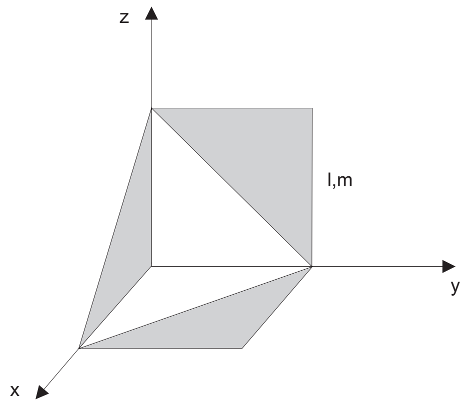
Esercizio 1

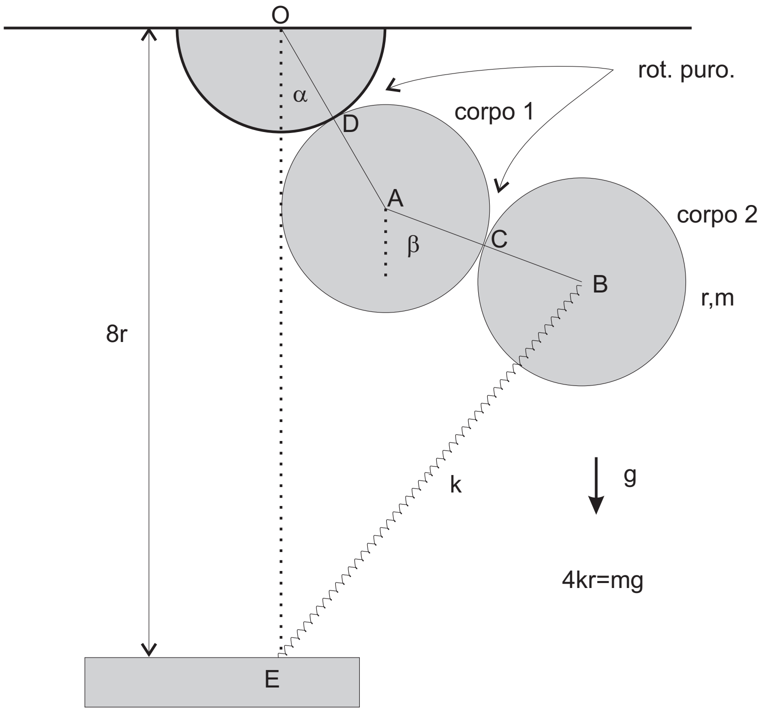
Sono date tre piastre uguali, omogenee e aventi forma di triangolo rettangolo, ciascuna di massa m e cateto l disposte come in figura.



- Scrivere la matrice d'inerzia.
- Discutere simmetrie. Determinare momenti e assi principali d'inerzia.
- Sapendo che a un istante considerato $\omega = (2\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k})s^{-1}$ nel riferimento di figura, calcolare $\mathbf{L}$ e T.

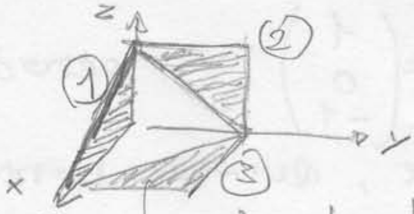
Esercizio 2

Sono dati due dischi omogenei di raggio r e massa m posti a contatto tra loro e con il disco 1 a contatto con un profilo semicircolare fisso dello stesso raggio. Il centro del secondo disco è collegato con una molla di lunghezza a riposo trascurabile a un punto E appartenente a un supporto fisso. Il contatto tra i dischi e tra il disco 1 e il supporto circolare sono di tipo rotolamento puro. Le aste OA e AB introdotte per vincolare il contatto hanno massa nulla. Le cooordinate Lagrangiane sono α e β, come in figura. La costante k della molla è legata all'accelerazione di gravità come in figura (si elimini m in favore di k dalle equazioni). Gli unici corpi che si muovono sono i due dischi.



- Scrivere l'energia potenziale, determinare punti stazionari, discuterne la stabilita',
- Scrivere l'energia cinetica,
- Determinare modi e pusazioni piccole oscillazioni.

ESERCIZIO 1



$$I_x^{(1)} = \int z^2\,dm = \rho \int z^2\,dx\,dz = \frac{2m}{l^2}\int_0^l dx \int_0^{l-x} z^2 dz$$

$$= \frac{2m}{l^2}\int_0^l dx\,\frac{(l-x)^3}{3} = \frac{2m}{l^2}\left(-\frac{(l-x)^4}{12}\right)\Big|_0^l$$

$$= \frac{2m}{l^2}\frac{l^4}{12} = \frac{1}{6} m l^2$$

$$I_{\cancel{z}}^{(1)} = I_x^{(1)} \qquad I_y^{(1)} = 2 I_x^{(1)} = \frac{1}{3} m l^2$$

$$I_{yx}^{(1)} = I_{yz}^{(1)} = 0$$

$$I_{xz}^{(1)} = -\int xz\,dm = -\frac{2m}{l^2}\int_0^l x\,dx \int_0^{l-x} z\,dz$$

$$= -\frac{2m}{l^2}\int_0^l x\,dx\,\frac{(l-x)^2}{2} = -\frac{2m}{2l^2}\int_0^l (l^2x - 2lx^2 + x^3)\,dx$$

$$= -\frac{m}{l^2}\left(\frac{l^4}{2} - \frac{2}{3}l^4 + \frac{l^4}{4}\right) = -\frac{m}{12} l^2$$

$$I^{(1)} = \frac{m}{12} l^2 \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$I^{(2)} = \frac{(2m)l^2}{12}\begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -3 \\ 0 & -3 & 4 \end{pmatrix} - \frac{ml^2}{12}\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{ml^2}{12}\begin{pmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & -5 \\ 0 & -5 & 6 \end{pmatrix}$$

$$I^{(3)} = \frac{ml^2}{12}\begin{pmatrix} 6 & -5 & 0 \\ -5 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$$

$$I = \frac{ml^2}{12}\begin{pmatrix} 20 & -5 & -1 \\ -5 & 16 & -5 \\ -1 & -5 & 20 \end{pmatrix}$$

IL VETTORE $\bar{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ È ORTOGONALE AL PIANO DI SIMMETRIA $z = x$, QUINDI DETERMINA UN ASSE PRINCIPALE D'INERZIA ALL'AUTOVALORE $\frac{7}{4} m l^2$

$$I \bar{v}_1 = \frac{m l^2}{12} \begin{pmatrix} 20 & -5 & -1 \\ -5 & 16 & -5 \\ -1 & -5 & 20 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{7}{4} m l^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

QUINDI $I_1 = \frac{7}{4} m l^2$ (CORRISPONDE A $\lambda_1 = 21$ PER LA MATRICE ADIMENSIONATA $J = \begin{pmatrix} 20 & -5 & -1 \\ -5 & 16 & -5 \\ -1 & -5 & 20 \end{pmatrix}$

RICORDIAMOCI CHE IL POLINOMIO CARATTERISTICO È

$$P(\lambda) = -\lambda^3 + tr(J)\lambda^2 + \ldots + \det J$$

MA ANCHE

$$P(\lambda) = -(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3)$$

QUINDI $tr J = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 56$

$$\det J = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 5334$$

CHE IMPLICA $\lambda_2 + \lambda_3 = 35$

$$\lambda_2 \lambda_3 = 254$$

$$\lambda_2^2 + 254 - 35\lambda_2 = 0$$

$$\lambda_{2,3} = \frac{35 \pm \sqrt{209}}{2} \Rightarrow I_{2,3} = \frac{m l^2}{12} \lambda_{2,3}$$

ESERCIZIO 2

$$V(\alpha,\beta) = -mg(2r)\cos\alpha - mg(2r)(\cos\alpha+\cos\beta)$$
$$+\frac{1}{2}k\left\{\left[8r-2r(\cos\alpha+\cos\beta)\right]^2+\left[2r(\operatorname{sen}\alpha+\operatorname{sen}\beta)\right]^2\right\}$$

$$= -8kr^2(2\cos\alpha+\cos\beta)$$
$$+\frac{k}{2}\left\{\left[8r-2r(\cos\alpha+\cos\beta)\right]^2+\left[2r(\operatorname{sen}\alpha+\operatorname{sen}\beta)\right]^2\right\}$$
$$= 36kr^2-8kr^2(4\cos\alpha+3\cos\beta)+4kr^2\cos(\alpha-\beta)$$
$$= 4kr^2\left\{9-(8\cos\alpha+6\cos\beta)+\cos(\alpha-\beta)\right\}$$

$$\frac{\partial V}{\partial\alpha} = 4kr^2\left\{8\operatorname{sen}\alpha-\operatorname{sen}(\alpha-\beta)\right\}$$

$$\frac{\partial V}{\partial\beta} = 4kr^2\left\{6\operatorname{sen}\beta+\operatorname{sen}(\alpha-\beta)\right\}$$

SI ANNULLANO PER $\alpha=\beta=0$

ALTRE SOL. COME $\alpha=0$, $\beta=180°$ NON SONO AMMESSE PER LA GEOMETRIA DEL PROBLEMA.

$$\left.\frac{\partial^2V}{\partial\alpha^2}\right|_{(0,0)} = 4kr^2\left\{8\cos\alpha-\cos(\alpha-\beta)\right\}\Big|_{(0,0)} = 28kr^2$$

$$\left.\frac{\partial^2V}{\partial\beta^2}\right|_{(0,0)} = 20kr^2 \qquad \left.\frac{\partial^2V}{\partial\alpha\partial\beta}\right|_{(0,0)} = 4kr^2$$

$$B = kr^2\begin{pmatrix}28 & 4\\ 4 & 20\end{pmatrix}$$

$B_{11}>0$
$\det B>0$
EQ. STABILE

$$v_A = 2r\dot\alpha$$

$$\omega_1 = \frac{v_A}{DA} = \frac{2r\dot\alpha}{r} = 2\dot\alpha$$

$$T_1 = \frac{1}{2} m v_A^2 + \frac{1}{2} I_1 \omega_1^2 = 2mr^2\dot\alpha^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}mr^2\right)(2\dot\alpha)^2$$

$$= 3mr^2\dot\alpha^2$$

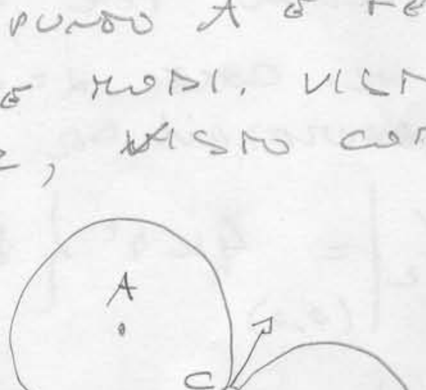
$$B = \left(2r(\sin\alpha + \sin\beta),\ 2r(\cos\alpha + \cos\beta)\right)$$

$$\dot B = 2r\left(\cos\alpha\,\dot\alpha + \cos\beta\,\dot\beta,\ -\sin\alpha\,\dot\alpha - \sin\beta\,\dot\beta\right)$$

$$v_B^2 = \dot B^2 = 4r^2\left\{\dot\alpha^2 + \dot\beta^2 + 2\dot\alpha\dot\beta(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta)\right\}$$

$$= 4r^2\left\{\dot\alpha^2 + \dot\beta^2 + 2\dot\alpha\dot\beta\cos(\alpha-\beta)\right\}$$

PER DETERMINARE ω_2 METTIAMOCI NEL RIFERIMENTO IN MOTO TRASLATORIO LA CUI ORIGINE COINCIDE CON A. POICHÉ NON RUOTA LE VELOCITÀ ANGOLARI DEI CORPI IN QUESTO RIFERIMENTO SONO LE STESSE DEL RIFERIMENTO INERZIALE, QUINDI ω_1 PER IL CORPO 1 E ω_2 PER IL CORPO 2 MA IN QUESTO RIFERIMENTO IL PUNTO A È FERMO E v_C LO CALCOLIAMO IN DUE MODI, VISTO COME PUNTO DEL CORPO 1, $v_C = \omega_1 r$, VISTO COME PUNTO DEL CORPO 2



$$v_C = 2r\dot\beta - \omega_2 r$$

QUINDI $\omega_1 = 2\dot\beta - \omega_2$

OVVERO $\omega_2 = 2\dot\beta - \omega_1 = 2(\dot\beta - \dot\alpha)$

$$T_2 = \frac{1}{2} m v_B^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}mr^2\right)\left[2(\dot\beta - \dot\alpha)\right]^2$$

$$T_2 = 2mr^2 \{ \dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2 + 2\dot{\alpha}\dot{\beta}\cos(\alpha-\beta) \} + mr^2 (\dot{\beta}-\dot{\alpha})^2$$

$$= 3mr^2 \{ \dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2 \} + 2mr^2 \dot{\alpha}\dot{\beta} \left(2\cos(\alpha-\beta) - 1 \right)$$

$$T = 3mr^2 \{ \cancel{2}\dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2 \} + 2mr^2 \dot{\alpha}\dot{\beta} \left(2\cos(\alpha-\beta) - 1 \right)$$

$$A = 2mr^2 \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

...