Compito di Meccanica Razionale M-Z

11 giugno 2013

1. Tre piastre piane omogenee di massa m aventi la forma di triangoli rettangoli con cateti $4l$ e $3l$ sono saldate lungo il cateto più lungo come in figura 1.

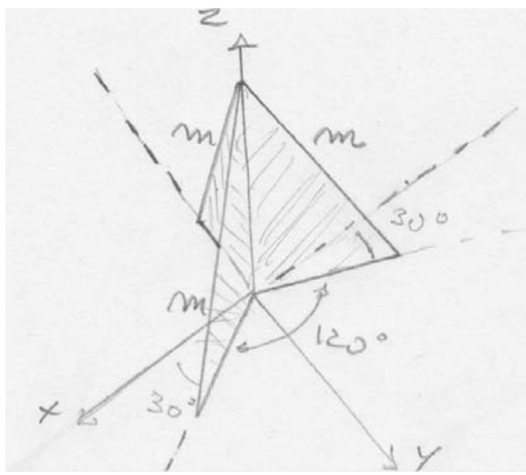

Figure 1:

   a) Calcolare la matrice d'inerzia
   b) Discutere le simmetrie. Trovare assi e momenti principali d'inerzia.
   c) Se all'istante dato e nel riferimento dato

$$\vec{\omega} = (4\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k})s^{-1}$$

   $m = 20g$ e $l = 10cm$, calcolare il momento angolare $\vec{L}$ e l'energia cinetica T.

2. Nel sistema illustrato in figura 2

   a) Sscrivere l'energia cinetica e potenziale.

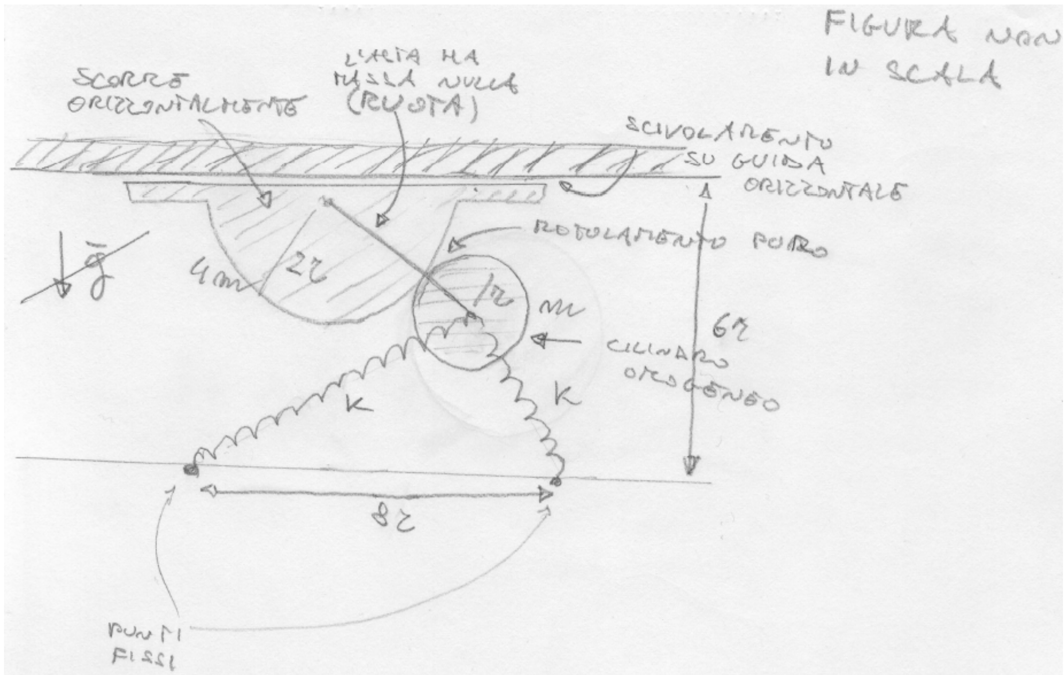

Figure 2:

b) Determinare i punti d'equilibrio. Discutere la stabilià.

c) Calcolare le pulsazioni e i modi principali delle piccole oscillazioni.

1 Soluzioni

1.1 Esercizio 1

Calcoliamoci la matrice d'inerzia per un generico triangolo rettangolo di cateti a e b posto come in figura.

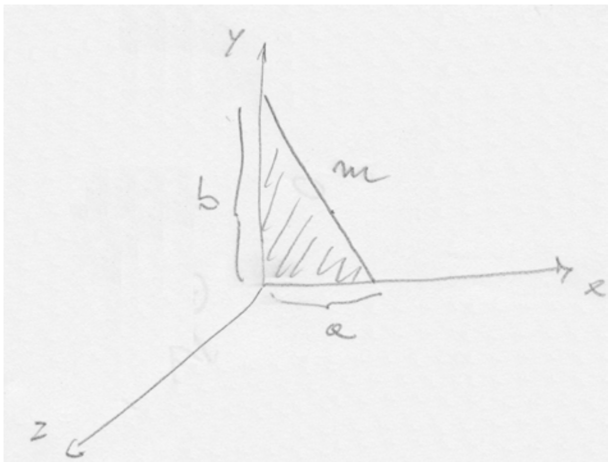

Figure 3:

La densità è $\rho = \frac{2m}{ab}$

$$\begin{aligned} I_x &= \int y^2 \mathrm{d}m = \rho \int_0^a \mathrm{d}x \int_0^{b-\frac{b}{a}x} y^2 \mathrm{d}y \\ &= \rho \int_0^a \mathrm{d}x \frac{1}{3}(b - \frac{b}{a}x)^3 = \frac{\rho}{12}\frac{a}{b}b^4 = \frac{m}{6}b^2 \end{aligned}$$

Analogamente,

$$I_y = \frac{m}{6}a^2$$

Poiché il sistema è piano

$$I_z = I_x + I_y = \frac{m}{6}(a^2 + b^2).$$

Infine

$$\begin{aligned} I_{xy} &= -\rho \int_a^a x\mathrm{d}x \int_0^{b-\frac{b}{a}x} y\mathrm{d}y = -\rho \int_0^a \mathrm{d}x \, \frac{x}{2}(b - \frac{b}{a}x)^2 \\ &= -\frac{\rho b^2}{2} \int_0^a \mathrm{d}x(x + \frac{x^3}{a^2} - \frac{2}{a}x^2) \\ &= -\frac{m}{12}ab \end{aligned}$$

quindi

$$I_{triangolo} = \frac{m}{12}\begin{pmatrix} 2b^2 & -ab & 0 \\ -ab & 2a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2(a^2+b^2) \end{pmatrix}$$

Torniamo al nostro oggetto. Ciascun piano su cui giace una piastra è un piano di simmetria. L'intersezione di due piani di simmetria è un asse principale quindi l'asse z è principale. Inoltre il piano yz è di simmetria e l'asse perpendicolare a un piano di simmetria è principale perciò l'asse x è principale. Infine l'asse ortogonale a due assi principali è principale perciò l'asse y è principale. Dunque la terna x, y, z di partenza è già principale. Non solo, poiché l'oggetto presenta una simmetria di rotazione di angolo $120°$ intorno all'asse z, la sezione tra l'ellissoide e il piano xy è necessariamente circolare. Questo significa che tutti gli assi sul piano xy passanti per l'origine sono principali allo stesso momento d'inerzia.

Evidentemente I_z è tre volte quella di un solo triangolo quindi tenuto conto dei conti già svolti

$$I_z = \frac{9}{2}ml^2$$

Per quanto detto la matrice d'inerzia è

$$I = \begin{pmatrix} I_y & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{pmatrix}$$

e resta solo da calcolare I_y. Sia (1) la piastra sul piano yz e siano (2) e (3) le altre due. Possiamo proiettare (2) e (3) sul piano zx lungo l'asse y. Questa operazione non cambia le distanze delle masse elementari dall'asse y e fornisce due triangoli rettangoli aventi per cateti $4l$ e

$$3l\cos 30° = \frac{3\sqrt{3}}{2}l$$

quindi

$$I_y^{(2)} + I_y^{(3)} = 2\frac{m}{6}\{(4l)^2 + (\frac{3\sqrt{3}}{2}l)^2\} = ml^2\frac{91}{12}$$

Inoltre

$$I^{(1)} = \frac{m}{6}(4l)^2$$

e infine

$$I_y = \frac{41}{4}ml^2.$$

Alternativamente si può trovare $I^{(2)}$ e $I^{(3)}$ ruotando la matrice d'inerzia di $I^{(1)}$ di angoli $\alpha_1 = 120°$ e $\alpha_2 = 240°$, infatti

$$I^{(i)} = O(\alpha_i)I^{(1)}O^T(\alpha_i)$$

dove $O(\alpha_i)$ è la matrice di rotazione

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

cioè

$$\begin{pmatrix} -1/2 & \pm\sqrt{3}/2 & 0 \\ \mp\sqrt{3}/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Per esempio fatti i conti si ottiene facilmente

$$I^{(1)} = \frac{m}{6}l^2 \begin{pmatrix} 25 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 6 \\ 0 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

e quindi applicando la rotazione

$$I^{(2)} = \frac{m}{6}l^2 \begin{pmatrix} \frac{23}{4} & -\frac{9}{4}\sqrt{3} & -3\sqrt{3} \\ -\frac{9}{4}\sqrt{3} & \frac{91}{4} & -3 \\ -3\sqrt{3} & -3 & 9 \end{pmatrix}$$

Si può calcolare anche $I^{(3)}$ e sommati tutti i contributi si ottiene di nuovo la matrice già trovata con considerazioni di simmetria.

Il resto dell'esercizio procede come al solito con l'ulteriore semplificazione dovuta alla forma diagonale della matrice.

1.2 Esercizio 2

Introduciamo un'ascissa x diretta verso destra e centrata alla metà dei punti fissi di applicazione delle molle. Questa coordinata determina la posizione del centro del carrello. Sia poi θ l'angolo formato tra la verticale e il segmento congiungente il centro del disco e il centro del semicerchio mobile. Sia poi P il centro del disco. Si ha

$$\begin{aligned} P(x,\theta) &= (x + 3r\sin\theta, 3r\cos\theta) \\ \dot{P} &= (\dot{x} + 3r\cos\theta\dot{\theta}, -3r\sin\theta\dot{\theta}) \end{aligned}$$

quindi

$$\dot{P}^2 = \dot{x}^2 + 9r^2\dot{\theta}^2 + 6r\cos\theta\dot{\theta}\dot{x}$$

Per quanto riguarda la velocità angolare ω del disco, mettiamoci nel riferimnto in moto con il carrello semicircolare. In questo riferimento (non ruotante) troviamo che la velocità del centro del disco può scriversi in due modi, ovvero

$$v = 3r\dot{\theta}$$

e, tenuto conto che in questo riferimento il centro istantaneo di rotazione del disco è il punto di contatto,

$$v = \omega r$$

perciò $\omega = 3\dot{\theta}$. L'energia cinetica vale

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}4m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\dot{P}^2 + \frac{1}{2}(\frac{1}{2}mr^2)\omega^2 \\ &= \frac{1}{2}m\{5\dot{x}^2 + \frac{27}{2}r^2\dot{\theta}^2 + 6r\dot{x}\cos\theta\dot{\theta}\} \end{aligned}$$

L'energia potenziale si scrive

$$V = \frac{k}{2}\{2(6r - 3r\cos\theta)^2 + (4r + x + 3r\sin\theta)^2 + (-4r + x + 3r\sin\theta)^2\}$$

Da cui si ottiene introducendo la coordinata $y = r\theta$

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial x} &= 2k(x + 3r\sin\theta) \\ \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial\theta} &= k\{36r\sin\theta + 6x\cos\theta\} \end{aligned}$$

Quindi nel punto stazionario

$$\begin{aligned} x + 3r\sin\theta &= 0 \\ 36r\sin\theta + 6x\cos\theta &= 0 \end{aligned}$$

Sostituendo x dalla prima nella seconda

$$18r\sin\theta(2 - \cos\theta) = 0$$

Poiché $|\cos\theta| \leq 1$ l'unica possibilità affinché sia soddisfatta è $\sin\theta = 0$ e data la geometria del problema può solo essere $\theta = 0$ e dalla prima equazione segue $x = 0$. Quindi nelle coordinate scelte c'è un solo punto stazionario nell'origine del riferimento.

Per studiare la stabilità conviene usare la coordinate $y = r\theta$ al posto di θ in modo che x e y abbiano le stesse dimensioni. Allora l'hessiano di $T(\dot{x}, \dot{y})$ nel punto stazionario è

$$A = m\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & \frac{27}{2} \end{pmatrix}$$

e quello di $V(x, y)$ è

$$B = k\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 6 & 36 \end{pmatrix}$$

in particolare, poiché $B_{11} > 0$ e il determinante di B è $36 > 0$, B è definita positiva e perciò il punto stazionario è stabile.

Per determinare i modi principali e le relative pulsazioni dobbiamo risolvere il problema agli autovalori

$$(B - \omega^2 A)\vec{v} = \vec{0}.$$

Sia $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}2\lambda}$, allora dobbiamo risolvere il problema

$$(\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 6 & 36 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 10 & 6 \\ 6 & 27 \end{pmatrix})\vec{v} = \vec{0}.$$

Calcoliamoci il polinomio caratteristico

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \det \begin{pmatrix} 2(1-5\lambda) & 6(1-\lambda) \\ 6(1-\lambda) & 9(4-3\lambda) \end{pmatrix} = 18\{(1-5\lambda)(4-3\lambda) - 2(1-\lambda)^2\} \\ &= 18(13\lambda^2 - 19\lambda + 2) \end{aligned}$$

quindi

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{26}(19 \pm \sqrt{257}).$$

e le pulsazioni sono

$$\omega_{1,2} = \sqrt{\frac{k}{13m}(19 \pm \sqrt{257})}$$

Se $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ rappresenta il modo allora

$$(1-5\lambda)v_1 + 3(1-\lambda)v_2 = 0$$

da cui si deduce

$$\vec{v} = v_1 \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{(1-5\lambda)}{3(\lambda-1)} \end{pmatrix}$$

sostituendo i valori di λ ottenuti sopra si ottengono i due modi di oscillazione.