Compito di Meccanica Razionale M-Z

26 giugno 2013

1. Un'asta di massa m ha il centro vincolato a scorrere su una guida orizzontale. L'asta può ruotare. Sulla stessa guida, alla sinistra del centro dell'asta, poggia un disco omogeneo di massa m e raggio r. La distanza tra il punto di contatto e il centro dell'asta (sulla stessa retta orizzontale) è $\sqrt{3}r$. L'asta è lunga giusto quanto basta per essere appoggiata ad una estremita al disco in modo da essere a esso tangente. Tutti i contatti sono di rotolamento puro. Trascurare la gravità.

   figura 1.

   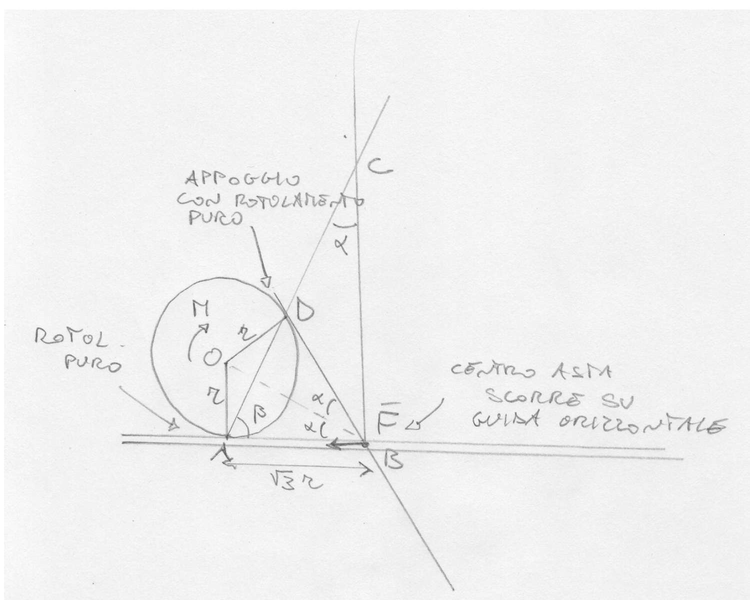

   Figure 1: La figura presenta parte dello svolgimento

   a) Determinare il centro d'istantanea rotazione dell'asta.
   b) Se all'istante considerato la velocità del centro del disco è v_0, quanto vale l'energia cinetica totale del sistema?

c) Se si applica un momento meccanico M al disco in senso orario, quale forza orizzontale F si deve applicare al centro dell'asta per mantenere il sistema in equilibrio?

2. Nel sistema illustrato in figura 2 due dischi omogenei sono collegati da un'asta di lunghezza 4r e massa trascurabile e sono liberi di ruotare a contatto con un disco cavo di massa m.

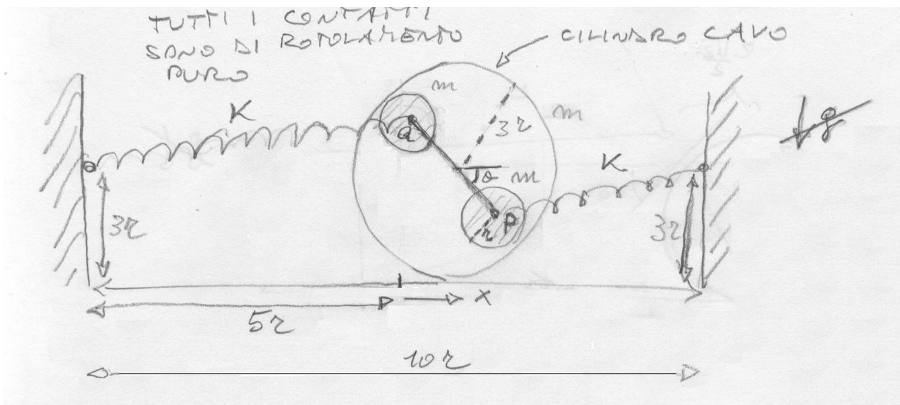

Figure 2:

a) Scrivere l'energia cinetica e potenziale.

b) Determinare i punti d'equilibrio. Discutere la stabilità.

c) Calcolare le pulsazioni e i modi principali delle piccole oscillazioni.

1 Soluzioni

1.1 Esercizio 1

Il punto materiale del disco a contatto col suolo è istantaneamente fermo, perciò il centro d'istantanea rotazione del disco è il suo punto di contatto. Il punto D dell'asta ha la stessa velocità del corrispondente punto del disco ovvero perpendicolare alla retta AD e perciò, per il teorema di Chasles, il centro d'istantanea rotazione dell'asta sta in AD. Ma il centro dell'asta si muove orizzontalmente, perciò sempre per Chasles, il centro d'istantanea rotazione dell'asta sta sulla perpendicolare alla guida passante per B. Le due rette individuano il punto C che è il centro istantaneo di rotazione dell'asta. Il triangolo AOB ha angolo sul vertice B pari a 30 gradi. Questo triangolo è uguale a quello ODB perciò $DB = \sqrt{3}r$, da cui si trova che la lunghezza dell'asta è $2\sqrt{3}r$. L'angolo AOB è 60 gradi quindi quello AOD è 120 gradi. La lunghezza AD è perciò

$$AD = \sqrt{2r^2 - 2r^2 \cos 120^\circ} = \sqrt{3}r$$

quindi ADB è equilatero. Poichè l'angolo DAB è 60 gradi

$$AC = 2\sqrt{3}r$$

e quindi $DC = AC - AD = \sqrt{3}r$. La velocità angolare dell'asta è v_0/r, quindi la velocità di D è $v_D = (v_0/r)AD$. D'altra parte se ω è la velocità angolare dell'asta

$$v_D = \omega DC$$

Poichè $DC = AD$ troviamo $\omega = v_0/r$ ma con senso di rotazione opposto. La distanza CB è $3r$ quindi l'energia cinetica totale vale

$$T = \frac{1}{2}[\frac{1}{2}mr^2 + mr^2](\frac{v_0}{r})^2 + \frac{1}{2}[\frac{1}{12}m(2\sqrt{3}r)^2 + m(3r)^2](\frac{v_0}{r})^2 = \frac{23}{4}mv_0^2.$$

Per rispondere alla terza domanda consideriamo uno spostamento infinitesimo ed applichiamo il principio dei lavori virtuali. Se il disco ruota di un angolo $\delta\theta$ l'asta ruota in senso opposto rispetto al suo centro istantaneo di altrettanto (poichè le velocità angolari sono uguali in modulo). Quindi il punto B si sposta verso destra di $\overline{CB}\delta\theta$. Il bilancio del lavoro è

$$M\delta\theta - F3r\delta\theta = 0$$

quindi $F = \frac{M}{3r}$.

1.2 Esercizio 2

Consideriamo un sistema di assi cartesiani centrato ad altezza 3r dall'origine dell'ascissa x. Le posizioni dei punti P e Q si scrivono

$$Q = (x - 2r\cos\theta, 2r\sin\theta)$$
$$P = (x + 2r\cos\theta, -2r\sin\theta).$$

Le loro velocità sono

$$\dot{Q} = (\dot{x} + 2r\sin\theta\dot{\theta}, 2r\cos\theta\dot{\theta})$$
$$\dot{P} = (\dot{x} - 2r\sin\theta\dot{\theta}, -2r\cos\theta\dot{\theta}).$$

e i rispettivi moduli al quadrato sono

$$\dot{Q}^2 = \dot{x}^2 + 4r^2\dot{\theta}^2 + 4r\dot{x}\sin\theta\dot{\theta}$$
$$\dot{P}^2 = \dot{x}^2 + 4r^2\dot{\theta}^2 - 4r\dot{x}\sin\theta\dot{\theta}.$$

Il disco grande ha velocità angolare $\dot{x}/(3r)$. Vogliamo determinare la velocità angolare ω del disco di centro P.

Se ci mettiamo nel riferimento che trasla con il centro di massa del disco grande, vediamo il disco grande ruotare su se stesso con questa velocità angolare. La velocità di P in tale riferimento è $\dot{\theta}2r$. La velocitè del punto di contatto tra il disco interno di centro P e il disco esterno si può pertanto calcolare nei due modi espressi dai due membri della seguente equazione

$$\dot{\theta}2r + \omega r = \frac{\dot{x}}{3r}3r$$

da cui si ricava

$$\omega = \frac{\dot{x}}{r} - 2\dot{\theta}.$$

L'energia cinetica è perciò

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}(2m(3r)^2)(\frac{\dot{x}}{3r})^2 + 2\frac{1}{2}(\frac{1}{2}mr^2)(\frac{\dot{x}}{r} - 2\dot{\theta})^2 + \frac{1}{2}m(\dot{P}^2 + \dot{Q}^2) \\ &= \frac{1}{2}m(5\dot{x}^2 - 4\dot{x}r\dot{\theta} + 12r^2\dot{\theta}^2) \end{aligned}$$

L'energia potenziale si scrive

$$\begin{aligned} V &= \frac{k}{2}[(5r + x - 2r\cos\theta)^2 + (2r\sin\theta)^2 + (-5r + x + 2r\cos\theta)^2 + (-2r\sin\theta)^2] \\ &= \frac{k}{2}(58r^2 + 2x^2 - 40r^2\cos\theta) \end{aligned}$$

I punti stazionari sono determinati dalle equazioni

$$0 = \frac{\partial V}{\partial x} = 2kx$$
$$0 = \frac{\partial V}{\partial \theta} = 20kr^2\sin\theta$$

quindi sono dati da $x = 0$, $\theta = 0$, e $x = 0$, $\theta = \pi$. L'hessiano del potenziale nel punto stazionario è (uso $y = \theta r$ come seconda coordinata generalizzata)

$$B = k\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \pm 20 \end{pmatrix}$$

e quindi è definito positivo solo sul primo punto stazionario. Dunque solo il primo è relativo a equilibrio stabile. L'hessiano dell'energia cinetica è invece (sempre usando $y = \theta r$ come seconda coordinata generalizzata)

$$A = m \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 12 \end{pmatrix}$$

Bisogna risolvere il problema agli autovalori

$$(B - \omega^2 A)\vec{v} = 0$$

Poniamo $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}\lambda}$, cosicché questo problema diventa

$$(\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 20 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 12 \end{pmatrix})\vec{v} = 0.$$

Calcoliamoci il polinomio caratteristico

$$p(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 2 - 5\lambda & 2\lambda \\ 2\lambda & 20 - 12\lambda \end{pmatrix} = 4[(2-5\lambda)(5-3\lambda) - \lambda^2] = 4(14\lambda^2 - 31\lambda + 10)$$

Quindi

$$\lambda_{1,2} = \frac{31 \pm \sqrt{401}}{28}$$

e

$$\omega_{1,2} = \sqrt{\frac{k}{m}\frac{31 \pm \sqrt{401}}{28}}$$

Ometto il calcolo degli autovettori.