Esame di Meccanica Razionale M-Z, 6 giugno 2016

1. Determinare la matrice d'inerzia di un cilindro *cavo* con base di raggio r e altezza $2r$, rispetto al riferimento (x, y, z) sapendo che l'asse z è l'asse del cilindro e il suo centro di massa coincide con l'origine delle coordinate. Si sa inoltre che le due basi hanno ciascuna massa m, e la parete laterale ha massa m.

2. Il sistema giace su un piano verticale ed è sottoposto all'accelerazione di gravita g. Un cerchio (non un disco!) di raggio r e massa m rotola senza strisciare su guida fissa orizzontale di lunghezza $8r$. L'asta AB di massa m e lunghezza $2r$ è saldata all'estremità sul cerchio. I punti A, B, C, D sono 3 cerniere per le tre aste AC, BD, CD, di massa m e lungheza $2r$. Si suppone che il movimento delle aste non sia impedito dal cerchio, cioè che le aste siano 'trasparenti' agli altri elementi geometrici. Le condizioni iniziali sono tali per cui, quando il punto di contatto E passa dal punto mediano M della guida l'asta AB è orizzontale. Come coordinate generalizzate scegliere i due angoli in figura, cioè l'angolo di rotazione θ del cerchio e l'angolo di rotazione β dell'asta AC rispetto alla verticale. Le molle hanno costante elastica k e lunghezza a riposo nulla. Vale la relazione $kr = mg$ che si userà nell'energia potenziale per eliminare g in favore di k.

   a) scrivere energia potenziale, determinare punti stazionari, discutere stabilità.

   b) scrivere energia cinetica

   c) discutere piccole oscillazioni (pulsazioni e modi principlali).

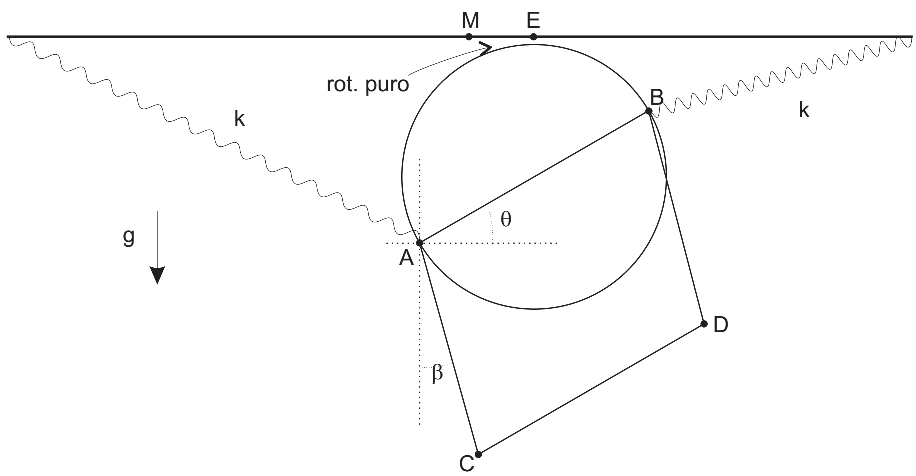

Figure 1:

1 Soluzione Es. 1

Sia B un apice che denota le due basi e L un apice che denota la superficie laterale. Chiaramente considerando le due basi circolari

$$I_z^B = 2\frac{1}{2}mr^2 = mr^2$$

usando Huygens-Steiner

$$I_x^B = I_y^B = 2(\frac{1}{4}mr^2 + mr^2) = \frac{5}{2}mr^2$$

Per il termine centrifugo xy possiamo contrarre lungo z ottenendo un disco di massa 2m e per simmetria

$$I_{xy}^B = 0$$

Se il termine misto coinvolge z fa zero in quanto i contributi delle due basi si cancellano

$$I_{xz}^B = -\sum_i m_i z_i x_i = -r\sum_{i\in B_1} m_i x_i + r\sum_{i\in B_2} m_i x_i = 0.$$

Veniamo alla superficie laterale.

$$I_z^L = \sum_i m_i r_i^2 = mr^2$$

ancora schiacciando e usando la simmetria

$$I_{xy}^L = 0$$

Nel calcolo di $I_{xz}^L = -\sum_i x_i z_i$ si noti che il contributo $z < 0$ cancella quello $z > 0$ quindi $I_{xz}^L = 0$. Resta da calcolare I_x^L. La densità della superficie laterale è $\rho = m/(4\pi r^2)$ e

$$\begin{aligned} I_x^L &= \int (y^2+z^2)\mathrm{d}m = \rho\int_{-r}^{r}\mathrm{d}z\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta(r^2\sin^2\theta + z^2)r = 2\pi r\rho\int_{-r}^{r}\mathrm{d}z(\frac{1}{2}r^2+z^2) \\ &= \frac{m}{2r}(r^3+\frac{2}{3}r^3) = \frac{5}{6}mr^2 \end{aligned}$$

Infine

$$I = I^B + I^L = mr^2\begin{pmatrix} \frac{10}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{10}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

2 Soluzione Es. 2

Introduciamo un sistema di coordinate cartesiano con origine in M e coordinata y orientata verso il basso. Sia G is centro del cerchio.

$$
\begin{aligned}
G &= (r\theta, r) \\
B &= (r\theta + r\cos\theta, r - r\sin\theta) \\
A &= (r\theta - r\cos\theta, r + r\sin\theta) \\
A + \frac{1}{2}\vec{AC} &= r(\theta - \cos\theta, 1 + \sin\theta) + r(\sin\beta, \cos\beta) \\
B + \frac{1}{2}\vec{BD} &= r(\theta + \cos\theta, 1 - \sin\theta) + r(\sin\beta, \cos\beta) \\
G + \vec{AC} &= (r\theta, r) + 2r(\sin\beta, \cos\beta)
\end{aligned}
$$

L'energia potenziale è (zero del potenziale gravitazionale nel centro del cerchio)

$$
\begin{aligned}
V = &\frac{k}{2}r^2[(\theta - \cos\theta + 4)^2 + (1 + \sin\theta)^2 + (\theta + \cos\theta - 4)^2 + (1 - \sin\theta)^2] \\
&- mgr[(\sin\theta + \cos\beta) + (-\sin\theta + \cos\beta) + 2\cos\beta] \\
= &kr^2[1 + \sin^2\theta + \theta^2 + (4 - \cos\theta)^2] - 4kr^2\cos\beta \\
= &2kr^2[9 - 4\cos\theta + \theta^2 - 2\cos\beta]
\end{aligned}
$$

Si ha

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial V}{\partial\theta} &= 0 \Rightarrow 2\sin\theta + \theta = 0 \\
\frac{\partial V}{\partial\beta} &= 0 \Rightarrow \sin\beta = 0
\end{aligned}
$$

quindi $\theta = 0$ e $\beta = 0, \pi$. L'espansione di Taylor in $\theta = 0, \beta = 0$ è

$$V = cnst + 2kr^2(3\theta^2 + \beta^2) + o(\theta^2, \beta^2, \theta\beta)$$

da cui si vede che l' Hessiano vale

$$B = 4kr^2\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

L'altro punto stazionario è instabile. Veniamo all'energia cinetica. Quella del cerchio più l'asta AB si trova da

$$I_G = mr^2 + \frac{1}{12}m(2r)^2 = \frac{4}{3}mr^2 \Rightarrow I_E = \frac{10}{3}mr^2$$

quindi l'energia cinetica di questi due corpi è $\frac{5}{3}mr^2\dot{\theta}^2$. Veniamo all'asta AC

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(A + \frac{1}{2}\vec{AC}) = r(1 + \sin\theta, \cos\theta)\dot{\theta} + r(\cos\beta, -\sin\beta)\dot{\beta}$$

quindi la velocità del suo centro di massa è

$$(v^{AC})^2 = r^2\{[(1+\sin\theta)\dot{\theta} + \cos\beta\dot{\beta}]^2 + [\cos\theta\dot{\theta} - \sin\beta\dot{\beta}]^2\}$$

e l'energia cinetica

$$T^{AC} = \frac{m}{2}r^2\{[(1+\sin\theta)\dot{\theta} + \cos\beta\dot{\beta}]^2 + [\cos\theta\dot{\theta} - \sin\beta\dot{\beta}]^2\} + \frac{1}{2}(\frac{1}{12}m(2r)^2)\dot{\beta}^2$$

Analogamente

$$(v^{BD})^2 = r^2\{[(1-\sin\theta)\dot{\theta} + \cos\beta\dot{\beta}]^2 + [-\cos\theta\dot{\theta} - \sin\beta\dot{\beta}]^2\}$$

$$T^{BD} = \frac{m}{2}r^2\{[(1-\sin\theta)\dot{\theta} + \cos\beta\dot{\beta}]^2 + [-\cos\theta\dot{\theta} - \sin\beta\dot{\beta}]^2\} + \frac{1}{2}(\frac{1}{12}m(2r)^2)\dot{\beta}^2$$

Infine per quanto riguarda l'asta CD

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}G + \vec{AC} = r(\dot{\theta} + 2\cos\beta\dot{\beta}, -2\sin\beta\dot{\beta})$$

quindi

$$(v^{CD})^2 = r^2[(\dot{\theta} + 2\cos\beta\dot{\beta})^2 + 4\sin^2\beta\dot{\beta}^2]$$

e

$$T^{CD} = \frac{m}{2}r^2[(\dot{\theta} + 2\cos\beta\dot{\beta})^2 + 4\sin^2\beta\dot{\beta}^2] + \frac{1}{2}(\frac{1}{12}m(2r)^2)\dot{\theta}^2$$

Infine nel punto stazionario

$$T \simeq mr^2\left(\frac{13}{3}\,\dot{\theta}^2 + \frac{10}{3}\,\dot{\beta}^2 + 4\dot{\theta}\dot{\beta}\right)$$

quindi

$$A = mr^2\begin{pmatrix} \frac{26}{3} & 4 \\ 4 & \frac{20}{3} \end{pmatrix}$$

.....