Compito di Meccanica Razionale M-Z

13 giugno 2012

1. E' dato un semidisco di raggio r e massa m. Determinare la posizione del centro di massa e il momento d'inerzia dell'asse perpendicolare al piano del semidisco e passante per il centro di massa.

2. Sono dati due dischi omogenei di massa m e raggio r appoggiati ad un retta orizzontale (problema bidimensionale). Un'asta ha un'estremita incernierata a un disco (disco 1) ed è appoggiata all'altro disco (disco 2). L'asta ha massa trascurabile. Sapendo che nell'istante iniziale la distanza tra i centri dei dischi è $3r$ e la velocità del disco 1 è v, determinare all'istante iniziale: (a) il centro d'istantanea rotazione dell'asta, (b) la velocità angolare del disco 2, (c) l'energia cinetica totale.

3. E' dato un pendolo doppio come in figura. Il primo pendolo è costituito da un'asta di massa m e lunghezza $2r$ saldata all'estremità al semidisco dell'esercizio 1. Il secondo pendolo è vincolato a ruotare come in figura. Sono anche date una molla e una forza costante orizzontale applicata come in figura. Vale l'uguaglianza $k2r = mg$. Usando le coordinate α e β

   a) Sscrivere l'energia cinetica e potenziale.
   b) Determinare i punti d'equilibrio.
   c) Calcolare le pulsazioni e i modi principali delle piccole oscillazioni.

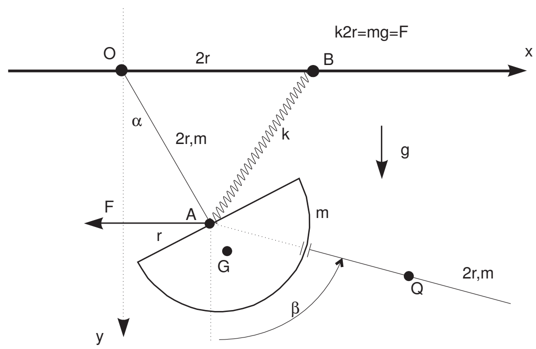

Figure 1: Esercizio 2

1 Soluzioni

1. L'area totale del semidisco è

$$A = \pi r^2/2$$

quindi la densità è $\rho = 2m/(\pi r^2)$. Sia y l'asse di simmetria del semidisco con $y = 0$ coincidente con il centro del disco, e sia x l'asse perpendicolare giacente sul piano del semidisco. Per simmetria $x_G = z_G = 0$. Abbiamo

$$y_G = \frac{1}{m}\int_{semidisco} y\mathrm{d}m = \frac{\rho}{m}\int_{semidisco} y\mathrm{d}A$$

dove in coordinate polari d$A = rd\theta dr$

$$y_G = \frac{\rho}{m}\int_0^\pi d\theta \int_0^r dr(r\sin\theta)r = 2\frac{\rho}{m}\frac{r^3}{3} = \frac{4}{3\pi}r.$$

Sia $I_C = \frac{1}{2}(2m)r^2 = mr^2$ il momento d'inerzia del disco totale rispetto all'asse passante per il centro C e ortogonale al piano del disco. Il momento d'inerzia rispetto allo stesso asse del semidisco è $I_C/2$. Per Huygens-Steiner

$$\frac{1}{2}I_C = I_G + my_G^2 \Rightarrow I_G = \frac{1}{2}mr^2 - m(\frac{4}{3\pi}r)^2 = \frac{9\pi^2 - 32}{18\pi^2}mr^2$$

2. Ci riferiamo alla figura 2 dove abbiamo avvicinato i dischi per scorciare la figura. Per il teorema di Chasles il centro istantaneo di rotazione dell'asta si trova in C. Anzitutto

$$AD = \sqrt{(3r)^2 - r^2} = \sqrt{8}r.$$

Si noti che

$$AB/r = AE/AD \Rightarrow AE = 3\sqrt{8}r,$$

quindi

$$ED = \sqrt{AE^2 - AD^2} = 8r.$$

Si noti che $CE = ED$ quindi

$$AC = AE + CE = r(8 + \sqrt{8}).$$

Se ne deduce che la velocità angolare dell'asta è

$$\omega_{asta} = v/AC = \frac{v}{r}\frac{1}{8 + 3\sqrt{8}}.$$

La velocità angolare del disco 2 è

$$\omega_2 = v_D/DF$$

dove sappiamo che

$$v_D = \omega_{asta} CD$$

quindi

$$\omega_2 = \omega_{asta} CD/DF.$$

Ma per la similitudine dei triangoli ECD e DBF

$$CD/DF = ED/r = 8,$$

quindi

$$\omega_2 = \frac{v}{r}\frac{8}{8 + 3\sqrt{8}}.$$

L'energia cinetica è

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}(\frac{3}{2}mr^2)(\frac{v}{r})^2 + \frac{1}{2}(\frac{3}{2}mr^2)(\frac{v}{r}\frac{8}{8 + 3\sqrt{8}})^2 \\ &= \frac{3}{4}mv^2[1 + \frac{1}{(1 + 3/\sqrt{8})^2}] \end{aligned}$$

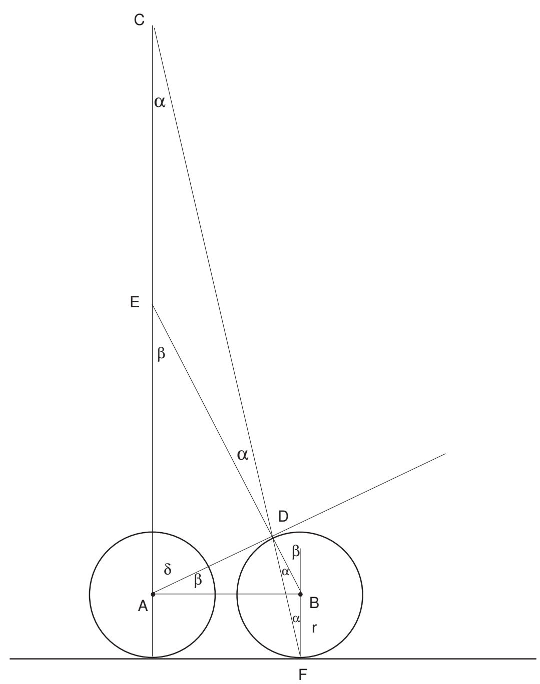

Figure 2: Esercizio 2

3. Calcoliamoci il momento d'inerzia del semidisco rispetto ad O

$$\begin{aligned} I_O &= I_G + m(OA+AG)^2 = \frac{9\pi^2-32}{18\pi^2}mr^2 + m(2r+\frac{4}{3\pi}r)^2 \\ &= mr^2[\frac{9\pi^2-32}{18\pi^2} + 4 + \frac{16}{3\pi} + \frac{16}{9\pi^2}] = mr^2\frac{27\pi+32}{6\pi} \end{aligned}$$

L'energia cinetica del primo pendolo è perciò

$$T_1 = \frac{1}{2}[I_O + \frac{1}{3}m(2r)^2]\dot\alpha^2 = \frac{1}{2}mr^2\frac{35\pi+32}{6\pi}\dot\alpha^2$$

Veniamo al calcolo dell'energia cinetica del secondo pendolo. La posizione del centro di massa è

$$(x_Q, y_Q) = (2r\sin\alpha + 2r\sin\beta, 2r\cos\alpha + 2r\cos\beta)$$

La sua velocità è

$$(\dot x_Q, \dot y_Q) = 2r(\cos\alpha\dot\alpha + \cos\beta\dot\beta, -\sin\alpha\dot\alpha - \sin\beta\dot\beta)$$

Quindi il suo modulo quadrato è

$$v_Q^2 = 4r^2[\dot\alpha^2 + \dot\beta^2 + 2\cos(\alpha-\beta)\dot\alpha\dot\beta].$$

Infine usando Huygens-Steiner

$$\begin{aligned} T_2 &= \frac{1}{2}mv_Q^2 + \frac{1}{2}(\frac{1}{12}m(2r)^2)\dot\beta^2 \\ &= \frac{1}{2}4mr^2[\dot\alpha^2 + \frac{13}{12}\dot\beta^2 + 2\cos(\alpha-\beta)\dot\alpha\dot\beta] \end{aligned}$$

quindi

$$T = \frac{1}{2}mr^2[\frac{59\pi+32}{6\pi}\dot\alpha^2 + \frac{13}{3}\dot\beta^2 + 8\cos(\alpha-\beta)\dot\alpha\dot\beta].$$

Veniamo al calcolo dell'energia potenziale. L'energia potenziale della molla è (si usa il teorema di Carnot)

$$V_{molla} = \frac{1}{2}k(8r^2 - 8r^2\cos(\pi/2-\alpha)) = 4kr^2(1-\sin\alpha).$$

L'energia potenziale gravitazionale è

$$\begin{aligned} V_{grav} &= -mgr\cos\alpha - mg(2r+\frac{4}{3\pi}r)\cos\alpha - mg(2r\cos\alpha + 2r\cos\beta) \\ &= -mgr(5+\frac{4}{3\pi})\cos\alpha - 2mgr\cos\beta \end{aligned}$$

La forza costante $\vec F = -F\hat\imath$ deriva dal potenziale $V_F = Fx = F2r\sin\alpha$ quindi

$$V = -mgr(5+\frac{4}{3\pi})\cos\alpha - 2mgr\cos\beta + 2rF\sin\alpha + 4kr^2(1-\sin\alpha).$$

Usiamo l'identità $k2r = mg = F$ per riscriverla

$$
\begin{aligned}
V &= -2kr^2(5 + \frac{4}{3\pi})\cos\alpha - 4kr^2\cos\beta + 4kr^2\sin\alpha + 4kr^2(1 - \sin\alpha) \\
&= 2kr^2[2 - (5 + \frac{4}{3\pi})\cos\alpha - 2\cos\beta].
\end{aligned}
$$

Il punto stazionario si ottiene imponendo $\partial V/\partial\alpha = 0$, $\partial V/\partial\beta = 0$ ovvero

$$
\begin{aligned}
0 &= \partial V/\partial\alpha = 2kr^2[(5 + \frac{4}{3\pi})\sin\alpha], \\
0 &= \partial V/\partial\beta = 2kr^2[2\sin\beta].
\end{aligned}
$$

Essendo $\sin\alpha = \sin\beta = 0$, la geometria del problema implica che l'unico punto stazionario è $\alpha = 0$, $\beta = 0$. L'Hessiano di V sul punto stazionario è

$$
B = \frac{2kr^2}{3\pi}\begin{pmatrix} (15\pi + 4) & 0 \\ 0 & 6\pi \end{pmatrix}.
$$

Questa matrice è definita positiva quindi l'equilibrio è stabile. L'Hessiano dell'energia cinetica nel punto stazionario è

$$
A = \frac{2mr^2}{3\pi}\begin{pmatrix} 59\pi + 32 & 24\pi \\ 24\pi & 26\pi \end{pmatrix}.
$$

Sia $\lambda = \frac{k}{m}\eta$ per determinare le pulsazioni dobbiamo risolvere il problema di diagonalizzazione simultanea di A e B. Calcoliamo il polinomio caratteristico

$$
p(\eta) = \det\begin{pmatrix} (15\pi + 4) - \eta(59\pi + 32) & -\eta 24\pi \\ -\eta 24\pi & 6\pi - \eta 26\pi \end{pmatrix}
$$

ETC...