S[u]$

Conviene prendere (M,g) varietà riemanniana

$x \longrightarrow g = g_{ij}(x)\, dx^i \otimes dx^j$ metrica

$g : M \rightarrow T^*M \otimes T^*M$

$g'_{ks} = g_{ij} \frac{\partial x^i}{\partial x'^k}\frac{\partial x^j}{\partial x'^s}$

$x'^i = x'^i(x^j)$

$\det g'_{ks} = \det g_{ij} \det^2\left(\frac{\partial x}{\partial x'}\right)$ ← matrice del cambio di coordinate

$\det\left(\frac{\partial x}{\partial x'}\right)\sqrt{\det g_{ij}} = \sqrt{\det g'_{ks}}$

$\mu = \sqrt{\det g'_{ks}}\; d^n x' = \sqrt{\det g_{ij}}\, \det\left(\frac{\partial x}{\partial x'}\right) d^n x' = \sqrt{\det g_{ij}}\; d^n x$

$\Rightarrow \mu$ è indipendente dalle coordinate ed è detta forma volume dello spazio riemanniano.

$u : M \rightarrow \mathbb{R}$

$du : M \rightarrow T^*M$

~~$du(x) := \partial_x u \quad x \in TM$~~

$\nabla u := g^{-1}(\cdot, du)$

$g : M \rightarrow T^*M \otimes T^*M$

$g^{-1} : M \rightarrow TM \otimes TM$

$$du = \overbrace{\partial_i u}^{\text{componenti}}\; \underbrace{\partial x^i}_{\text{base del duale}}$$

$$\nabla u = \underbrace{g^{ij}\, \partial_j u}_{\text{componenti}} \; \underbrace{\frac{\partial}{\partial x^i}}_{\text{base del tangente}}$$

$$\nabla u \cdot \nabla u = g^{-1}(du, du) = g^{ij}\, \partial_i u\, \partial_j u$$

$$\Rightarrow S[u] = \frac{1}{2} \int_D g^{ij}\, \partial_i u\, \partial_j u \overbrace{\sqrt{|g|}\, d^n x}^{=\mu}$$

$\sqrt{|g|}$ → determinante della matrice della metrica g

$$\delta S[u] = \int_D g^{ij}\, \partial_i u\, \partial_j\, \delta u \sqrt{|g|}\, d^n x = - \int_D \partial_j \left(\sqrt{|g|}\, g^{ji}\, \partial_i u \right) \delta u \frac{\sqrt{|g|}}{\sqrt{|g|}} d^n x$$

$$\Rightarrow \Delta_x u = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_j \left(\sqrt{|g|}\, g^{ji}\, \partial_i u \right)$$

Ma qual è la metrica giusta?
In coordinate cilindriche $g = dr^2 + r^2 d\theta^2 + dz^2$
La metrica rappresenta la lunghezza ds^2 di cui mi sono spostato.

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mu = \sqrt{|g|}\, d^3 x = r\, dr\, d\theta\, dz$$

$$(g_{ij}^{-1}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Metodo migliore:

$$S[u] = \frac{1}{2} \int_D \left(\frac{1}{r^2} u_\theta^2 + u_r^2 \right) \overbrace{r\, dr\, d\theta}^{=dV} = \frac{1}{2} \int_D \left(r u_r^2 + \frac{1}{r} u_\theta^2 \right) dr\, d\theta$$

$$\delta S = \int_D \left\{ r u_r (\delta u)_r + \frac{1}{r} u_\theta (\delta u)_\theta \right\} dr\, d\theta \underset{\text{per parti}}{=}$$

$$= - \int_D \frac{1}{r} \left(\frac{\partial (r u_r)}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{1}{r} u_\theta \right) r\, dr\, d\theta$$

$\Rightarrow$ Nell'esempio avevo $\Delta_x u = \partial_r u + \frac{1}{r} \partial_r u + u_{\theta\theta}$

VAR. DIFF. — elemento del cotangente

$$(\mathbb{R}^m, \delta_{ij}, dx^i \otimes dx^j) \qquad \text{SPAZIO RIEMANNIANO}$$

$$(M, g) \quad (g \text{ è la METRICA})$$

è una VARIETÀ DIFFERENZIABILE con una METRICA

$$g : M \longrightarrow T^*M \otimes T^*M$$

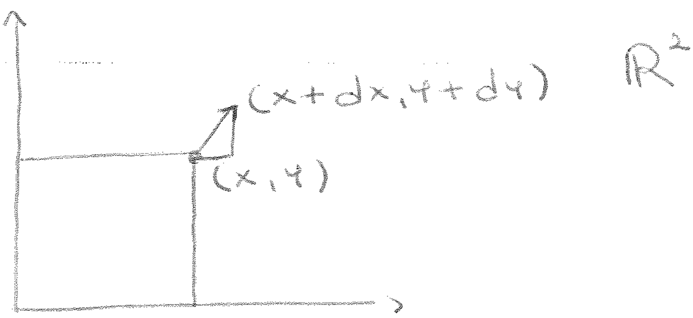
$$g : TM \otimes TM \longrightarrow \mathbb{R}$$

Con un CAMBIO di COORDINATE:

$$g = g'_{ij}\, dx'^i \otimes dx'^j$$

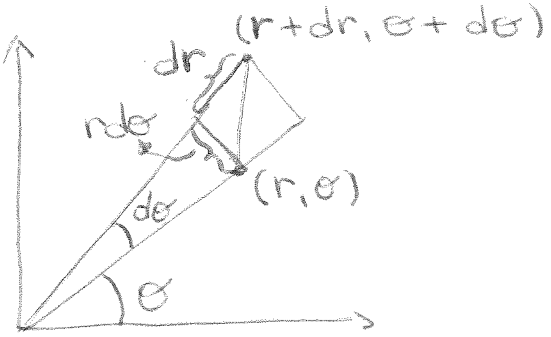
$$g'_{ij} = \frac{\partial x^k}{\partial x'^i} \frac{\partial x^l}{\partial x'^j} \delta_{kl}$$

$\mathbb{R}^2, (x,y) \Rightarrow g = dx^2 + dy^2$ → METRICA EUCLIDEA



In COORDINATE POLARI:

$(r,\theta) \Rightarrow g = dr^2 + r^2 d\theta^2$



$$d\mu = \sqrt{|\det g_{ij}|}\, d^n x \quad \in \Lambda^n(T^*M)$$

↓

Scritto così sembra dipendere dalla METRICA (in realtà $d^n x$ si può scrivere in modo tale da semplificarsi con $\sqrt{}$, quindi non dipende più dalla METRICA).

$$\int f\, d\mu$$

$$S[f] = \frac{1}{2}\int g^{-1}(df, df)\, d\mu =$$

$$= \frac{1}{2}\int g^{ij}\,\partial_i f\,\partial_j f\,\sqrt{|\det g|}\, d^n x \qquad (*)$$

(Quando gli INDICI sono IN ALTO, si intende che è la METRICA INVERSA)

$$(g^{-1})_{ij} = g^{ij}$$

$$g^{ij} g_{jk} = \delta^i_k$$

Nel caso EUCLIDEO: se $g_{ij} = \delta_{ij}$:

$$S[f] = \frac{1}{2} \int (\nabla f)^2 d^n x$$

$$\delta S[f] = - \int \underbrace{\Delta f}_{\text{LAPLACIANO di } f} \delta f \, d^n x$$

Nel caso generale (usando ⊛)

$$\delta S[f] = - \int \Delta f \, \delta f \, d\mu$$

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}$$

$$\sqrt{\det g_{ij}} = \sqrt{r^2} = r$$

$$(g^{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^{-2} \end{pmatrix} \longrightarrow \text{MATRICE INVERSA}$$

$$S[f] = \frac{1}{2} \int \left\{ (\partial_r f)^2 + \frac{1}{r^2} (\partial_\theta f)^2 \right\} \underbrace{r \, dr \, d\theta}_{d\mu}$$

$$\delta S[f] = \int \left\{ \partial_r f \, \partial_r \delta f + \frac{1}{r^2} \partial_\theta f \, \partial_\theta \delta f \right\} r \, dr \, d\theta =$$

↓ Faccio la VARIAZIONE

$$= \int \left\{ r \, \partial_r f \, \partial_r \delta f + \frac{1}{r} \partial_\theta f \, \partial_\theta \delta f \right\} dr \, d\theta =$$

$$= -\int \Big\{ \underbrace{\frac{1}{r}\, \partial_r (r\, \partial_r f) + \frac{1}{r^2}\, \partial_\theta^2 f}_{\Delta f} \Big\} \delta f \, r \, dr \, d\theta$$

$$\Delta f = \frac{1}{\sqrt{|g|}}\, \partial_i \left(\sqrt{|g|}\, g^{ij}\, \partial_j f \right)$$

↓

FORMULA del LAPLACIANO con la METRICA
(in qualunque SISTEMA DI COORDINATE)

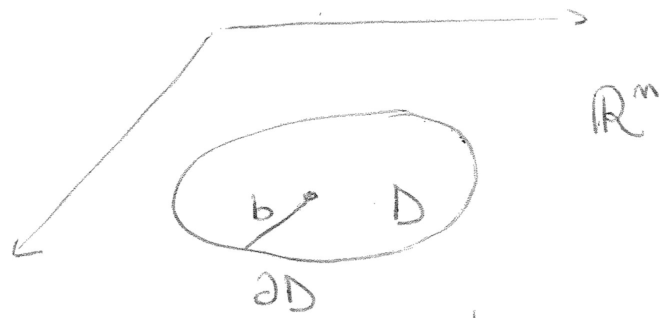
Equazione delle ONDE:

$$u_{tt} - \Delta_x u = 0$$

$$u|_D = g$$

$$u_t|_D = h$$

$$u|_{\partial D} = 0$$



b = RAGGIO

$$u(x,t) = U(x)\, T(t)$$

↓

In generale la SOLUZIONE NON sarà questa

$$f := \frac{\Delta_x U}{U}(x) = \frac{T_{tt}}{T}(t) = \text{COST.} = -\lambda$$

f è indipendente da x e indipendente da t

$\Rightarrow f$ è una COSTANTE

1) $\Delta_x U = -\lambda U$

2) $T_{tt} = -\lambda T$

3) $U|_{\partial D} = 0$

Questo Laplaciano è un operatore lineare su uno spazio di funzioni

Le eq. 1) e 2) sul dominio D con la condizione 3) producono dei valori per λ

Esempio (Tamburo circolare): il dominio D è un disco

$$\underbrace{\frac{1}{r}\partial_r(r\,\partial_r U)}_{U_{rr}+\frac{1}{r}U_r} + \frac{1}{r^2}\partial_\theta^2 U + \lambda U = 0$$

$$U(r,\theta) = R(r)\,\Psi(\theta)$$

$$\frac{1}{R}\left(R_{rr}+\frac{1}{r}R_r\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\Psi_{\theta\theta}}{\Psi} + \lambda = 0$$

Moltiplico per r^2:

$$\frac{r^2}{R}\left(R_{rr}+\frac{1}{r}R_r\right) + \underbrace{\frac{\Psi_{\theta\theta}}{\Psi}}_{\text{questo oggetto dipende solo da } \theta} + r^2\lambda = 0$$

$$\underbrace{\frac{\Psi_{\theta\theta}}{\Psi}}_{} = \underbrace{-m^2}_{\eta}$$

Questa deve essere una funzione periodica (per esserlo m deve essere intero)

$$\Psi = a e^{im\theta} + b e^{-im\theta}$$

Moltiplico per R:

$$r^2\left(R_{rr}+\frac{1}{r}R_r\right) + \left(-m^2 + r^2\lambda\right)R = 0$$

Introduco la variabile ρ:

$$\rho = r\cdot\sqrt{\lambda} \implies \rho^2 = r^2\lambda$$

$$\tilde{R}(\rho) = R(\rho)$$

Codice fiscale del percipiente [redacted]

Mod. N. 1

DATI PREVIDENZIALI ED ASSISTENZIALI INPS

SEZIONE 1 LAVORATORI SUBORDINATI

1 Matricola azienda | 2 INPS | 3 Altro | 4 Imponibile previdenziale | 5 Imponibile ai fini IVS | 6 Contributi a carico del lavoratore trattenuti

MESI PER I QUALI È STATA PRESENTATA LA DENUNCIA Uniemens

7 Tutti T | 8 Tutti con l'esclusione di G F M A M G L A S O N D

SEZIONE 2 COLLAB. COORDINATE E CONTINUATIVE

9 Compensi corrisposti al collaboratore | 10 Contributi dovuti | 11 Contributi a carico del collaboratore trattenuti | 12 Contributi versati

MESI PER I QUALI È STATA PRESENTATA LA DENUNCIA Uniemens

13 Tutti T | 14 Tutti con l'esclusione di G F M A M G L A S O N D

SEZIONE 3 INPS GESTIONE DIPENDENTI PUBBLICI (EX INPDAP)

15 Codice fiscale Amministrazione | 16 Progressivo azienda | 17 Codice identificativo attribuito da SPT del MEF | Gestione: 18 Pens. 19 Prev. 20 Cred. 21 Enpdep /Enam | 22 Anno di riferimento

23 Totale imponibile pensionistico | 24 Totale contributi pensionistici | 25 Totale imponibili TFS | 26 Totale contributi TFS | 27 Totale imponibile TFR

28 Totale contributi TFR | 29 Totale imponibile Gestione Credito | 30 Totale contributo Gestione Credito | 31 Totale imponibile ENPDEP/ENAM | 32 Totale contributi ENPDEP/ENAM

MESI PER I QUALI È STATA PRESENTATA LA DENUNCIA Uniemens

33 Tutti T | 34 Tutti con l'esclusione di G F M A M G L A S O N D

SEZIONE 4 ALTRI ENTI

49 Codice fiscale Ente previdenziale | 50 Denominazione Ente previdenziale

51 Ente previdenziale | 52 Codice azienda | 53 Categoria | 54 Imponibile previdenziale | 55 Contributi dovuti

56 Contributi a carico del lavoratore trattenuti | 57 Contributi versati | 58 Altri contributi | 59 Importo altri contributi

DATI ASSICURATIVI INAIL

71 Qualifica Z | 72 Posizione assicurativa territoriale C. C. | 73 Data inizio giorno mese | 74 Data fine giorno mese | 75 Codice comune B507 | 76 Personale viaggiante

Allora

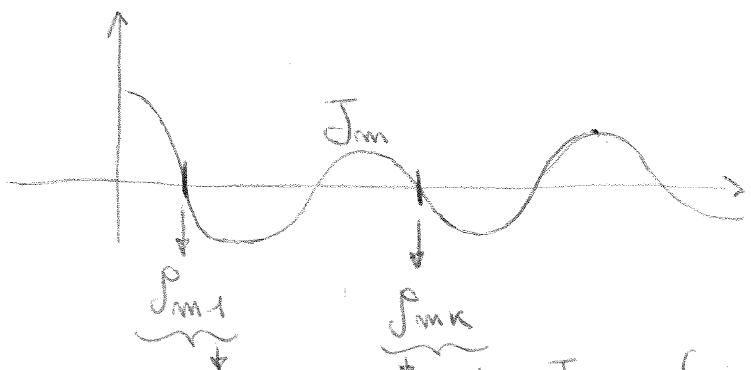
$$\underbrace{\rho^2 \tilde{R}_{\rho\rho} + \rho \tilde{R}_{\rho\rho} + (-m^2 + \rho^2) R = 0}_{\text{EQ. DI BESSEL}}$$

La SOLUZIONE si chiama: FUNZIONE di BESSEL ed è

$$\tilde{R}(\rho) = J_m(\rho)$$

$$R(r) = J_m(\sqrt{\lambda}\, r)$$

La SOLUZIONE ha un numero INFINITO di ZERI



gli ZERI di J_m (INFINITI)

$$\underbrace{R(b)}_{\substack{\text{RAGGIO del}\\ \text{DISCO}\\ D}} = 0 \implies \sqrt{\lambda}\, b = \rho_{mk} \quad \text{per un certo } k$$

$$R(r) = J_m\left(\overset{\sqrt{\lambda}}{\overset{\parallel}{\frac{\rho_{mk}}{b}}}\, r\right)$$

Ci aspettiamo che la nostra funzione u sia una somma

$$u = \sum_{m,k} \overbrace{J_m\left(\frac{\rho_{mk}}{b} r\right)}^{R} \overbrace{\left(a_{mk}\sin(m\theta) + b_{mk}\cos(m\theta)\right)}^{\psi} \cdot$$

$$\cdot \underbrace{\left(c_{mk}\sin\left(\frac{\rho_{mk}}{b} t\right) + d_{mk}\cos\left(\frac{\rho_{mk}}{b} t\right)\right)}_{T}$$

Le COSTANTI saranno fissate dalle CONDIZIONI INIZIALI.

OSS: Le COORDINATE del LAPLACIANO dipendono dal DOMINIO, cioè vanno scelte in modo tale che il BORDO del DOMINIO si possa scrivere in modo semplice.

$u_{|\partial D} = 0$

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta_x u = 0 \\ u_t - \Delta_x u = 0 \end{cases}$$

$\longrightarrow$ qst eq. rappresenta come si propaga la TEMPERATURA

eq. lineare

$u = UT$

$\Delta_x U = -\lambda U \implies \lambda > 0$ (sulle SOLUZIONI NON BANALI)

$T_t = -\lambda T \implies T(t) = d\, e^{-\lambda t}$

$u(x,0)_{|D} = g \longrightarrow$ TEMPERATURA INIZIALE

Questo u è "TEMPERATURA − TEMP del BORDO"

Un corpo soggetto allo SCAMBIO TERMICO tende all'EQUILIBRIO (La temperatura parte da 1 certo valore per poi uniformarsi a quella del bordo)

EQUAZIONI ELLITTICHE

$$Lu = a^{i,j}(x)\, \partial_i \partial_j u + b^i(x)\, \partial_i u + c(x)$$

Sia dato Ω APERTO LIMITATO di $\mathbb{R}^n$ con $\partial\Omega$ REGOLARE (C^1)

1° PROBLEMA: DIRICHLET:

Trovare $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ t.c.:

$$Lu = f \quad (f \text{ data})$$

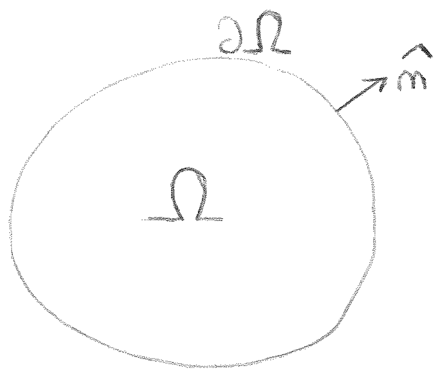
$$u|_{\partial\Omega} = \phi \quad (\phi \text{ data})$$

2° PROBLEMA: NEUMANN:

Trovare $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ t.c.:

$$Lu = f$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial\Omega} = \psi$$



$$\underbrace{\frac{\partial u}{\partial n}}_{\text{DERIVATA NORMALE di } u} = \nabla u \cdot \hat{n}$$

CASO in cui L è il LAPLACIANO:

$$L = \Delta = \delta^{ij} \partial_i \partial_j$$

(il LAPLACIANO porta con sé la METRICA di $\mathbb{R}^n$)

Teorema (PRINCIPIO DEBOLE DEL MASSIMO)

Siano u e Ω come sopra (nel caso di DIRICHLET) e supponiamo che $\Delta u \geq 0$. (condizione SUBARMONICA)
Allora u assume il MASSIMO (anche) sul BORDO $\partial\Omega$

oss:

$\Delta u = \sum_i \partial_i^2 u$ $\longrightarrow$ media delle DERIVATE seconde in tutte le direzioni (alcune potrebbero essere NEGATIVE)

Lemma (Stesse condizioni del TEO.)

Se $\Delta u > 0$, allora il MASSIMO è sul BORDO.

dim:

Per ASSURDO:

Sia $x_0 \in \Omega$, x_0 P.TO DI MASSIMO

Poiché x_0 P.TO DI MASSIMO $\Rightarrow \nabla u = 0$

$$\partial_i^2 u(x_0) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{2}{\varepsilon^2} \underbrace{\left\{ u(x_0 + \varepsilon \underset{\substack{\downarrow \\ \text{versore} \\ i\text{-esimo}}}{e_i}) - u(x_0) \right\}}_{\leq 0 \text{ poiché } x_0 \text{ P.TO DI MASSIMO}} \leq 0$$

$\Rightarrow \Delta u \leq 0$

$\Rightarrow$ CONTRADDIZIONE, poiché per IPOTESI $\Delta u > 0$

$\Rightarrow$ il MASSIMO è sul BORDO, non può essere INTERNO.

dim (TEOREMA):

$\exists\, x_0 \in \overline{\Omega}$, x_0 P.TO DI MASSIMO di u (sul COMPATTO $\overline{\Omega}$)

e supponiamo che NON ci sia un PTO DI MASSIMO in $\partial\Omega$

$$u(x_0) > \max_{\partial\Omega} u$$

$$\exists\, \varepsilon > 0 \,,\quad u(x_0) > \max_{\partial\Omega} u + \varepsilon$$

$$v = u + \sigma r^2 \qquad \text{con } r = |x - x_0|$$

Vogliamo scegliere σ in modo t.c. che v assuma MASSIMO all'interno (perché qst mi porterà a una contraddizione)

$$\max_{\partial\Omega} v \leq \max_{\partial\Omega} u + \sigma \underbrace{\max_{\partial\Omega} r^2}_{r^2_{max}} \leq \max_{\partial\Omega} u + \varepsilon$$

$$\downarrow$$

$$\left[\, 0 < \sigma < \frac{\varepsilon}{r^2_{max}} \,\right]$$

$$v(x_0) = u(x_0) > (*)$$

$\downarrow$

(poiché $r(x_0) = 0$)

$$(*) > \max_{\partial\Omega} u + \varepsilon \geq \max_{\partial\Omega} v$$

$\Longrightarrow$ v NON assume il MASSIMO sul BORDO.

$$\Delta v = \delta^{ij} \partial_i \partial_j v = \Delta u + \sigma \delta^{ij} \partial_i \partial_j \underbrace{r^2}_{= \delta_{ks} x^k x^s} \geq$$

$$\geq 2\sigma \delta^{ij} \delta^k_i \delta^s_j \delta_{ks} = 2n\sigma > 0$$

$\Longrightarrow$ CONTRADDIZIONE, poiché se $\Delta v > 0$, allora il MASSIMO dovrebbe essere sul bordo, ma non è così

✓

Sia L un operatore t.c.

$$Lu = a^{ij}(x)\,\partial_i \partial_j u + b^i(x)\,\partial_i u$$

con $a^{ij}(x)$, $b^i(x)$ CONTINUI su $\overline{\Omega}$ e a^{ij} def. POSITIVA

$$\forall x \in \overline{\Omega},\ \underbrace{\forall v \in \mathbb{R}^n,\ v \neq 0}_{\forall v \in S^{n-1}},\ \frac{a^{ij}(x)\, v_i v_j}{|v|^2} > 0$$

$\overline{\Omega} \times S^{n-1}$ è un COMPATTO $\Rightarrow \exists\, \delta > 0$:

$$\frac{a^{ij}(x)\, v_i v_j}{|v|^2} > \delta > 0$$

δ è il VALORE di questo RAPPORTO nel pto in cui raggiunge il MINIMO.

$$a^{ij} > \underbrace{\delta}_{\text{COSTANTE}}\, \delta^{ij} \iff \frac{a^{ij}(x)\, v_i v_j}{|v|^2} > \delta > 0$$

$\Rightarrow$ in questo caso si dice che l'OPERATORE è UNIFORMEMENTE ELLITTICO

Lemma

Se $Lu > 0$ allora il MASSIMO di u è in $\partial\Omega$.

dim.

Se $x_0 \in \Omega$ è il MASSIMO, $\nabla u = 0$

$$Lu(x_0) = a^{ij}(x_0)\, \partial_i \partial_j u(x_0) =$$

$$\underbrace{= a^{ij}(x_0)}_{\text{MATRICE SIMMETRICA}} \frac{\partial x'^k}{\partial x^i} \frac{\partial x'^s}{\partial x^j} \frac{\partial^2 u}{\partial x'^k\, \partial x'^s}$$

Cambio di COORDINATE:

$$x'^k = O^k_i\, x^i$$

$$a'^{ks} = a^{ij}\, O^k_i\, O^s_j$$

$$(a^{ks}) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$\lambda_i \geq \delta > 0$ poiché a^{ij} è una MATRICE def. POSITIVA

$$Lu(x_0) = \sum_K \lambda_K \underbrace{\partial^2_K u(x_0)}_{\leq 0} \leq 0 \implies \text{CONTRADDIZIONE}$$

(poiché x_0 è P.TO DI MASSIMO)

(per ipotesi $Lu > 0$)

✓

$$Lu = a^{ij}(x)\, \partial_i \partial_j u + b^i(x)\, \partial_i u$$

(supponiamo che $a^{ij}, b^i \in C^0(\overline{\Omega})$)

↓

operatore ellittico

Teorema:
Dato Ω LIMITATO con BORDO $\partial\Omega$ REGOLARE (C^1),
se $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ e $Lu \geq 0$
$\implies u$ assume MASSIMO $\underbrace{\text{(anche)}}$ sul BORDO $\partial\Omega$

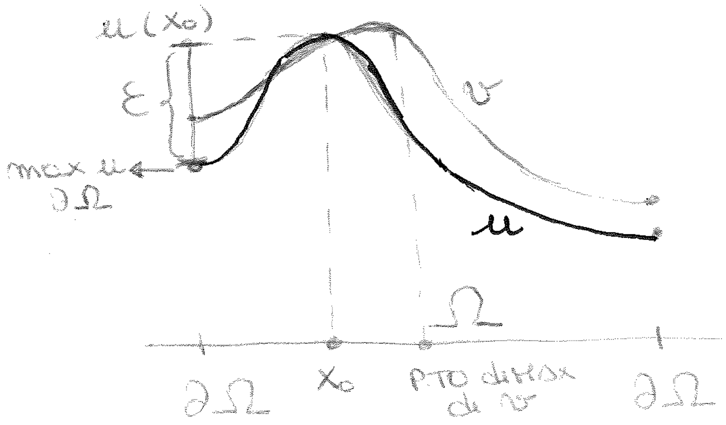
↓

(potrebbe assumere MAX anche nei P.TI INTERNI)

Lemma:
Nelle ipotesi precedenti, se $Lu > 0$
$\implies$ non ha PUNTI DI MASSIMO INTERNI
(quindi il MAX è sul BORDO $\partial\Omega$)

Dim (del Teorema):
Sia $x_0 \in \Omega$, punto di MAX di u e supponiamo che il MASSIMO non sia assunto sul bordo
Allora $\exists\ \varepsilon > 0$ t.c.: $u(x_0) > \max_{\partial\Omega} u + \varepsilon$

Il bordo è 1 compatto $\Rightarrow$ sul bordo c'è il sup



Sommiamo 1 funz. v che fa 0 in x_0 ($v(x_0)=0$)

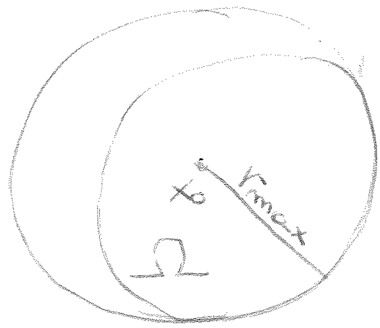
v t.c.: $Lv > 0$

v non assume MAX sul BORDO ma nei P.TI INTERNI (poiché v in x_0 assume valore $>$ risp. al valore sul bordo)

$v = u + \eta\,(e^{\sigma r^2} - 1)$

$x_0 = 0$

$r = |x - x_0| = |x|$



Scegliamo η:

$\eta < \varepsilon / (e^{\sigma r^2_{max}} - 1)$

$x \in \partial\Omega$

$v(x) \leq \max_{\partial\Omega} u + \varepsilon$

$\max_{\partial\Omega} v \leq \max_{\partial\Omega} u + \varepsilon < u(x_0) = v(x_0)$

$\Rightarrow v$ ASSUME MAX all'INTERNO

Lv

$\partial_i e^{\sigma r^2} = \partial_i e^{\sigma \bar{x}^2} = 2x^i \sigma e^{\sigma r^2}$

$\partial_i \partial_j e^{\sigma r^2} = 2\,\delta_{ij}\,\sigma e^{\sigma r^2} + 4\sigma^2 x^i x^j e^{\sigma r^2} =$

$= 2\sigma e^{\sigma r^2} \{ \delta_{ij} + 2\sigma x^i x^j \}$

$$\Rightarrow Lv = \underbrace{Lu}_{\geq 0} + \eta\, 2\sigma e^{\sigma r^2} \left\{ b^i(x) x_i + a^{ij}(x)(\delta_{ij} + 2\sigma x_i x_j) \right\}$$ 141

$$\Rightarrow Lv \geq \eta\, 2\sigma e^{\sigma r^2} \left\{ \vec{b} \cdot \bar{x} + \mathrm{tr}\, a + 2\sigma \underbrace{a(\bar{x}, \bar{x})}_{*} \right\}$$

Dobbiamo fare in modo che $\{ \quad \} > 0 \quad \forall x \in \Omega$

$|x| < r_{max}$

$$\{ \dots \} \geq -|b| \cdot r + \mathrm{tr}\, a + 2\sigma \delta r^2$$

(* la scrivo così poiché a^{ij} è 1 forma bilineare)

$$\exists \delta : \forall x \in \bar{\Omega} \quad a(x)(\bar{x}, \bar{x}) > \delta |\bar{x}|^2$$

(a è 1 matrice che ha i suoi AUTOVALORI che variano in modo continuo con x)

$$\Delta = |b|^2 - 8\sigma\delta\, \mathrm{tr}(a)$$

Vogliamo che Δ sia NEGATIVO

$$\Delta < 0 \Rightarrow \sigma > \frac{|b|^2}{8\delta\, \mathrm{tr}(a)}(x)$$

$$\sigma > \max_{\bar{\Omega}} \frac{|b|^2}{8\delta\, \mathrm{tr}(a)}$$

Scegliendo così $\sigma \Rightarrow \{ \dots \} > 0 \Rightarrow Lv > 0$

$\Rightarrow$ CONTRADDIZIONE! poiché se $Lv > 0$, v non può assumere MAX all'INTERNO ✓

Def:

Data una funzione $u : \Omega \to \mathbb{R}$, $u \in C^0(\Omega)$, u ha la PROPRIETÀ DELLA MEDIA, se $\forall r, \forall x_0 \in \Omega$ con $B(x_0; r) \subseteq \Omega$, si ha

$$(1) \quad u(x_0) = \frac{1}{S_n r^{n-1}} \int_{\partial B(x_0, r)} u(x)\, dS \quad \rightarrow \text{MEDIA di } u \text{ sul BORDO della PALLA } B(x_0, r)$$

S_m è la SUPERFICIE della SFERA UNITARIA (sfera di RAGGIO r)

e equivalentemente

$$(2) \quad u(x_0) = \frac{m}{S_m r^m} \int_{B(x_0,r)} u(x)\, dv$$

VOLUME della PALLA di RAGGIO r in dim. m $= \dfrac{S_m r^m}{m}$

(2) $\Rightarrow$ (1)

Porto r^m a sx e derivo rispetto a r:

$$r^m u(x_0) = \frac{m}{S_m} \int_{B(x_0,r)} u(x)\, dv$$

Derivo risp. a r:

$$\cancel{m}\, r^{m-1} u(x_0) = \frac{\cancel{m}}{S_m} \int_{\partial B(x_0,r)} u\, dS$$

$$\Rightarrow u(x_0) = \frac{1}{S_m r^{m-1}} \int_{\partial B(x_0,r)} u\, dS \qquad \checkmark$$

(1) $\Rightarrow$ (2)

$$\frac{m}{S_m r^m} \int_{B(x_0,r)} u\, dv = \frac{m}{S_m r^m} \int_0^r dr' \overbrace{\int_{\partial B(x_0,r')} u\, \underbrace{dS}_{= r'^{m-1} dS(1)}}^{= S_m r'^{m-1} u(x_0)} =$$

$$= \frac{m}{\cancel{S_m} r^m} \left(\int_0^r r'^{m-1} dr' \right) \cancel{S_m}\, u(x_0) =$$

$$= \frac{n}{\rho^n} \frac{\rho^n}{n} u(x_0) = u(x_0)$$ ✓

Def: La SOLUZIONE FONDAMENTALE di Δ in $\mathbb{R}^n$ è $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$, $\Delta f = 0$ tale che:

f è RADIALE, $f(\bar{x}) = F(r)$

e $\nabla f = - \dfrac{1}{\underbrace{S_n r^{n-1}}_{S_n(r)}} \hat{r}$

$n = 1 \qquad F = r$

$n = 2 \qquad F = \dfrac{1}{2\pi} \log \dfrac{r_0}{r}$ (r_0 = COSTANTE arbitraria)

$n = 3 \qquad F = \dfrac{1}{4\pi} \dfrac{1}{r}$

$\vdots$

$n > 2 \qquad F = \dfrac{1}{S_n (n-2)} \dfrac{1}{r^{n-2}}$

$\nabla r = \hat{r}$

Dobbiamo far vedere che il LAPLACIANO di f è 0:

Se f è RADIALE

$$\Delta f = F_{rr} + \frac{n-1}{r} F$$

$$S[f] = \frac{1}{2} \int (\nabla f)^2 \, d^n x$$

$$\delta S[f] = - \int \Delta f \, \delta f \, d^n x$$

$$S[f] = \frac{1}{2} \int \{ (\partial_r f)^2 + \underbrace{\ldots\ldots}_{} \} \underbrace{r^{n-1} dr}_{\text{parte RADIALE}} \; \underbrace{d\Omega}_{\text{PARTE ANGOLARE}}$$

Non mi interessa andare a vedere i termini in coordinate diverse da r

DERIVATE ANGOLARI (su cui non indago)

$$\delta S[f] = \int \{ \partial_r f \, \partial_r \delta f + \dots \} r^{n-1} dr\, d\Omega =$$

$$= -\int \left\{ \frac{1}{r^{n-1}} \partial_r (r^{n-1} \partial_r f) + \dots \right\} r^{n-1} dr\, d\Omega$$

$$\Delta f = \partial_r^2 f + \frac{n-1}{r} \partial_r f + \text{DERIVATE ANGOLARI}$$

se f è RADIALE le DERIVATE ANGOLARI vanno a 0

$r^{n-1} \partial_r f = \text{costante} \implies \Delta f = 0$

(i termini MISTI si semplificano tra di loro)

$$\nabla \cdot (v \nabla u - u \nabla v) \overset{\uparrow}{=} v \Delta u - u \Delta v$$

$\forall\, u, v \in C^2(\Omega)$

Integriamo sul DOMINIO D e usiamo il TEO della DIVERGENZA:

$$\int_{\partial D} (v \nabla u - u \nabla v) \cdot dS = \int_D (v \Delta u - u \Delta v)\, dv$$

con $\bar{D} \subset \Omega$

Teorema

Se $u \in C^2(\Omega)$ è ARMONICA $\implies$ ha la PROPRIETÀ della MEDIA

dim:

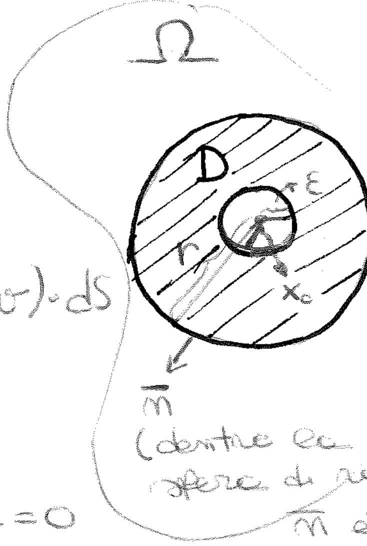
$D = B(x_0, r) \setminus B(x_0, \varepsilon)$

Sia $v = F(|x - x_0|)$

$\Delta u = \Delta v = 0$ su D

$$\int_{\partial B(x_0, r)} (v \overbrace{\cancel{\nabla u}}^{=0} - u \nabla v) \cdot dS = \int_{\partial B(x_0, \varepsilon)} (v \overbrace{\cancel{\nabla u}}^{=0} - u \nabla v) \cdot dS$$

(v la posso portare fuori)



(dentro la sfera di raggio ε $\bar{n}$ è ENTRANTE)

Se $v = 1$ $\quad \int_{\partial D} \nabla u \cdot dS = 0$ se $\Delta u = 0$

$\forall$ dominio D

$$= \int_{\partial D} \frac{\partial u}{\partial n}\, dS$$

$$\int_{\partial B(x_0,r)} u \frac{1}{S_n r^{n-1}} \underbrace{\hat{r}\cdot d\bar{S}}_{dS} = \int_{\partial B(x_0,\varepsilon)} u \underbrace{\frac{1}{S_n \varepsilon^{n-1}}} \underbrace{\hat{r}\cdot d\bar{S}}_{dS}$$

$\to$ MEDIA di u sulla sferetta

$S_n \varepsilon^{n-1}$ = superficie della sferetta di raggio ε

Tutti i valori di u sulla sferetta mi tendono a $u(x_0)$

$$\frac{1}{S_n r^{n-1}} \int_{\partial B(x_0,r)} u \, dS = u(x_0)$$ ✓

Teorema

Se $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, $u \in C^0(\Omega)$, ha la proprietà della MEDIA $\Longrightarrow$ è C^∞ e ARMONICA

dim:

(*) Inoltre $\int \eta^\varepsilon dv = 1$, $\eta^\varepsilon(-\bar{x}) = \eta^\varepsilon(\bar{x})$)

u è C^∞ Infatti:

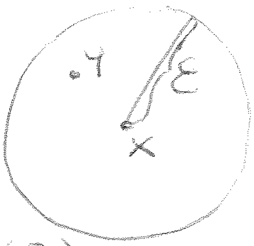
Sia η^ε un MOLLIFICATORE in $\mathbb{R}^n$

(serve η^ε RADIALE, C^∞ e che si ANNULLA fuori da un COMPATTO di DIAMETRO $< \varepsilon$, cioè il SUPPORTO di η^ε sta dentro una PALLA di RAGGIO ε. (*)

Definiamo

$$u^\varepsilon(x) = \int \eta^\varepsilon(x-y)\, u(y)\, dv(y)$$

$u^\varepsilon \in C^\infty$



Pongo $z = y - x$

$$u^\varepsilon(x) = \int_{B(0,\varepsilon)} \eta^\varepsilon(z)\, u(x+z)\, dv(z) =$$

$$= \int_{B(0,\varepsilon)} \eta^\varepsilon(r)\, u(x + r\bar{e})\, r^{n-1}\, dr\, d\Omega =$$ $\to$ per la PROPRIETÀ della MEDIA

$$= \int_{B(0,\varepsilon)} \eta^\varepsilon(r)\, u(x_0)\, r^{n-1}\, dr\, S_n = u(x)$$

$\Longrightarrow u \in C^\infty$ ✓

Per i soggetti iscritti all'INPS l'importo complessivo dei contributi trattenuti viene attestato per i lavoratori subordinati nella Sezione 1, punto 6, e per i collaboratori nella Sezione 2, punto 11. Tale importo non comprende le trattenute operate per i pensionati che lavorano.

Il lavoratore dipendente può utilizzare la certificazione per consegnarla all'INPS ai fini degli adempimenti istituzionali.

4.2 Gestione Dipendenti Pubblici (ex INPDAP) - Sezione 3

La Sezione 3 certifica i redditi imponibili e i contributi afferenti alle gestioni ex INPDAP, di seguito Gestione Dipendenti Pubblici (la L. n. 214 del 22 dicembre 2011 di conversione al D.L. n. 201 del 6 dicembre 2011 ha disposto la soppressione dell'INPDAP e trasferito le funzioni all'INPS). Nei relativi punti, il lavoratore potrà riscontrare i totali imponibili ai fini pensionistici TFS, TFR, Gestione credito, ENPDEP, ENAM ed i relativi contributi trattenuti e dovuti per il lavoratore dipendente relativamente all'anno 2015.

L'importo complessivo dei contributi trattenuti e dovuti ai fini pensionistici, delle diverse gestioni del trattamento di fine servizio e del trattamento di fine rapporto viene attestato nella Sezione 3, nei punti 24, 26, 28, 30 e 32.

Il lavoratore dipendente può utilizzare la certificazione per consegnarla all'INPS Gestione Dipendenti Pubblici ai fini degli adempimenti istituzionali.

4.3 Altri Enti - Sezione 4

La Sezione 4 è riservata alla certificazione dei redditi imponibili e dei contributi afferenti agli Enti previdenziali diversi da quelli riportati nelle precedenti sezioni. Nei relativi punti, l'iscritto alla Cassa può riscontrare il totale imponibile ai fini previdenziali e i relativi contributi dovuti e trattenuti nell'anno 2015. L'importo complessivo dei contributi effettivamente versati nell'anno di riferimento è attestato nella Sezione 4, punto 57. Nel punto 58 si attesta anche l'eventuale versamento di altri contributi obbligatori se presenti e, al punto 59, il loro importo.

u è ARMONICA, infatti:

Supponiamo $\Delta u \neq 0$ in $x_0 \in \Omega$

$\Rightarrow \Delta u$ di segno definito in $B(x_0, r)$ per r abbastanza piccolo

$$0 \neq \int_{B(x_0,r)} \Delta u \, dv \underset{\substack{\text{teo della} \\ \text{DIVERGENZA}}}{=} \int_{\partial B(x_0,r)} \nabla u \cdot d\bar{S} = \int_{\partial B(x_0,r)} \nabla u \cdot \bar{e} \, dS =$$

(il laplaciano è la divergenza del gradiente)

$$= \int_{\partial B(x_0,r)} \frac{d}{d\varepsilon} u(x_0 + \varepsilon \bar{e}) \, dS =$$

$$= \frac{d}{d\varepsilon} \int_{\partial B(x_0,\varepsilon)} u(x_0 + \varepsilon \bar{e}) \frac{r^{m-1}}{\varepsilon^{m-1}} \, dS(\varepsilon) \underset{\text{per la PROPR. della MEDIA}}{=}$$

$$= \frac{d}{d\varepsilon} \underbrace{\left(r^{m-1} u(x_0) S_m \right)}_{\text{indipendente da } \varepsilon} = 0 \Rightarrow \text{contraddizione}$$

$(\Delta u = u_{xx} + u_{yy})$

$\Rightarrow u$ è ARMONICA, cioè $u_{xx} = -u_{yy}$ ✓

Teorema (PRINCIPIO FORTE del MASSIMO)

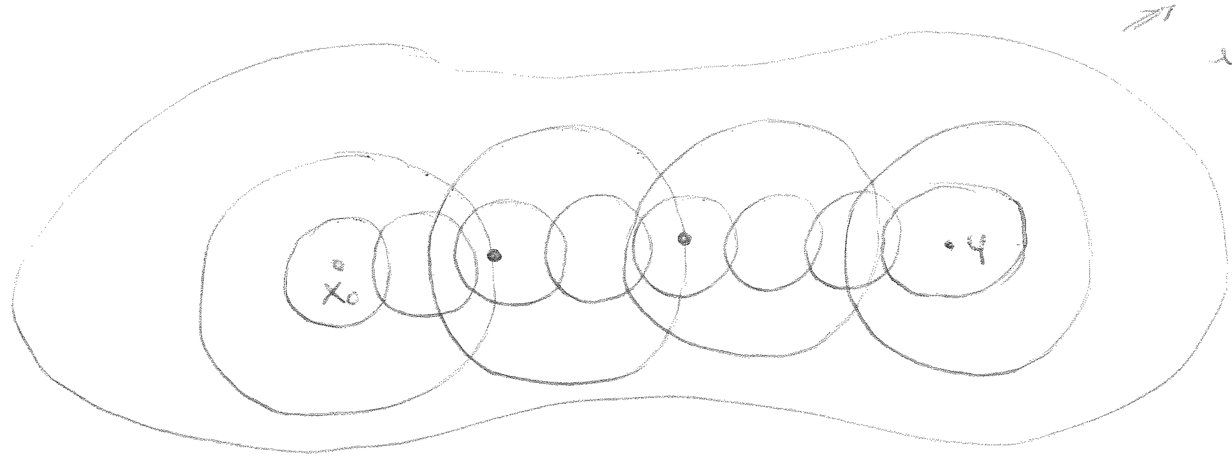
Ω è APERTO CONNESSO e $\Delta u = 0$ e u assume MASSIMO in Ω

$\Rightarrow$ è COSTANTE

$u(y) = u(x_0)$
$\Downarrow$
$u = \text{cost}$

dim :

$u(x_0)$

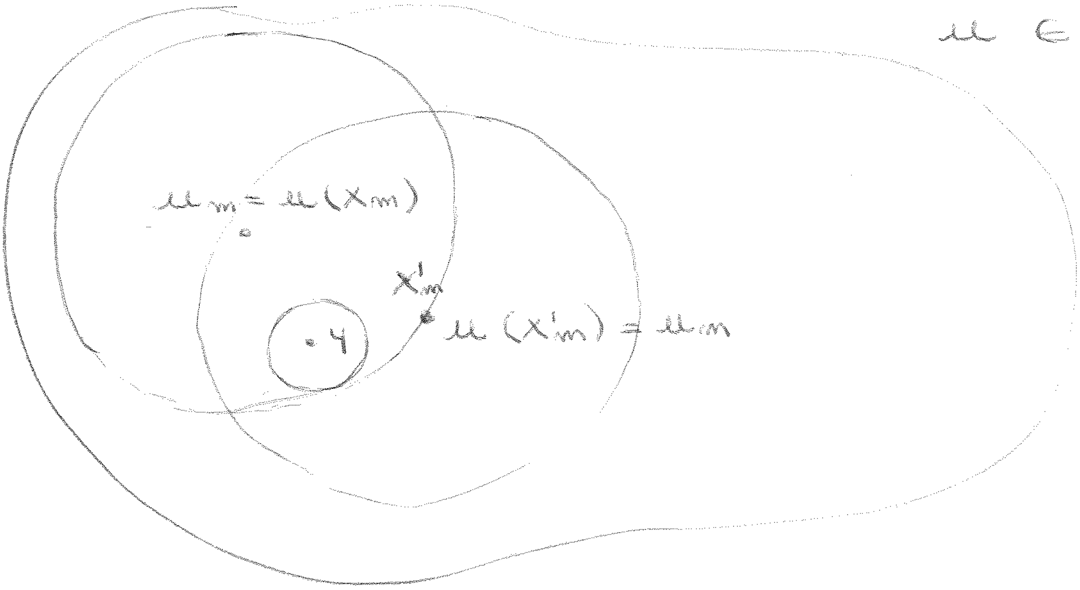


x_0 è la MEDIA di u sulla PALLA
Tutta la PALLA assume VALORE $u(x_0)$ (cioè quello del MASSIMO)

Se in tutta la palla non avessi $u(x_0)$, avrei che la MEDIA nella PALLA sarebbe $< u(x_0)$ che non è possibile

(i punti sul bordo sono i CENTRI delle PALLE) ✓

$u \in C^0(\overline{\Omega})$



$u_m \rightarrow$ media di u sulla palla

$u(y) < u_m \Rightarrow \fint_B u \, dv < u_m$

u deve essere così su Π la palla e quindi sul bordo

Teorema ⊛

$\Delta u = 0$ su Ω, $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$

Se $u|_{\partial\Omega} = c = \text{cost} \Rightarrow u|_{\overline{\Omega}} = c$

Teo

La soluzione del problema di Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{(POISSON)} \\ u|_{\partial\Omega} = \varphi \end{cases} \qquad (\Omega \text{ limitato}, \partial\Omega \text{ regolare})$$

è unica, $f \in C^0(\overline{\Omega})$, $\varphi \in C^0(\partial\Omega)$

dim:

u_1, u_2 soluzioni, $v := u_2 - u_1$

$\Delta v = 0$

$v|_{\partial\Omega} = 0$

$\Rightarrow v = 0$ su $\overline{\Omega}$ (per ⊛) $\Rightarrow u_1 = u_2$

$\Rightarrow$ la sol. è unica

✓

Teo

Con le ipotesi precedenti senza l'ipotesi che dice Ω limitato e aggiungendo l'ipotesi: $\lim_{x \to \infty} u(x) = 0$

$\Rightarrow$ stessa tesi.

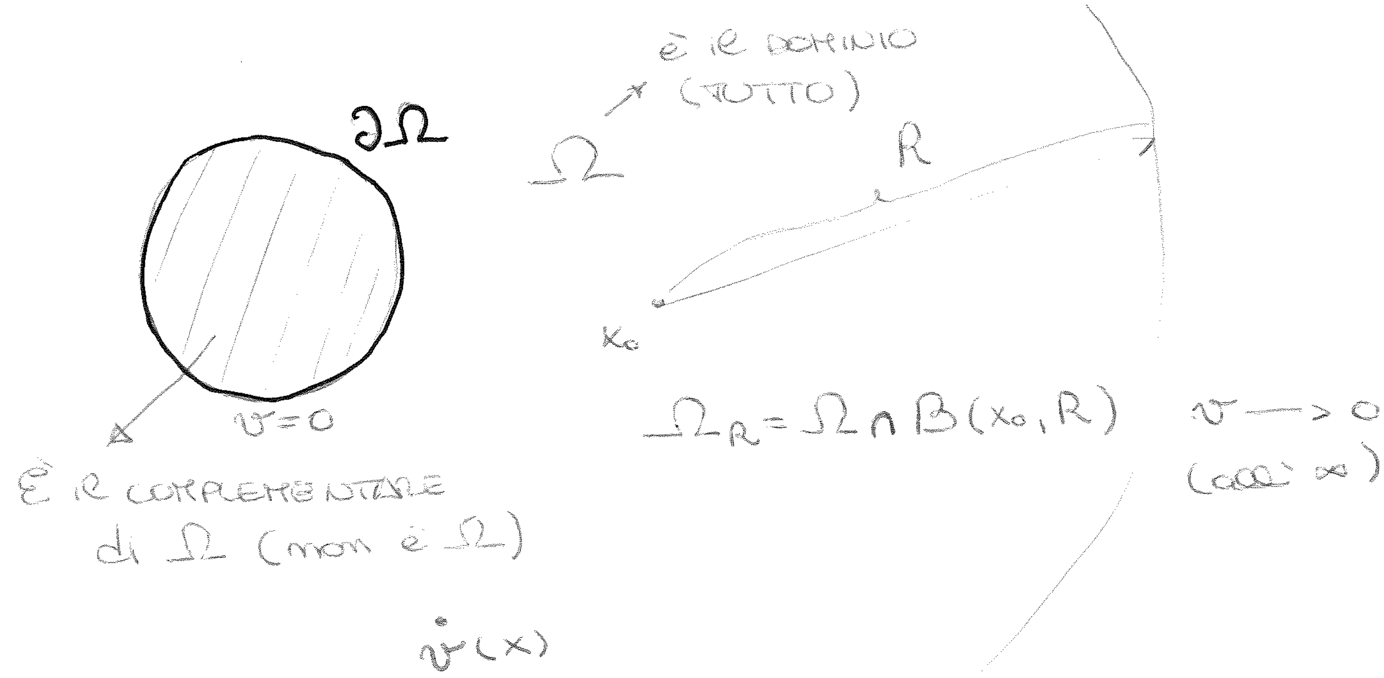
dim:

u_1, u_2 soluzioni, $v := u_2 - u_1$

$\Delta v = 0$

$v|_{\partial\Omega} = 0$

$\lim_{x \to \infty} v = 0$ $\Rightarrow v = 0$ su $\overline{\Omega} \Rightarrow u_1 = u_2$



v assume MAX e MIN sul bordo di Ω_R,

$v(x)$ assume valore $>$ min e $<$ max

$v(x) \leq \underbrace{v_m}_{v \text{ MASSIMO}} < \varepsilon \longrightarrow R \text{ t.c.: } v\big|_{\partial B(x_0,R)} < \varepsilon$ ✓

Teorema di LIOUVILLE

$u : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ ARMONICA e $\underbrace{\text{LIMITATA}}_{(\text{cioè } |u| < M)}$ $(u \in C^2)$

$\Longrightarrow u = \text{COST.}$

dim:

(Faccio un cambio di variabili)

$$u(x_0) = \fint_{B(x_0,R)} u(x)\,\overbrace{dv}^{d^n x} = \fint_{\underbrace{B(0,1)}_{\text{palla unitaria di } \mathbb{R}^n}} u(x_0 + Rz)\, d^n z$$

(il "TRATTINO" indica la MEDIA)

$$u(x) = \fint_{B(0,1)} u(x + Rz)\, d^n z$$

$$\nabla u = \fint_{B(0,1)} \nabla u(x + Rz)\, d^n z = \fint_{B(x,R)} \nabla u \; dv$$

$$\underbrace{\nabla_{\bar{e}} u}_{\overset{\shortparallel}{\bar{e}\cdot\nabla u}} = \fint_{B(x,R)} \bar{e}\cdot\nabla u \, dv = \fint_{B(x,R)} \nabla\cdot(u\bar{e})\, dv$$

$(\nabla \bar{e} = 0$ poiché $\bar{e} = \text{cost.})$

↓

derivata in direzione $\bar{e}$ della funz. u

Si applica il teo della divergenza

$$|\nabla_{\bar{e}} u| = \left| \frac{1}{B(x,R)} \int_{\partial B(x,R)} u \, \bar{e}\cdot\bar{n} \, \underset{\downarrow}{dS} \right| \leq$$

(elemento superficiale)

$$\leq \frac{1}{B(x,R)} M \int_{\partial B(x,R)} dS \leq M \frac{S(x,R)}{B(x,R)} \sim \frac{1}{R}$$

(palla arbitraria, $\bar{e}$ arbitrario e il p.to x arbitrario)

$\Rightarrow \nabla u = 0 \Rightarrow u = \text{cost.}$ ✓

$f(z) = u + iv$ tale che $f'(z)$ esiste

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} \\[2ex] \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$$

(sommando)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \Rightarrow u \text{ funzione ARMONICA}$$

(Analogo per v)

$\Rightarrow \Delta u = \Delta v = 0$

Se f è LIMITATA $\Rightarrow$ u, v sono LIMITATE

$\Rightarrow$ u, v sono costanti $\Rightarrow$ f costante

Teo:

Se $f: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ OLOMORFA è LIMITATA

$\Rightarrow$ è costante

$$\nabla u \cdot \nabla v = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

(cioè i 2 GRADIENTI sono ORTOGONALI tra loro in ogni PUNTO)

Teo:

Per ogni $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ t.c.: f è OLOMORFA su $\overline{\Omega}$,

$|f|$ assume MASSIMO anche sul BORDO $\partial\Omega$

<u>dim</u>:

Ci basta dim. che f^2 è una funzione SUBARMONICA

Ci chiediamo: $\Delta|f|^2 \geq 0$?

$|f|^2 = u^2 + v^2$

$\nabla|f|^2 = 2u\nabla u + 2v\nabla v$ $\longrightarrow$ GRADIENTE di $|f|^2$

$\Delta|f|^2 = 2\{|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2\} \geq 0$ $\longrightarrow$ LAPLACIANO di $|f|^2$

$\left(\nabla(\nabla u) = \nabla(\nabla v) = 0\right.$ poiché u, v ARMONICHE $\left.\right)$

$\Rightarrow$ $|f|$ assume MAX anche sul BORDO ✓

(Per dire che $|f|$ assume MIN $\overset{\text{sul bordo}}{\checkmark}$, consideriamo $\frac{1}{f}$ e ci chiediamo dove sta il MAX di $\frac{1}{f}$, che è il MIN di f. Posso considerare $1/f$ poiché, essendo f OLOMORFA,

CERTIFIC
UNICA

Agenzia Entrate

CE[illegible]AZIONE DI CUI ALL'ART. 4, COMMI 6-ter e 6-quater, DE[illegible]R. 22 LUGLIO 1998, n. 322, RELATIVA ALL'ANNO 2015

DATI ANAGRAFICI

DATI RELATIVI AL DATORE DI LAVORO, ENTE PENSIONISTICO O ALTRO SOSTITUTO D'IMPOSTA

Cognome o Denominazione 2 — Nome 3

Prov. 5: FI — Cap 6: 50013 — Indirizzo 7: VIA F.LLI CERVI, 73 Fraz. Capa

Indirizzo di posta elettronica 9: amministrazione@mbcentro.it — Codice attività 10: 464710 — Codice sede 11

DATI RELATIVI AL DIPENDENTE, PENSIONATO O ALTRO PERCETTORE DELLE SOMME

Cognome o Denominazione 2 — Nome 3

Data di nascita 5 — Co[illegible] (o Stato estero) di nascita: [illegible]REGGIO — Provincia di nascita (sigla) 7: LU — Categorie particolari 8 — Eventi eccezionali 9 — Casi di esclusione dalla precompilata 10

DOMICILIO FISCALE ALL' 1/1/2015

Provincia (sigla) 21: LU — Codice comune 22: L833

DOMICILIO FISCALE ALL' 1/1/2016

Provincia (sigla) 24 — Codice comune 25

DATI RELATIVI AL RAPPRESENTANTE

RISERVATO AI PERCIPIENTI ESTERI

Località di residenza estera 41

Non residenti Schumacker 43 — Codice Stato estero 44

FIRMA DEL SOSTITUTO DI IMPOSTA

V[illegible]NI ANDREA

lo è anche $\frac{1}{f}$. Devo solo stare attenta che f non sia ZERO.)

Lemma di HOPF

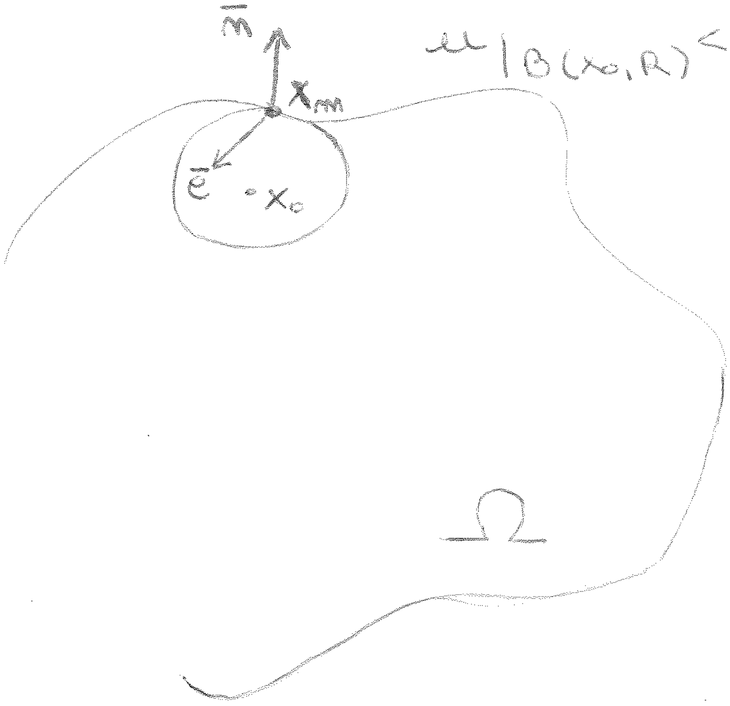
Sia $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ ARMONICA NON COSTANTE (Ω anche ILLIMITATO) e supponiamo esista x_m PUNTO DI MASSIMO (sappiamo $x_m \in \partial\Omega$, per il PRINCIPIO di MAX FORTE)

Supponiamo che $\partial\Omega$ abbia proprietà SFERA INTERNA in x_m, allora per $\bar{e} \in T_{x_m}\mathbb{R}^n$,

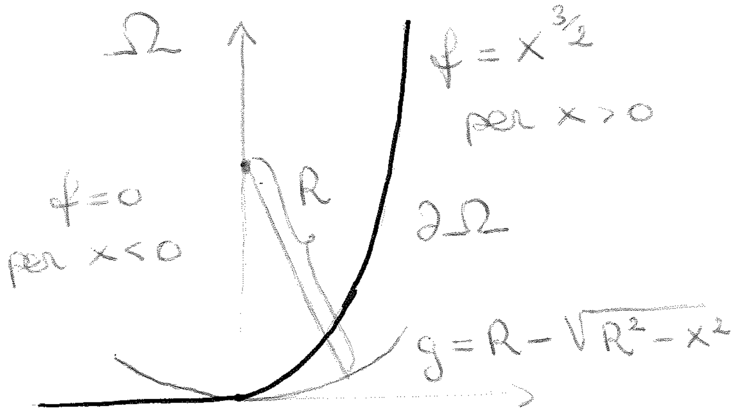
$\bar{e} \cdot \bar{n} < 0$

$$\limsup_{\varepsilon \to 0} \{u(x_m + \varepsilon \bar{e}) - u(x_m)\} / \varepsilon < 0$$

$u|_{B(x_0,R)} < u_m = u(x_m)$



$$\underbrace{\text{Esiste } B(x_0, R) \subseteq \Omega \quad \text{t.c.: } \partial B(x_0,R) \cap \partial\Omega = \{x_m\}}_{\text{PROPRIETÀ SFERA INTERNA in } x_m}$$



$f' = \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}} \quad , \quad x > 0$

$f \in C^1(\mathbb{R})$

$f'' = \frac{3}{4} \frac{1}{\sqrt{x}}$

$\lim_{x \to 0^+} \frac{f}{g} > 1$

$g' = \frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}} \quad , \quad g'' = \frac{1}{\sqrt{R^2 - x^2}} + \frac{x^2}{(R^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}} \quad , \quad g''(x=0) = \frac{1}{R}$

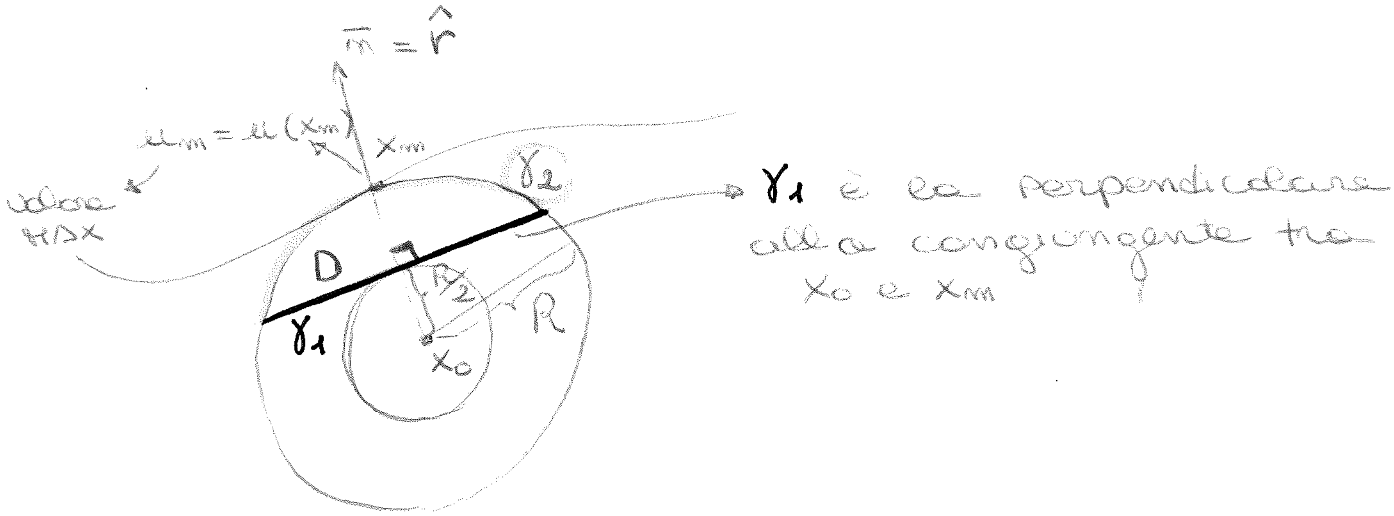
$\lim_{x \to 0^+} \frac{f''}{g''} \longrightarrow +\infty > 1$ (per qualunque R)

$\Rightarrow$ Non c'è nessuna PALLA INTERNA, anche se il bordo è C^1

$$v = u + \varepsilon \underbrace{\left(e^{-\alpha r^2} - e^{-\alpha R^2} \right)}_{w}$$

con $r = |x - x_0|$

R = RAGGIO della SFERA INTERNA



$$w|_{\gamma_2} = 0$$

$$\Delta v = \Delta u + \varepsilon \Delta w$$

$$\Delta w = \partial_r^2 w + \frac{n-1}{r} \partial_r w =$$

$$= e^{-\alpha r^2} \left\{ (n-1)(-2\alpha) - 2\alpha + 4\alpha^2 r^2 \right\} = \circledast$$

$$\partial_r w = -2\alpha r e^{-\alpha r^2}$$

$$\partial_r^2 w = -2\alpha e^{-\alpha r^2} + 4\alpha^2 r^2 e^{-\alpha r^2}$$

$$\circledast = e^{-\alpha r^2} \left\{ -2\alpha n + 4\alpha^2 r^2 \right\} =$$

$$= 2\alpha e^{-\alpha r^2} \left\{ 2\alpha r^2 - n \right\}$$

Scelgo $\alpha > \frac{2n}{R^2}$

$\Rightarrow \Delta w \geq 0 \quad$ per $r \geq \frac{R}{2}$

$\Rightarrow \Delta v = \Delta u + \varepsilon \Delta w \geq 0 \quad \Rightarrow v$ è SUBARMONICA

$\max_{\gamma_1} u \quad < u_m$

$\downarrow$

per il PRINCIPIO
del max forte

Quindi scelgo ε t.c.: $\underbrace{\max_{\gamma_1} u + \varepsilon \left| \max_{\gamma_1} w \right|}_{\geq \max_{\gamma_1} v} < u_m$

$(w|_{\gamma_2} = 0)$

$\uparrow$

$\max_{\gamma_2} v = \max_{\gamma_2} u \leq u_m$

$\downarrow$

("=" solo in x_m)

$$0 \geq \limsup_{\varepsilon \to 0} \frac{v(x_m + \varepsilon \bar{e}) - v(x_m)}{\varepsilon} =$$

$$= \limsup_{\varepsilon \to 0} \frac{u(x_m + \varepsilon \bar{e}) - u(x_m)}{\varepsilon} + \varepsilon \nabla w \cdot \bar{e}$$

$$\nabla w = -2\alpha r e^{-\alpha r^2} \nabla r = -2\alpha r e^{-\alpha r^2} \underbrace{\hat{r}}_{= \bar{n}}$$

$$\bar{e} \cdot \nabla w = \underbrace{-(\hat{r} \cdot \bar{e})}_{>0} 2\alpha r e^{-\alpha r^2} > 0$$

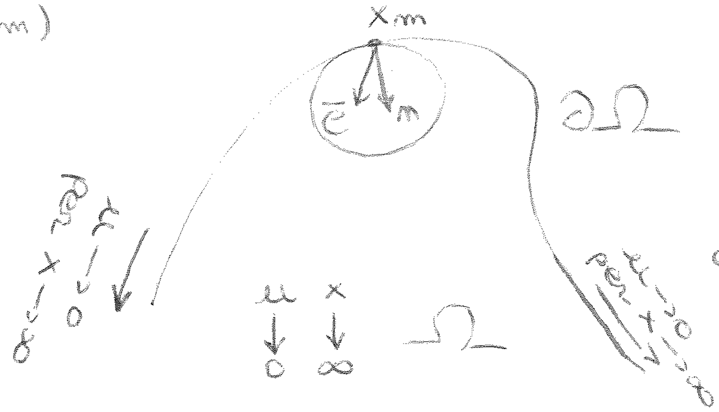
$$\limsup_{\varepsilon \to 0} \frac{u(x_m + \varepsilon \bar{e}) - u(x_m)}{\varepsilon} < 0$$

oss: se $\lim_{\varepsilon \to 0} \gamma(\varepsilon) = \gamma$

$$\Rightarrow \limsup_{\varepsilon \to 0} \{\alpha(\varepsilon) + \gamma(\varepsilon)\} = \limsup_{\varepsilon \to 0} \alpha(\varepsilon) + \gamma$$

$\Rightarrow$ segue la TESI ✓

$u_m = u(x_m)$ (n entrante)



(Se $\partial\Omega$ non è COMPATTO $\Rightarrow u \to 0$, $x \to \infty$ (sia in $\partial\Omega$, sia in Ω))

$\partial\Omega$ deve avere la proprietà della palla interna

$$0 > \limsup_{\varepsilon \to 0} \frac{u(x_m + \varepsilon e) - u(x_m)}{\varepsilon} = \partial_e u$$

se $u \in C^1(\Omega)$

$u \in C^2(\Omega)$

$\Delta u = f$

$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial\Omega} = \psi$

Se la regione di Ω non è COMPATTA aggiungo la condizione: $\lim_{x \to \infty} u(x) = 0$

$\exists u : \Delta u = f$ e $\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial\Omega} = \psi$?

dim

UNICITÀ

Siano u_1, u_2 SOL, $u := u_2 - u_1$

$\Delta u = 0$

$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial\Omega} = 0$

$\lim_{x \to \infty} u(x) = 0$

Se $\exists \bar{x}$: $u(\bar{x}) > 0$ per $\bar{x} \in \bar{\Omega}$

$\Rightarrow$ esiste MASSIMO, $x_m \in \partial\Omega$

$\Rightarrow$ per il Lemma di HOPF: $\frac{\partial u}{\partial n}(x_m) < 0$

Ma $\frac{\partial u}{\partial n}(x_m) = 0 \Rightarrow$ CONTRADDIZIONE

Codice fiscale del percipiente

Mod. N. 1

DATI PREVIDENZIALI ED ASSISTENZIALI INPS

SEZIONE 1 LAVORATORI SUBORDINATI

1 Matricola azienda 017589388 — 3 Altro — 4 Imponibile previdenziale — 5 Imponibile ai fini IVS — 6 Contributi a carico del lavoratore trattenuti

MESI PER I QUALI È STATA PRESENTATA LA DENUNCIA Uniemens

7 Tutti X — 8 Tutti con l'esclusione di: G F M A M G L A S O N D

SEZIONE 2 COLLAB. COORDINATE E CONTINUATIVE

9 Compensi corrisposti al collaboratore — 10 Contributi dovuti — 11 Contributi a carico del collaboratore trattenuti — 12 Contributi versati

MESI PER I QUALI È STATA PRESENTATA LA DENUNCIA Uniemens

13 Tutti T — 14 Tutti con l'esclusione di: G F M A M G L A S O N D

SEZIONE 3 INPS GESTIONE DIPENDENTI PUBBLICI (EX INPDAP)

15 Codice fiscale Amministrazione — 16 Progressivo azienda — 17 Codice identificativo attribuito da SPT del MEF — Gestione: 18 Pens. — 19 Prev. — 20 Cred. — 21 Enpdep /Enam — 22 Anno di riferimento

23 Totale imponibile pensionistico — 24 Totale contributi pensionistici — 25 Totale imponibili TFS — 26 Totale contributi TFS — 27 Totale imponibile TFR

28 Totale contributi TFR — 29 Totale imponibile Gestione Credito — 30 Totale contributo Gestione Credito — 31 Totale imponibile ENPDEP/ENAM — 32 Totale contributi ENPDEP/ENAM

MESI PER I QUALI È STATA PRESENTATA LA DENUNCIA Uniemens

33 Tutti T — 34 Tutti con l'esclusione di: G F M A M G L A S O N D

SEZIONE 4 ALTRI ENTI

49 Codice fiscale Ente — 50 Denominazione Ente previdenziale

51 Ente previdenziale — 52 Codice azienda — 53 Categoria — 54 Imponibile previdenziale — 55 Contributi dovuti

56 Contributi a carico del lavoratore trattenuti — 57 Contributi versati — 58 Altri contributi — 59 Importo altri contributi

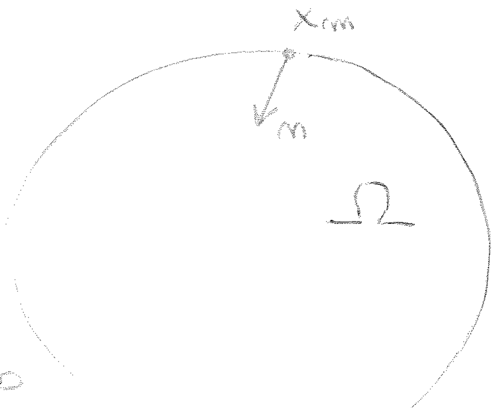
DATI ASSICURATIVI INAIL

71 Codice — 72 Posizione assicurativa territoriale 007 — C. C. 56111 — 73 Data inizio giorno mese — 74 Data fine giorno mese — 75 Codice comune B507 — 76 Personale viaggiante

$\Rightarrow u(x) \leq 0$ su $\bar{\Omega}$, quindi $\nexists\, \bar{x} \in \bar{\Omega} : u(\bar{x}) > 0$

$\Rightarrow u = 0 \Rightarrow u_1 = u_2 \Rightarrow$ SOLUZ. UNICA ✓

Se Ω è un COMPATTO:



u è ARMONICA

Se u è cost

$\Rightarrow$ ok finito

Se u non è cost

$\Rightarrow$ il pto di MAX sta sul bordo

Se u NON-COST $\exists\, x_m \in \partial\Omega$

$\Rightarrow$ per il LEMMA di HOPF $\frac{\partial u}{\partial n} < 0$

Ma $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$, quindi questo caso non si ha

OSS:
La soluzione fondamentale ha simmetria sferica

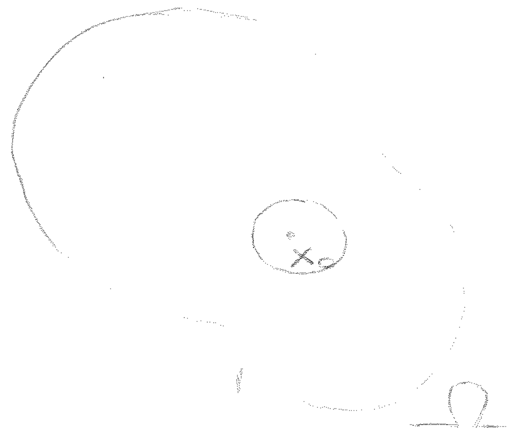
$\Downarrow$

Non è quella da usare per la formula di Green

$$\nabla \cdot (v \nabla u - u \nabla v) = v \Delta u - u \Delta v$$

$$\int_{\partial D} (v \Delta u - u \Delta v) \cdot dS = \int_D (v \Delta u - u \Delta v)\, d^n x$$

$u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$
v è ARMONICA almeno sul bordo



SOL FONDAMENTALE

$n = 1 \qquad \Gamma(r) = r$

$n = 2 \qquad \Gamma(r) = \dfrac{1}{2\pi} \ln \dfrac{r_0}{r}$

$n \geq 3 \qquad \Gamma(r) = \dfrac{1}{(n-2) S_n} \dfrac{1}{r^{n-2}}$

con $r = |x - x_0|$

$v = \Gamma(|x - x_0|)$

$D = \Omega \setminus B(x_0, \varepsilon)$

$$\int_{\partial\Omega} (\Gamma \nabla u - u \nabla \Gamma) \cdot dS - \int_{\partial B(x_0,\varepsilon)} (\underbrace{\Gamma}_{\varepsilon^{2-n}} \underbrace{\nabla u}_{\text{funz. continua}} - u \underbrace{\nabla \Gamma}_{-\frac{1}{S_n \varepsilon^{n-1}} \hat{r}}) \cdot \underbrace{dS}_{\varepsilon^{n-1}} =$$

$S_n \varepsilon^{n-1}$ superficie di $B(x_0, \varepsilon)$

$$= \int_{\Omega \setminus B(x_0,\varepsilon)} \underbrace{\Gamma}_{\text{va come } \varepsilon^{2-n}} \underbrace{\Delta u}_{\text{è continuo}} \underbrace{d^n x}_{\text{va come } \varepsilon^n}$$

(il contributo di qst sferetta va a 0 qnd $\varepsilon \to 0$)

Cosa succede qnd $\varepsilon \to 0$?

$\to$ Passando al limite per $\varepsilon \to 0$, questo pezzo non ci dà problemi

$$\Rightarrow \int_{\partial\Omega} (\Gamma \nabla u - u \nabla \Gamma) \cdot dS - u(x_0) = \int_\Omega \Gamma \Delta u \, d^n x$$

$$u(x_0) = \int_{\partial\Omega} \Big(\underbrace{\Gamma \nabla u}_{(*)} - \underbrace{u \nabla \Gamma}_{\circledast} \Big) \cdot dS - \underbrace{\int_{\Omega} \Gamma \Delta u \, d^n x}_{\circledast}$$

$\circledast$ CONTRIBUTO DIPOLARE

Se invece di Ω, si fosse preso 1 palla centrata in x_0, qst formula si sarebbe ridotta al teo della MEDIA.

Ω si può scegliere ARBITRARIAMENTE

$$\circledast = \int_{\Omega} \frac{-4\pi \rho(x)}{\cancel{4\pi} |x_0 - x|} d^n x \longrightarrow$$ potenziale dovuto alla carica elettrica all'interno del DOMINIO

$$(*) = \int_{\partial\Omega} \frac{\overbrace{\sigma(x)}^{\text{densità di carica sup.}}}{|x - x_0|} \longrightarrow$$ POTENZIALE superficiale

$$\circledast = \int u \frac{n \cdot \widehat{|x - x_0|}}{|x - x_0|^2} dS \longrightarrow$$ POTENZIALE DIPOLO

u = densità del DIPOLO

↑

INTERPRETAZIONE FISICA

$$\left(\begin{array}{l} \Delta u = f \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = \psi \\ \Delta v = 4\pi \rho \end{array} \right)$$

$$R = \overbrace{\gamma(x)}^{1°} + \overbrace{\Gamma(|x - x_0|)}^{2°} - \overbrace{b\,\Gamma(|x - x_1|)}^{3°}$$

$x_1 \in \Omega$

$\Delta \gamma = 0$ su Ω $\longrightarrow$ condizione al contorno per γ

Applico il teo di Green a tutti e 3 i pezzi (il 2° l'ho già fatto):

$$0 = \int_{\partial\Omega} (\gamma \nabla u - u \nabla \gamma) \cdot dS - \int_{\Omega} \gamma \Delta u \, d^n x$$

$$-b\,u(x_1) = \int_{\partial\Omega} \{ -b\,\Gamma(|x - x_1|) \nabla u - u \nabla(-b\Gamma) \} \cdot dS - \\ - \int_{\Omega} (-b\Gamma) \Delta u \, d^n x$$

Codice fiscale del partecipante

Mod. N. 1

DESCRIZIONE ANNOTAZIONI

Se le sommo tutte e 3:

$$u(x_0) - b\,u(x_1) = \int_{\partial\Omega} (h \nabla u - u \nabla h) \cdot dS - \int_{\Omega} h \Delta u \, d^n x$$

Se sono nel PROBLEMA di DIRICHLET:

prendo $b = 0$ e γ t.c. $\underline{h|_{\partial\Omega} = 0}$

ciò vuol dire che

$$\gamma|_{\partial\Omega} = -\Gamma(|x - x_0|)|_{\partial\Omega}$$

$h = G(x, x_0) \longrightarrow$ funzione di Green

Questo problema per γ si può risolvere e quindi $\exists$ la funzione di Green

$$u(x_0) = -\int_{\partial\Omega} \underbrace{u(x)}_{\text{è } \varphi(x)} \frac{\partial G}{\partial n}(x, x_0)\, dS(x) - \int_{\Omega} G(x, x_0) f(x) d^n x$$

La funzione di Green $\exists$ sempre.

PROBLEMA di NEUMANN:

prendo $b = 1$ e γ t.c. $\left.\frac{\partial h}{\partial n}\right|_{\partial\Omega} = 0$

$$\begin{cases} \left.\frac{\partial \gamma}{\partial n}\right|_{\partial\Omega} = \frac{\partial}{\partial n}\Big(\Gamma(|x - x_1|) - \Gamma(|x - x_0|)\Big)\Big|_{\partial\Omega} \longrightarrow \text{condizione al bordo di NEUMANN particolare} \\ \Delta \gamma = 0 \end{cases}$$

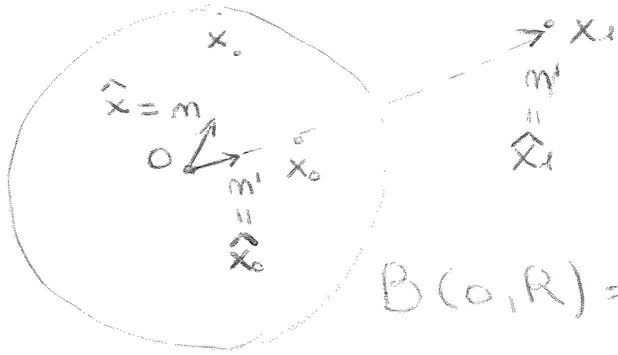
Se trovo γ che risolve il sistema

$\Rightarrow$ chiamo $h = N \rightarrow$ funzione di NEUMANN

$$u(x_0) - \underbrace{u(x_1)}_{} = \int_{\partial\Omega} N(x, x_0)\, \psi(x)\, dS(x) - \int_{\Omega} N(x, x_0)\, f(x)\, d^n x$$

$\downarrow$

Rappresenta la libertà della soluz. la troviamo a meno di una COSTANTE $\rightarrow$ Infatti: la cond. al bordo di Neumann coinvolge la derivate (se sommiamo una cost, troviamo altre soluzioni)



$B(0,R) = \Omega$

$$\Delta_x \overbrace{G(x, x_0)}^{\text{funz. di GREEN}} = 0 \quad \text{per } x \neq x_0$$

$$G(x, x_0)\Big|_{x \in \partial\Omega} = 0$$

(La SINGOLARITÀ in x_0 è quella tipica della sol. FONDAMENTALE)

$$G(x, x_0) = \Gamma(|x - x_0|) + \gamma(x)$$

con γ t.c. $\Delta \gamma = 0$ su Ω

$$\gamma_{|\partial\Omega} = -\Gamma(|x - x_0|)_{|\partial\Omega}$$

$\Rightarrow$ devo aggiungere 1 funz. ARMONICA su TT Ω

$\Gamma(|x - x_1|)$ è ARMONICA su Ω

(infatti la sua SINGOLARITÀ sta in x_1 che è fuori dal DOMINIO)

Codice fiscale del percipiente

Mod. N. 1

DATI PREVIDENZIALI ED ASSISTENZIALI INPS

SEZIONE 1 LAVORATORI SUBORDINATI

1 Matricola azienda — 2 INPS — 3 Altro — 4 Imponibile previdenziale — 5 Imponibile ai fini IVS — 6 Contributi a carico del lavoratore trattenuti

MESI PER I QUALI È STATA PRESENTATA LA DENUNCIA Uniemens

7 Tutti — 8 Tutti con l'esclusione di

T G F M A M G L A S O N D

SEZIONE 2 COLLAB. COORDINATE E CONTINUATIVE

9 Compensi corrisposti al collaboratore — 10 Contributi dovuti — 11 Contributi a carico del collaboratore trattenuti — 12 Contributi versati

MESI PER I QUALI È STATA PRESENTATA LA DENUNCIA Uniemens

13 Tutti — 14 Tutti con l'esclusione di

T G F M A M G L A S O N D

SEZIONE 3 INPS GESTIONE DIPENDENTI PUBBLICI (EX INPDAP)

15 Codice fiscale Amministrazione — 16 Progressivo azienda — 17 Codice identificativo attribuito da SPT del MEF — Gestione: 18 Pens. 19 Prev. 20 Cred. 21 Enpdep/Enam — 22 Anno di riferimento

23 Totale imponibile pensionistico — 24 Totale contributi pensionistici — 25 Totale imponibili TFS — 26 Totale contributi TFS — 27 Totale imponibile TFR

28 Totale contributi TFR — 29 Totale imponibile Gestione Credito — 30 Totale contributo Gestione Credito — 31 Totale imponibile ENPDEP/ENAM — 32 Totale contributi ENPDEP/ENAM

MESI PER I QUALI È STATA PRESENTATA LA DENUNCIA Uniemens

33 Tutti — 34 Tutti con l'esclusione di

T G F M A M G L A S O N D

SEZIONE 4 ALTRI ENTI

49 Codice fiscale Ente previdenziale — 50 Denominazione Ente previdenziale

51 Ente previdenziale — 52 Codice azienda — 53 Categoria — 54 Imponibile previdenziale — 55 Contributi dovuti

56 Contributi a carico del lavoratore trattenuti — 57 Contributi versati — 58 Altri contributi — 59 Importo altri contributi

DATI ASSICURATIVI INAIL

71 Qualifica — 72 Posizione assicurativa territoriale — C. C. — 73 Data inizio (giorno, mese) — 74 Data fine (giorno, mese) — 75 Codice comune — 76 Personale viaggiante

E — B507

$$G(x, x_0) = q\,\Gamma(|x-x_0|) + q'\,\Gamma(|x-x_1|) =$$

↓ potenziale di 2 cariche q e q'

$$= \frac{1}{(n-2)S_n}\left\{ \frac{q}{|x-x_0|^{n-2}} + \frac{q'}{|x-x_1|^{n-2}} \right\}$$

Soluzione per x generico

Quanto vale sulla SFERA?

Sia $|x| = R$

$$G(x,x_0)\Big|_{\partial\Omega} = \frac{1}{(n-2)S_n}\left\{ \frac{q}{\big|Rn - |x_0|n'\big|^{n-2}} + \frac{q'}{\big|Rn - |x_1|n'\big|^{n-2}} \right\}$$

Al variare di n sto muovendo il p.to x sulla sfera.

$$= \frac{1}{(n-2)S_n}\left\{ \frac{q}{R^{n-2}\left|n - \frac{|x_0|}{R}n'\right|^{n-2}} + \frac{q'}{|x_1|^{n-2}\left|\frac{R}{|x_1|}n - n'\right|^{n-2}} \right\}$$

Scegliamo $|x_1|$: $\dfrac{|x_0|}{R} = \dfrac{R}{|x_1|} \iff |x_0|\cdot|x_1| = R^2$

Si parla di INVERSIONE del PUNTO rispetto alla SFERA

$\boxed{\text{Sono } = \text{ anche } |\quad|^{n-2}}$

Se chiamo $\dfrac{R}{|x_1|} = a$:

$$\left.\begin{aligned} (n - a n')^2 &= 1 + a^2 - 2a\, n\cdot n' \\ (n' - a n)^2 &= 1 + a^2 - 2a\, n\cdot n' \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \left| n - \frac{|x_0|}{R} n' \right| \text{ e } \left| \frac{R}{|x_1|} n - n' \right| \text{ sono } =$$

$$-\frac{q}{R^{n-2}} = \frac{q'}{|x_1|^{n-2}} \Longrightarrow q' = -\frac{|x_1|^{n-2}}{R^{n-2}}\, q = -\frac{R^{n-2}}{|x_0|^{n-2}}\, q$$

(q è $= 1$)

$\Longrightarrow$ abbiamo trovato la funzione di GREEN

$$G(x, x_0) = \dots\dots = $$
$$= \frac{1}{(n-2)S_n} \left\{ \frac{1}{|x - x_0|^{n-2}} - \frac{R^{n-2}}{|x_0|^{n-2} \left| x - \frac{R^2}{|x_0|} \hat{x}_0 \right|^{n-2}} \right\}$$

NUCLEO DI POISSON $= -\dfrac{\partial G}{\partial n}(x, x_0)$ quando $f = 0$

$\downarrow$

(x sul BORDO)

$$\underbrace{\nabla G(x, x_0)}_{\substack{\text{gradiente di } G \\ \text{risp. alla VARIABILE } x}} = -\frac{q}{S_n |x - x_0|^{n-1}} \underbrace{\widehat{x - x_0}}_{\substack{\text{gradiente del raggio} \\ \text{(è il versore)}}} - \frac{q'}{S_n |x - x_1|^n}(x - x_1) =$$

$$= -\frac{q}{S_n |x - x_0|^n}(x - x_0) - \frac{q'}{S_n |x - x_1|^n}(x - x_1)$$

$$\left| n - \frac{|x_0|}{R} n' \right| = \left| \frac{R}{|x_1|} n - n' \right|$$

$$\frac{1}{R}\left|Rn - |x_0|n'\right| = \frac{1}{|x_1|}\left|Rn - |x_1|n'\right|$$

$$\frac{1}{R}|x-x_0| = \frac{1}{|x_1|}|x-x_1| \quad \to \text{(se } x \text{ è sul bordo)}$$

$$|x-x_1| = \frac{|x_1|}{R}|x-x_0|$$

$$\nabla G(x,x_0)\Big|_{x\in\partial\Omega} = -\frac{q(x-x_0)}{S_n|x-x_0|^n} - \frac{R^n q'(x-x_1)}{S_n|x_1|^n|x-x_0|^n} = (*)$$

$$= -\frac{1}{S_n|x-x_0|^n}\left\{\underbrace{q}_{=1}(x-\cancel{x_0}) - \frac{R^2}{|x_1|^2}(x-\cancel{x_1})\right\} = (*)$$

$\to\ = \frac{|x_0|^2}{R^2}$ per è inversione rispetto alla ~~della~~ sfera

sostituisco

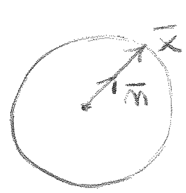
$$q' = -\frac{|x_1|^{n-2}}{R^{n-2}}q \qquad (q=1)$$

$$\frac{R^2}{|x_1|^2}x_1 = \frac{R^2}{|x_1|}\frac{x_1}{|x_1|} = |x_0|\cdot\underbrace{\hat{x}_1}_{=n'} = x_0$$

$$(*) = -\frac{1}{S_n|x-x_0|^n}\frac{1}{R^2}\left(R^2-|x_0|^2\right)\underbrace{x}_{\text{parte vettoriale}}$$

$$P(x,x_0) = -\frac{\partial G}{\partial n} = -n\cdot\nabla G(x,x_0) = \frac{R^2-|x_0|^2}{S_n R}\,\frac{1}{|x-x_0|^n}$$

$$\left(\bar{x}\cdot\bar{n} = |x| = R\right)$$



$$u(x_0) = \int_{\partial\Omega}\varphi(x)P(x,x_0)\,dS \qquad \left(\begin{array}{l}\varphi(x) = u\big|_{\partial\Omega} \\ \text{o } \psi(x) = \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega}\end{array}\right)$$

$$u(x_0) = \int_{\partial\Omega} \left(G \frac{\partial u}{\partial n} - u(x) \frac{\partial G}{\partial n}(x, x_0) \right) dS(x) - \int \Delta u \, G \, dv$$

$$G(x, x_0) = \underbrace{\Gamma(|x - x_0|)}_{\text{sol. fondamentale}} + \underbrace{\gamma_{x_0}(x)}_{\text{una certa}}$$

una certa FUNZIONE ARMONICA

Funz. non singolare su tt il DOMINIO

$$\left. \begin{array}{l} \Delta_x G = 0 \quad \text{con } x \in \Omega \setminus \{x_0\} \\ G|_{\partial\Omega} = 0 \end{array} \right\} \iff \begin{array}{l} \Delta_x \gamma_{x_0} = 0 \\ \gamma_{x_0}|_{\partial\Omega} = -\Gamma(|x - x_0|)|_{\partial\Omega} \end{array}$$

Data la FUNZIONE di GREEN, ci interessa far vedere che è SIMMETRICA

$$\int_{\partial D} \left(v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n} \right) dS = \underbrace{\int_D (\Delta u \, v - \Delta v \, u) \, d^n x}_{= 0}$$

vale $\forall \varepsilon$ $\Downarrow$ (prendo $\lim_{\varepsilon \to 0}$)

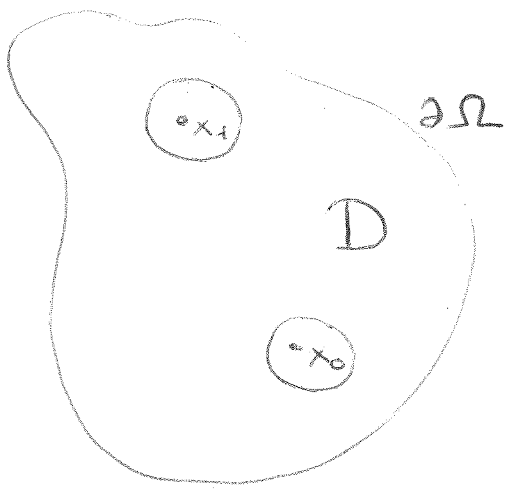
L'idea è prendere u e v 2 FUNZIONI di Green

$u = G(x, x_1) \to$ SINGOLARE su x_1, ARMONICA altrove

$v = G(x, x_0) \to$ " " x_0, " "

$D = \Omega \setminus \{B(x_0, \varepsilon) \cup B(x_1, \varepsilon)\}$

u e v sono ARMONICHE sul DOMINIO D $\Rightarrow \int_D (\Delta u \, v - \Delta v \, u) d^n x = 0$



u e v fanno 0 sul $\partial\Omega$ per costruzione (⇒ considero solo $\partial B(x_0, \varepsilon)$ e $\partial B(x_1, \varepsilon)$ poiché $\partial\Omega$ non dà contributo)

$$0 = \lim_{\varepsilon \to 0} \left\{ \int_{\partial B(x_0, \varepsilon)} \left(-u \frac{\partial v}{\partial n} \right) dS + \int_{\partial B(x_1, \varepsilon)} \left(v \frac{\partial u}{\partial n} \right) dS \right\} = (*)$$

CERTIFICAZIONE
UNICA2016

Agenzia Entrate

CERTIFICAZIONE DI CUI ALL'ART. 4, COMMI 6-ter e 6-quater, DEL D.P.R. 22 LUGLIO 1998, n. 322, RELATIVA ALL'ANNO 2015

DATI ANAGRAFICI

	Codice fiscale 1	Cognome o Denominazione 2	Nome 3

DATI RELATIVI AL DATORE DI LAVORO, ENTE PENSIONISTICO O ALTRO SOSTITUTO D'IMPOSTA

Comune 4	Prov. 5	Cap 6	Indirizzo 7
CAMPI BISENZIO	FI	50013	VIA F.LLI CERVI, 73 -Fraz. Cap

Telefono, fax 8 prefisso numero	Indirizzo di posta elettronica 9	Codice attività 10	Codice sede 11
0558969261		464710	

DATI RELATIVI AL DIPENDENTE, PENSIONATO O ALTRO PERCETTORE DELLE SOMME

Codice fiscale 1	Cognome o Denominazione 2	Nome 3

Sesso (M o F) 4	Data di nascita 5 giorno mese anno	Comune (o Stato estero) di nascita 6	Provincia di nascita (sigla) 7	Categorie particolari 8	Eventi eccezionali 9	Casi di esclusione dalla precompilata 10
M	20 06 1964	FIRENZE	FI			2

DOMICILIO FISCALE ALL' 1/1/2015

Comune 20	Provincia (sigla) 21	Codice comune 22
FIRENZE	FI	D612

DOMICILIO FISCALE ALL' 1/1/2016

Comune 23	Provincia (sigla) 24	Codice comune 25

DATI RELATIVI AL RAPPRESENTANTE

Codice fiscale 30

RISERVATO AI PERCIPIENTI ESTERI

Codice di identificazione fiscale estero 40	Località di residenza estera 41

Via e numero civico 42	Non residenti Schumacker 43	Codice Stato estero 44

DATA

FIRMA DEL SOSTITUTO DI IMPOSTA

$$v = G(x, x_0) = \Gamma(|x - x_0|) + \gamma_{x_0}(x)$$

$$(*) = \lim_{\varepsilon \to 0} \left\{ \int_{\partial B(x_0,\varepsilon)} \Big(-u \underbrace{\frac{\partial \Gamma}{\partial n}(|x-x_0|)}_{= -\frac{1}{S_n \varepsilon^{n-1}}} \Big) dS + \int_{\partial B(x_1,\varepsilon)} \Big(v \frac{\partial \Gamma}{\partial n}(|x-x_1|) \Big) dS \right\} =$$

$$= u(x_0) - v(x_1)$$

$$\Rightarrow G(x_0, x_1) = G(x_1, x_0)$$

$\Rightarrow$ la funzione di GREEN è SIMMETRICA

G è ARMONICA nella 1ª VARIABILE (x)

$$\frac{\partial G}{\partial n}(x, x_0) = \overline{n} \cdot \nabla_x \, G(x, x_0)$$

G è ARMONICA nella 1ª VARIABILE (x)

Per $x \in \partial\Omega$

$G(x, x_0)$ è ARMONICA, nel senso che $\Delta_{x_0} G = 0$

(Questo vale per SIMMETRIA, infatti so che G è ARMONICA rispetto a x, e per SIMMETRIA, G è ARMONICA risp. a x_1)

$$\Longrightarrow \Delta_{x_0} \frac{\partial}{\partial n} G(x, x_0) = 0$$

$\Longrightarrow$ il NUCLEO di POISSON è ARMONICO

$\Omega = B(0,R)$, $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$, u ARMONICA in Ω

$$\Rightarrow u(x) = \frac{R^2 - |x|^2}{S_n R} \int \frac{\varphi(y)}{|y-x|^n} \, dS(y)$$

dove

$$\varphi = u \Big|_{\partial B(0,R)}$$

Voglio far vedere che
$\forall y \in \partial B(0,R)$

$$h = \underbrace{(R^2 - |x|^2)}_{g} \underbrace{\frac{1}{|x-y|^n}}_{f} \quad \text{è ARMONICA in } B(0,R).$$

Infatti:
Calcolo il LAPLACIANO:

$$\Delta(gf) = \Delta g \, f + 2 \nabla g \nabla f + g \Delta f \longrightarrow \text{LAPLACIANO}$$

$$(\nabla g)^i = -2x_i \quad (x \text{ è un VETTORE, } x_i \text{ è la componente } i\text{-esima})$$

$\to$ componente i-esima del ∇g

$$\nabla f = \frac{-n}{|x-y|^{n+1}} \, \widehat{x-y} = \frac{-n}{|x-y|^{n+1}} \frac{x-y}{|x-y|} = -n \frac{x-y}{|x-y|^{n+2}}$$

(121)

$$\Delta g = \delta^{ij} g_{ij} = \delta^{ij}(-2\delta_{ij}) = -2n$$

$$\Delta f = \underbrace{\frac{-n^2}{|x-y|^{n+2}}}_{\substack{\text{contributo} \\ \text{del NUMERATORE}}} - n(x-y)\cdot\nabla\left(\frac{1}{|x-y|^{n+2}}\right) =$$

$$= \frac{-n^2}{|x-y|^{n+2}} + \frac{n(n+2)}{|x-y|^{n+2}} = \frac{2n}{|x-y|^{n+2}}$$

$$\nabla\left(\frac{1}{|x-y|^{n+2}}\right) = -(n+2)\cdot\frac{1}{|x-y|^{n+3}}\,\widehat{x-y} =$$

$$= -(n+2)\frac{1}{|x-y|^{n+4}}(x-y)$$

Allora

$$\Delta(gf) = \underbrace{\frac{-2n}{|x-y|^n}}_{\Delta g\cdot f} + \underbrace{4n\frac{(|x|^2-xy)}{|x-y|^{n+2}}}_{2\,\nabla g\cdot\nabla f} + \underbrace{(R^2-|x|^2)\frac{2n}{|x-y|^{n+2}}}_{g\cdot\Delta f} =$$

$$= \frac{2n}{|x-y|^{n+2}}\left\{-|x-y|^2 + 2(|x|^2-xy) + R^2 - |x|^2\right\} =$$

$= 0$

$|y| = R$ (poiché $y \in$ al bordo della palla)

$\Rightarrow$ il nucleo di POISSON è ARMONICO

$$u(x_0) = \int_{\partial\Omega}\Big(\underbrace{\cancel{G}}_{=0 \text{ su } \partial\Omega}\frac{\partial u}{\partial n} - \overset{\varphi}{\overset{\shortparallel}{u}}\frac{\partial G}{\partial n}\Big)\,dS$$

Dovevamo assumere che u fosse C^1 sul bordo

$\Delta u = f$

$u|_{\partial\Omega} = \varphi$ $\longrightarrow$ Non si sta dicendo che φ è C^1 sul bordo, ma C^0 ⊛

AMMETTE una sola soluzione $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$

⊛ $\Rightarrow$ u non può essere C^1 fino al bordo.

Bisogna far vedere che u è ARMONICA per ogni φ CONTINUA.

Data $\varphi \in C^0(\partial B(0,R))$,

$$u(x) := \frac{R^2 - |x|^2}{S_n R} \int_{\partial B} \frac{\varphi(y)}{|y-x|^n} \, dS(y)$$

è ARMONICA in $B(0,R)$ e per ogni $x^* \in \partial B(0,R)$

$$\lim_{x \to x^*} u(x) = \varphi(x^*)$$

(OSS: Se questo è vero questa è l'unica sol. per il probl. di DIRICHLET per la SFERA)

dim:

$$g(x) = \int_{\partial B(0,R)} f(x,y)\, \varphi(y)\, dS(y)$$

$$\underbrace{\nabla_e g}_{\substack{\text{derivata di } g \\ \text{in direzione } e}} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{g(x+\varepsilon e) - g(x)}{\varepsilon} =$$

e è il versore della direzione rispetto alla quale sto derivando

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\partial B} \frac{f(x+\varepsilon e, y) - f(x,y)}{\varepsilon} \varphi(y)\, dS(y)$$

$$f(x+\varepsilon e, y) = f(x,y) + \nabla_e f(x,y)\,\varepsilon + \frac{1}{2} \nabla_e^2 f(\underbrace{\xi}_{\in [x,\, x+\varepsilon e]}, y)\,\varepsilon^2$$

ESPANSIONE di TAYLOR al 2° ORDINE

DATI PER DICH. ANNUALE I.V.A. (1.a p.)

Riepilogativa Anno: 2015

Via F.lli Cervi, 73 C.F. : 04863210482

50013 Capalle - Campi Bisenzio FI P.I. : 04863210482

operazioni eseguite sui registri IVA VENDITE o CORRISPETTIVI dal 01/01 al 31/12 da clienti (NO FORNITORI) con impostato in anagrafica nel campo "tipo soggetto IVA" uno dei seguenti valori: "Intracee", "San Marino", "Extracee"

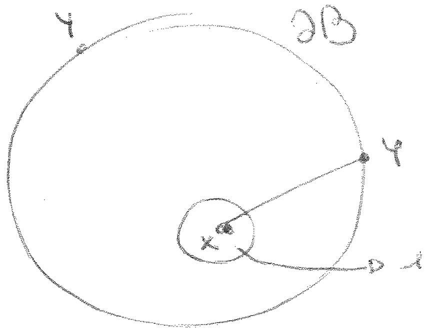
			DEDUCIBILE		INDEDUCIBILE	
CI Aliq.	Descrizione	Tipo IVA	Imponibile	Imposta	Imponibile	Imposta
8	Esente art.8 comma 1	Non imp.	2.580,00	0,00	0,00	0,00
	TOTALI --->		**2.580,00**	**0,00**	**0,00**	**0,00**

Si rammenta che in questa stampa (come in tutte quelle generate dal programma 'STAMPA DATI PER DICHIARAZIONE ANNUALE IVA) in caso di fatture ad esegibilita' differita e/o IVA di CASSA verra' considerata la fattura e non il relativo INCASSO/PAGAMENTO

$$\frac{f(x+\varepsilon e, y) - f(x,y)}{\varepsilon} = \nabla_e f(x,y) + \frac{1}{2} \underbrace{\nabla_e^2 f(\xi, y)\, \varepsilon}$$

questa DERIVATA deve essere LIMITATA per qualunque y prendo sul ~~BORDO~~ della PALLA

Infatti ovunque sia ξ e ovunque sia y sul bordo, le DERIVATE seconde sono LIMITATE da qualche COSTANTE



→ 1 COMPATTO lontano dal bordo.

Le derivate si possono portare all'interno dell'integrale e poiché il nucleo di Poisson è ARMONICO

$\Longrightarrow$ u è ARMONICA

$u = \varphi(x^*)$ è COSTANTE e $C^1\left(\overline{B(0,R)}\right) \Longrightarrow$ ARMONICA

$$\varphi(x^*) = \frac{R^2 - |x|^2}{S_n R} \int \frac{\varphi(x^*)}{|x-y|^n}\, dS(y)$$

Se $u = 1 \implies \varphi = 1$

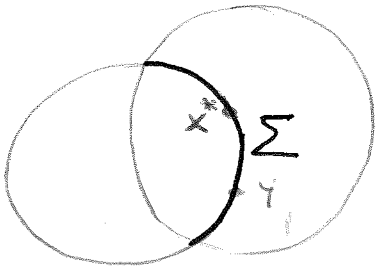
$$1 = \frac{R^2 - |x|^2}{S_n R} \int \frac{1}{|x-y|^n} \, dS(y)$$ (e' integrale del nucleo di Poisson fa 1)

$$u(x) - \varphi(x^*) = \frac{R^2 - |x|^2}{S_n R} \int_{\partial B} \frac{\varphi(y) - \varphi(x^*)}{|x-y|^n} \, dS(y)$$

Sia $\varepsilon > 0$

$\exists\, \delta > 0$ tc: $\forall y \; |y - x^*| < \delta, \; y \in \partial B$

$$|\varphi(y) - \varphi(x^*)| < \varepsilon$$



$\partial B(0,R)$

$$\Sigma := \partial B(0,R) \cap \overline{B(x^*, \delta)}$$

$$\left| \frac{R^2 - |x|^2}{S_n R} \int_{\Sigma} \frac{\varphi(y) - \varphi(x^*)}{|x-y|^n} \, dS(y) \right| \leq$$

$$\leq \varepsilon \underbrace{\frac{R^2 - x^2}{S_n R} \int_{\Sigma} \frac{1}{|x-y|^n} \, dS(y)}_{(*)} < \varepsilon$$

perché qnd e' integrale lo estendo a tutta la palla, $(*) = 1$

⊛ poiché δ' è a piacere $\implies$ lo scelgo in modo tale da qsta quantità sia $< \varepsilon$

Sia $x \in B(x^*, \delta')$ con $\delta' < \delta/2$

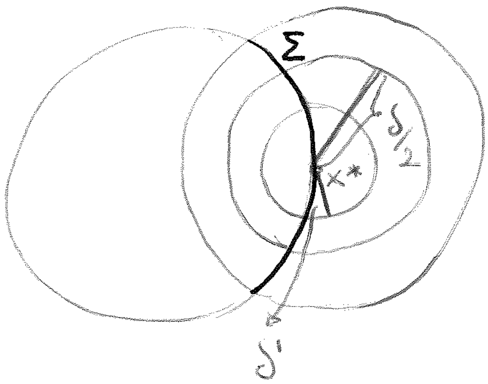
$$\left| \frac{R^2 - |x|^2}{S_n R} \int_{\partial B \setminus \Sigma} \frac{\varphi(y) - \varphi(x^*)}{|y-x|^n} \, dS(y) \right| \leq$$

$$\begin{cases} ⊛\, R + |x| < 2R \\ R - |x| < \delta' \end{cases}$$

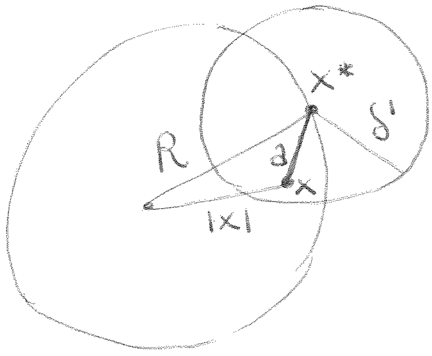
$$\leq M \left| \overbrace{\frac{R^2 - x^2}{S_n R}}^{(R+|x|)(R-|x|)} ⊛ \int_{\partial B \setminus \Sigma} \frac{1}{|y-x|^n} \, dS(y) \right| \leq \frac{M}{R} \left(\frac{2}{\delta}\right)^n (2R)\, \delta' < \varepsilon$$

⊛

dove $M = \sup_{\partial B} |\varphi(y) - \varphi(x^*)|$



$|y - x| > \delta/2$



$\delta' < \delta/2$

$R < |x| + \underbrace{a}_{< \delta'} \Rightarrow R - |x| < a < \delta' \Rightarrow R - |x| < \delta'$

EQUAZIONE del CALORE $\longrightarrow$ descrive l'evoluzione della TEMPERATURA in un CONTINUO dove gli ATOMI sono FERMI

$u_t - \Delta u = 0$

$u : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$(x, t) \longmapsto u(x, t)$

$Q(t) = \int_D c(x)\, u(x,t)\, d^n x$

c = calore SPECIFICO

$\frac{dQ}{dt} = - \int_{\partial D} \underbrace{\bar{F}}_{\text{FLUSSO}} \cdot d\bar{S}$

$K(x)$ = CONDUCIBILITÀ

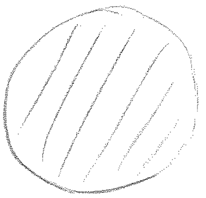
$\bar{F} = -K(x) \nabla u, \quad K \geq 0$ (*) (in direzione OPPOSTA al GRADIENTE)

Il calore si muove dalle zone di ALTA temperatura alle
" " BASSA " (*)

$$\int_D c\, u_t\, d^n x = \int_{\partial D} K \nabla u \cdot d\bar{S} = \int_D \nabla \cdot (K \nabla u)\, d^n x$$

Se considero 1 mezzo OMOGENEO $c(x)$ e $K(x)$ sono COSTANTI

$$c\, u_t - \nabla \cdot (K \nabla u) = 0$$



→ Se mi focalizzo su 1 DOMINIO con un certo CONTAMINANTE ($Q \to$ quantità del contaminante) la variazione di contaminante è la QUANTITÀ di contaminante che esce dal BORDO

$$\left(\frac{dQ}{dt} \right)$$

A meno di interpretare in modo diverso $K(x)$ e $C(x)$, l'EQ. DEL CALORE la posso considerare come un' EQ. DI DIFFUSIONE ($\underbrace{\ }_{\text{ci dice}}$ come si diffonde qualcosa nello SPAZIO)

È un' EQ. che salta fuori in diversi CONTESTI.

PROBLEMA di determinare la SOLUZ. FONDAMENTALE:

$$\frac{1}{\lambda^2} \left(u_t - \Delta_x u \right) = 0$$

$$\frac{du}{d(\lambda^2 t)} - \Delta_{(\lambda x)} u = 0$$

$$v(x,t) = u(\lambda x, \lambda^2 t)$$

v è ancora SOLUZIONE?

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \lambda^2 u_t(\lambda x, \lambda^2 t)$$

$$\nabla_x v = \lambda (\nabla_x u)(\lambda x, \lambda^2 t)$$

$$\Delta_x v = \lambda^2 (\Delta_x u)(\lambda x, \lambda^2 t)$$

$$v_t - \Delta_x v = \lambda^2 \{ \underbrace{u_t - \Delta_x u}_{=0} \} (\lambda x, \lambda^2 t) = 0$$

Data una soluzione, con il riscalamento, posso pensare di ottenere 1 fam. di soluzioni (si chiamano SOLUZIONI AUTOSIMILARI)

↓

$$u(x,t) = \lambda^\gamma u(\lambda x, \lambda^2 t) \longrightarrow \text{AUTOSIMILARE}$$

Moltiplicando 1 sol dell'eq del calore per 1 cost ottengo ancora 1 sol.

Se prendo $\lambda = t^{-1/2}$

$$u(x,t) = t^{-\gamma/2} u\left(\frac{x}{t^{1/2}}, 1\right) = t^{-\gamma/2} v\left(\frac{x}{t^{1/2}}\right) \quad (*)$$

$\left(\dfrac{x}{t^{1/2}} \longrightarrow \text{è INVARIANTE per RISCALAMENTI} \right)$

Possiamo richiede che v sia a SIMMETRIA SFERICA

Esistono soluzioni di questo tipo $(*)$? Sì.

SOLUZIONE FONDAMENTALE in $\mathbb{R}^n \times (0, +\infty)$:

$$\Phi(x,t) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-\frac{x^2}{4t}}$$

↓

È per costruzione AUTOSIMILARE

Dipende solo RADIALMENTE da x

Andiamo a vedere se soddisfa l'EQ. del CALORE:

$$\Phi_t = -\frac{n}{2}\,\frac{e^{-\frac{x^2}{4t}}}{(4\pi)^{n/2}\cdot t^{n/2+1}} + \frac{x^2 e^{-x^2/4t}}{(4\pi t)^{n/2}}\,\frac{1}{4t^2}$$

$$\nabla_x \Phi = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}}\, e^{-\frac{x^2}{4t}} \left(-\frac{1}{2t}x\right)$$

$$\Delta_x \Phi = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}}\, e^{-\frac{x^2}{4t}} \left(\frac{x^2}{4t^2} - \frac{n}{2t}\right)$$

$$\Phi_t - \Delta_x \Phi = 0$$

$$u_t - \Delta_x u = 0$$

$$u(x,0) = g(x)$$

$$g \in C^0(\mathbb{R}^n) \cap L_\infty(\mathbb{R}^n)$$

(g continua e limitata)

vogliamo far vedere che $u(x,t)$ così definita,

$$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y,t)\, g(y)\, d^n y$$

risolve l'eq. del CALORE, cioè è tale per cui

1) $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times (0,+\infty))$

2) $u \in C^0(\mathbb{R}^n \times [0,+\infty))$

con $\lim\limits_{\substack{(x,t)\to(x^*,0)\\ t>0}} u(x,t) = g(x^*)$

3) $u_t - \Delta u = 0$ per $t>0$ $\longrightarrow$ (u soddisfa l'EQ. DEL CALORE)

1) $\rightarrow$ è conseguenza del fatto che

Φ, per $t > 0$, $\in C^\infty$

Dobbiamo far vedere che TUTTE le DERIVATE della Φ sono UNIFORMEMENTE LIMITATE, cioè che c'è 1 COSTANTE che le LIMITA.

L'esponenziale (di Φ) manda a 0 (per $x \to \infty$) TUTTE le DERIVATE.

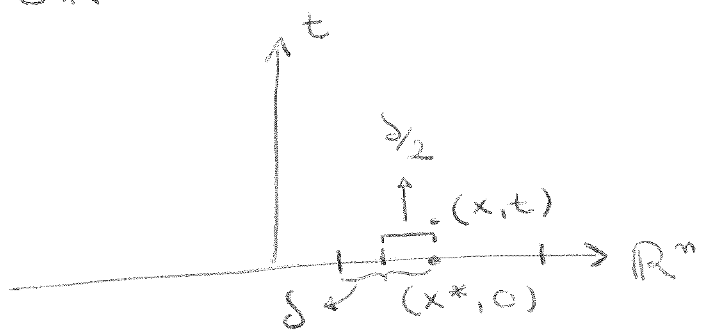
$$\Phi(x-y,t) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \cdot e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}$$

Se chiamamo $t = \varepsilon$, questo è 1 MOLLIFICATORE

u è INFINITAMENTE - DIFFERENZIABILE (poiché posso portare dentro l'INTEGRALE le DERIVATE!)

$$u(x,t) - g(x^*) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y,t)\,(g(y) - g(x^*))\, d^n y$$

$x^* \in \mathbb{R}^n$



Voglio far vedere che $u \longrightarrow g$ quando avvicino (x,t) a $(x^*,0)$

$$1 = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y,t)\, d^n y$$

$$|u(x,t) - g(x^*)| \leq \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y,t)\, |g(y) - g(x^*)|\, d^n y$$

Sia $\varepsilon > 0$

(poiché g CONTINUA)

$\exists\, \delta : |g(y) - g(x^*)| < \varepsilon \Longleftarrow |y - x^*| < \delta$

$$\int_{B(x^*,\delta)} \Phi(x-y,t)\,|g(y)-g(x^*)|\,d^n y \le \underbrace{\int_{B(x^*,\delta)} \Phi(x-y,t)\,d^n y}\,\varepsilon \le \varepsilon$$

poiché

$$1 = \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y,t)\,d^n y}$$

Lo sostituisco con

Introduco 1 altra palla di raggio $\delta/2$

Sia $x : |x-x^*| < \delta/2$

(x lo prendo dentro qsta palla di raggio $\delta/2$)

$$|x^*-y| \le |x^*-x+x-y| \le |x-x^*| + |y-x| \le$$

$$\le \frac{\delta}{2} + |y-x|$$

Siamo interessati a $|y-x^*| \ge \delta$

(cioè y fuori dalla palla $B(x^*,\delta)$)

$$|x^*-y| \le \frac{|y-x^*|}{2} + |y-x| \Rightarrow \frac{|y-x^*|}{2} \le |y-x|$$

$(\delta \le |y-x^*|)$

Integro fuori dalla palla:

$$\int_{\mathbb{R}^n \setminus B(x^*,\delta)} \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}}\, e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}\, |g(y)-g(x^*)|\,d^n y \le$$

$$\le \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(x^*,\delta)} \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}}\, e^{-\frac{|y-x^*|^2}{16t}}\, |g(y)-g(x^*)|\,d^n y =$$

Faccio un cambio di variabile:

$$z = \frac{y-x^*}{(4t)^{1/2}} \quad \to \text{(per eliminare } t \text{ dall'argomento)}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,\delta/\sqrt{4t})} \frac{1}{\pi^{n/2}}\, e^{-z^2/4}\, |g(x^*+\sqrt{4t}\cdot z)-g(x^*)|\,d^n z$$

Per $t \to 0$, questa palla diventa sempre più grande $\Rightarrow \mathbb{R}^n \setminus B(0,\delta/\sqrt{4t})$ diventa sempre più piccolo

Quindi per t piccolo, $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,\, \delta/\sqrt{4t})} < \varepsilon$

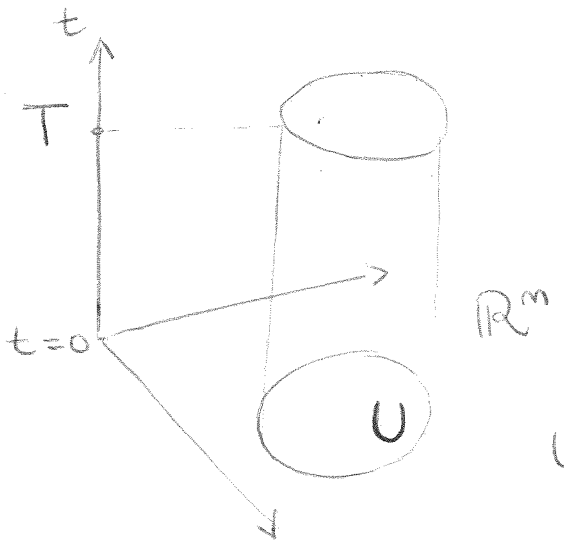
Quindi l'INTEGRALE va a 0.

Abbiamo ottenuto 1 sol. dell' eq del CALORE ma non è l'UNICA.

L'eq del CALORE ha ∞ SOLUZIONI, a meno di alcune CONDIZIONI ASINTOTICHE.

Come ad esempio si può imporre qsta CONDIZIONE:

$$|u| \leq A e^{Bx^2} \quad \text{per } x \in \mathbb{R}^n,\ t \in (0, T]$$



U è APERTO

$U_T = U \times (0, T]$ → DOMINIO PARABOLICO

$\Gamma_T = \overline{U_T} \setminus U_T$ → BORDO //

$u_t - \Delta u = 0$ su U_T

2 volte derivabile con derivate continue risp a x

$u|_{\Gamma_T} = g$ con $u \in C^{2}_{1}(U_T) \cap C^0(\overline{U_T})$

1 volta derivabile con derivata continua risp. a t

Codice fiscale del percipiente Mod. N. 1

DESCRIZIONE
ANNOTAZIONI AI Informazioni relative ai redditi certificati:
Lavoro dipendente e assimilato
Data inizio: 17/08/2015 Data fine: Importo: euro 9.899,82
BB Saldo 2015 dell'addizionale comunale all'IRPEF non operata in quanto in possesso dei requisiti reddituali per usufruire interamente della fascia di esenzione deliberata
BN Acconto 2016 dell'addizionale comunale all'IRPEF non operata in quanto in possesso dei requisiti reddituali per usufruire interamente della fascia di esenzione deliberata
L'addizionale comunale IRPEF 2015 non e' dovuta in quanto l'imponibile fiscale e' inferiore al limite di esenzione previsto dal comune di domicilio fiscale all' 1/01/2015 (euro 15.000,00)
L'acconto di addizionale comunale IRPEF 2016 non e' dovuto in quanto l'imponibile fiscale e' inferiore al limite di esenzione previsto dal comune di domicilio fiscale all'01/01/2016 (euro 15.000,00)

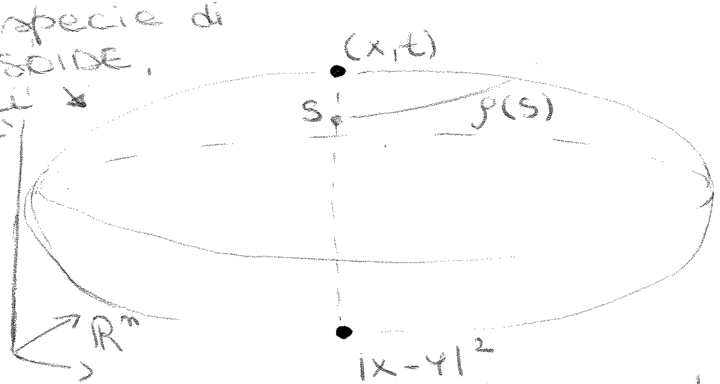
Ci interessa ottenere 1 PRINCIPIO DI MASSIMO per qst PROBLEMA.

PALLA DI CALORE : Sia $r > 0$

$$E(x,t;r) = \left\{ (y,s) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : \Phi(x-y,t-s) \geq \frac{1}{r^n} \right\}$$

con $s < t$

Questo insieme è 1 specie di ELLISSOIDE, il cui p.to + alto è (x,t)



→ è una PALLA SPAZIO-TEMPORALE

• → i PUNTI di S per cui $\rho(s)$ vale 0

$$\frac{1}{\{4\pi(t-s)\}^{n/2}} \, e^{-\frac{|x-y|^2}{4(t-s)}} \geq \frac{1}{r^n}$$

Può essere s un qualsiasi numero $< t$? NO.
s deve essere abbastanza VICINO a t.

$$-\frac{|x-y|^2}{4(t-s)} \geq \frac{n}{2} \log 4\pi(t-s) - n \log r$$

$$\rho^2(s) = |x-y|^2 \leq -4(t-s)\frac{n}{2}\log\{4\pi(t-s)\} + 4n(t-s)\log r \quad (*)$$

Se s è PICCOLO $\Rightarrow \log\{4\pi(t-s)\} \longrightarrow \infty$

Il RAGGIO va a 0 qnd s va verso t

s non può essere ARBITRARIAMENTE PICCOLO, perché altrimenti NON SODDISFEREBBE (*)

$$u(x,t) = \frac{1}{4r^n} \int_{E(x,t;r)} u(y,s) \frac{|y-x|^2}{|t-s|^2} \, d^n y \, ds$$

Supponiamo di stare nel P.TO $(0,0)$
(facendo così non si perde di generalità)

$E(r) = E(0,0;r)$

$$u(0,0) = \frac{1}{4r^n} \int_{E(r)} u(y,s) \cdot \frac{|y|^2}{s^2} \, d^n y \, ds \longrightarrow \text{Lo voglio DIMOSTRARE}$$

Supp. di voler dim. il TEO della MEDIA per una FUNZ. ARMONICA.

$$\varphi(r) = ⨍_{\partial B(x,R)} u(y) \, dS(y)$$

$$\frac{d}{dr} \varphi = \frac{d}{dr} ⨍_{\partial B(0,1)} u(x + rz) \, dS(z) =$$

$$= ⨍_{\partial B(0,1)} \nabla u \cdot z \, dS(z) =$$

$z \to$ elemento del BORDO della PALLA
↳ è la NORMALE alla SFERA su cui sto integrando

$$= ⨍_{\partial B(x,r)} \nabla u \cdot z \, dS(y) =$$ ↳ per il teo della DIVERGENZA

$$= ⨍_{B(x,r)} \Delta u \, dv = 0$$

$\Rightarrow$ Questa MEDIA è indipendente dal RAGGIO r

Codice fiscale del percipiente Mod. N. 1

DATI PREVIDENZIALI ED ASSISTENZIALI INPS

SEZIONE 1 LAVORATORI SUBORDINATI

Matricola azienda 1 3024822551 | INPS 2 X | Altro 3 | Imponibile 4 | Imponibile ai fini IVS 5 | Contributi a carico 6

MESI PER I QUALI È STATA PRESENTATA LA DENUNCIA Uniemens

Tutti 7 T | Tutti con l'esclusione di 8 G X F X M X A X M X G X L X A S O N D

SEZIONE 2 COLLAB. COORDINATE E CONTINUATIVE

Compensi corrisposti al collaboratore 9 | Contributi dovuti 10 | Contributi a carico del collaboratore trattenuti 11 | Contributi versati 12

MESI PER I QUALI È STATA PRESENTATA LA DENUNCIA Uniemens

Tutti 13 T | Tutti con l'esclusione di 14 G F M A M G L A S O N D

SEZIONE 3 INPS GESTIONE DIPENDENTI PUBBLICI (EX INPDAP)

Codice fiscale Amministrazione 15 | Progressivo azienda 16 | Codice identificativo attribuito da SPT del MEF 17 | Gestione: Pens. 18, Prev. 19, Cred. 20, Enpdep/Enam 21 | Anno di riferimento 22

Totale imponibile pensionistico 23 | Totale contributi pensionistici 24 | Totale imponibili TFS 25 | Totale contributi TFS 26 | Totale imponibile TFR 27

Totale contributi TFR 28 | Totale imponibile Gestione Credito 29 | Totale contributo Gestione Credito 30 | Totale imponibile ENPDEP/ENAM 31 | Totale contributi ENPDEP/ENAM 32

MESI PER I QUALI È STATA PRESENTATA LA DENUNCIA Uniemens

Tutti 33 T | Tutti con l'esclusione di 34 G F M A M G L A S O N D

SEZIONE 4 ALTRI ENTI

Codice fiscale Ente previdenziale 49 | Denominazione Ente previdenziale 50

Ente previdenziale 51 | Codice azienda 52 | Categoria 53 | Imponibile previdenziale 54 | Contributi dovuti 55

Contributi a carico del lavoratore trattenuti 56 | Contributi versati 57 | Altri contributi 58 | Importo altri contributi 59

DATI ASSICURATIVI INAIL

Qualifica 71 | Posizione assicurativa territoriale 72 0 2 1 3 0 6 3 2 8 | C. 5 | C. 8 | Data inizio 73 giorno 17 mese 08 | Data fine 74 giorno mese | Codice comune 75 B507 | Personale viaggiante 76

$$\Rightarrow \varphi(r) = \fint_{\partial B(x,r)} u(y)\,dS(y) = u(x)$$

$$\varphi(r) = \frac{1}{4r^n}\int_{E(r)} u(y,s)\,\frac{|y|^2}{s^2}\,d^n y\,ds$$

$$E(r) = \left\{(y,s) : s<0,\ \frac{e^{\frac{y^2}{4s}}}{\{4\pi(-s)\}^{n/2}} \geq \frac{1}{r^n}\right\} =$$

$$= \left\{(y,s) : s<0,\ \frac{e^{\frac{(y/r)^2}{4(s/r^2)}}}{\{4\pi(-s/r^2)\}^{n/2}} \geq 1\right\}$$

$y' = y/r$

$s' = s/r^2$

$(y,s) \in E(r) \iff (y',s') \in E(1)$

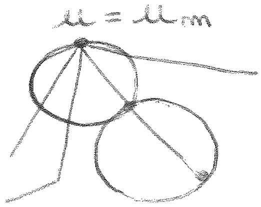
$$\varphi(r) = \frac{1}{4\cancel{r^n}} \int_{E(1)} u(ry', r^2 s') \, \frac{\cancel{r^2}\,|y'|^2}{\cancel{r^4}\,|s'|^2} \, \cancel{r^n} d^n y' \, \cancel{r^2} ds'$$

$$\varphi' = \frac{1}{4} \int_{E(1)} \overbrace{\underbrace{u_{y_i}}_{\text{gradiente}} \underbrace{y'^i}_{\text{vettore}}}^{\bar{y}' \cdot \nabla u} \cdot \frac{|y'|^2}{|s'|^2} + 2r\, u_s \, \cancel{s'} \, \frac{y'^2}{s'^{\cancel{2}}} \, d^n y' \, ds' =$$

$$= \frac{1}{4r^{n+1}} \iint_{E(r)} \left\{ u_{y_i} y_i \frac{|y|^2}{s^2} + 2r\, u_s \frac{|y|^2}{s} \right\} d^n y \, ds$$

(pag. 54 del LIBRO L'EVANS spiega come finire la DIM.)

La MEDIA sulla PALLA, affinché sia il MAX, deve essere u stesso il MASSIMO



Tutto ciò che sta sotto il livello di tempo per cui u è il MASSIMO ha un VALORE UGUALE a u (cioè il valore del MASSIMO)