Compito di Meccanica Razionale M-Z

10 gennaio 2012

1. Due quarti di corona circolare, di raggio interno r ed esterno $2r$, ciascuno omogeneo e di massa m, sono disposti come in figura.

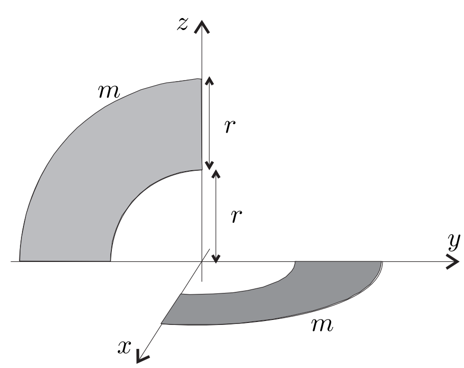
   a) Determinare la matrice d'inerzia.

   b) Determinare una simmetria de sistema (suggerimento: due riflessioni rispetto a piani ortogonali sono equivalenti a una rotazione di π intorno all'asse individuato dall'intersezione dei piani di riflessione). Tenendo a mente l'ellissoide d'inerzia individuare un asse principale.

   c) Determinare momenti e assi principali d'inerzia.

   d) Quanto valgono l'energia cinetica T e il momento angolare $\vec{L}$ se $m = 100g$, $r = 1cm$ e all'istante considerato $\vec{\omega} = (\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k})s^{-1}$?

   Eventuali π che compaiano nei calcoli vanno portati dietro e non approssimati.



2. Su un piano *orizzontale* sono introdotte coordinate cartesiane x, y. Sul piano giacciono due guide paraboliche, rispettivamente di equazioni $y = \frac{1}{2d}x^2$ e $y = -d - \frac{1}{2d}x^2$. Su ciascuna guida si muove senza attrito un punto materiale di massa m. I due punti materiali sono collegati da una molla di costante elastica k e lunghezza a riposo trascurabile.

   a) Introdurre coordinate generalizzate e scrivere l'energia cinetica e potenziale.

b) Determinare i punti d'equilibrio.

c) Calcolare le pulsazioni e i modi principali delle piccole oscillazioni. Come si scrive la più generale soluzione del moto per piccole ampiezze di oscillazione?

1 Soluzioni

1. Consideriamo l'intera corona circolare e sia ρ la densità. La massa esterna è $M_e = \rho\pi 4r^2$, quella interna $M_i = \rho\pi r^2$, quella della corona $M_c = \rho\pi 3r^2$ e quella di un quarto di corona $m = \frac{3}{4}\pi\rho r^2$, quindi $M_e = \frac{16}{3}m$ e $M_i = \frac{4}{3}m$. Il momento d'inerzia dell'intera corona circolare rispetto all'asse di simmetria è
$$I_c = \frac{1}{2}[M_e(2r)^2 - M_i r^2] = 10mr^2$$
Ne segue che il momento d'inerzia rispetto a un asse perpendicolare al piano che contiene un quarto di corona è $\frac{5}{2}mr^2$. Rispetto invece a un asse passante per un lato del quarto di corona si ha, per il teorema dei sistemi piani, $\frac{5}{4}mr^2$.

   Il momento centrifugo non nullo è
$$\begin{aligned}-\sum_i m_i x_i y_i &= -\rho\int_r^{2r} s^3 ds \int_0^{\pi/2} \cos\theta\sin\theta d\theta = -\frac{15}{16}\rho r^4 \int_0^{\pi} \sin\alpha d\alpha \\ &= -\frac{15}{8}\rho r^4 = -\frac{5}{2\pi}mr^2\end{aligned}$$
Si noti che si può portare un quarto di corona nell'altro facendo seguire la riflessione $y \to -y$ alla riflessione rispetto a un piano che biseca il piano xz (e ne scambia gli assi). La matrice d'inerzia è
$$\frac{5}{4\pi}mr^2\begin{pmatrix}\pi & -2 & 0\\ -2 & \pi & 0\\ 0 & 0 & 2\pi\end{pmatrix} + \frac{5}{4\pi}mr^2\begin{pmatrix}2\pi & 0 & 0\\ 0 & \pi & 2\\ 0 & 2 & \pi\end{pmatrix} = \frac{5}{4\pi}mr^2\begin{pmatrix}3\pi & -2 & 0\\ -2 & 2\pi & 2\\ 0 & 2 & 3\pi\end{pmatrix}$$
Sia $p(\lambda)$ il polinomio caratteristico di $\begin{pmatrix}3\pi & -2 & 0\\ -2 & 2\pi & 2\\ 0 & 2 & 3\pi\end{pmatrix}$, allora
$$\begin{aligned}p(\lambda) &= (3\pi-\lambda)^2(2\pi-\lambda) - 8(3\pi-\lambda)\\ &= (3\pi-\lambda)[(3\pi-\lambda)(2\pi-\lambda)-8] = (3\pi-\lambda)[\lambda^2 - 5\pi\lambda + (6\pi^2-8)]\end{aligned}$$
quindi gli autovalori sono
$$\begin{aligned}\lambda_{1,2} &= \frac{1}{2}[5\pi \pm \sqrt{\pi^2+8}],\\ \lambda_3 &= 3\pi\end{aligned}$$
e i corrispondenti momenti principali d'inerzia si ottengono per moltiplicazione per il fattore $\frac{5}{4\pi}mr^2$. Gli assi principali sono individuati dagli autovettori
$$v_1 = \begin{pmatrix}\frac{2}{3\pi-\lambda_1}\\ 1\\ -\frac{2}{3\pi-\lambda_1}\end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix}\frac{2}{3\pi-\lambda_2}\\ 1\\ -\frac{2}{3\pi-\lambda_2}\end{pmatrix},\ v_3 = \begin{pmatrix}1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$$

Il momento angolare vale

$$\vec{L} = \frac{5}{4\pi}10^{-5}\begin{pmatrix}3\pi & -2 & 0\\ -2 & 2\pi & 2\\ 0 & 2 & 3\pi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}(kgm^2s^{-1}) = \begin{pmatrix}3\pi-4\\ 4\pi+4\\ 9\pi+4\end{pmatrix}\frac{5}{4\pi}10^{-5}(kgm^2s^{-1}).$$

Mentre l'energia cinetica vale

$$T = \frac{1}{2}\vec{L}\cdot\vec{\omega} = (19\pi+8)\frac{5}{4\pi}10^{-5}(kgm^2s^{-2})$$

2. Utilizziamo come coordinate generalizzate le ascisse x_1 e x_2 dei due punti materiali. L'energia potenziale è dovuta soltanto alla molla e si scrive

$$V = \frac{k}{2}\{(x_2-x_1)^2 + (\frac{1}{2d}x_1^2 + d + \frac{1}{2d}x_2^2)^2\}.$$

Il gradiente si scrive

$$\begin{pmatrix}\partial_{x_1}V\\ \partial_{x_2}V\end{pmatrix} = k\begin{pmatrix}-(x_2-x_1) + (\frac{1}{2d}x_1^2 + d + \frac{1}{2d}x_2^2)\frac{x_1}{d}\\ (x_2-x_1) + (\frac{1}{2d}x_1^2 + d + \frac{1}{2d}x_2^2)\frac{x_2}{d}\end{pmatrix}$$

perciò $\nabla V = 0$ se e solo se $x_1 = x_2 = 0$. L'hessiano nel punto di equilibrio è

$$B = \begin{pmatrix}\partial_{11}V & \partial_{12}V\\ \partial_{21}V & \partial_{22}V\end{pmatrix}|_{x_1=x_2=0} = k\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}.$$

Siano $P_1 = (x_1, \frac{1}{2d}x_1^2)$ e $P_2 = (x_2, -d - \frac{1}{2d}x_2^2)$ i due punti materiali in coordinate cartesiane. Differenziando rispetto al tempo otteniamo le due velocità

$$\dot{P}_1 = (\dot{x}_1, \frac{1}{d}x_1\dot{x}_1),$$
$$\dot{P}_2 = (\dot{x}_2, -\frac{1}{d}x_2\dot{x}_2),$$

quindi l'energia cinetica si scrive

$$T = \frac{m}{2}\{[1 + (\frac{x_1}{d})^2]\dot{x}_1^2 + [1 + (\frac{x_2}{d})^2]\dot{x}_2^2\}.$$

L'hessiano dell'energia cinetica nel punto d'equilibrio è

$$A = m\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Dobbiamo risolvere il problema agli autovettori $(B - \lambda A)w = 0$. Introduciamo η tale che $\lambda = \eta\frac{k}{m}$, e sia $\tilde{A} = I$ e $\tilde{B} = B/k$. Abbiamo perciò $(\tilde{B} - \eta\tilde{A})w = 0$. Calcoliamo e uguagliamo a zero il polinomio caratteristico

$$\det(\tilde{B} - \eta\tilde{A}) = \det\begin{pmatrix}2-\eta & -1\\ -1 & 2-\eta\end{pmatrix} = (2-\eta)^2 - 1 = 0$$

Otteniamo $\eta_1 = 3$, $\eta_2 = 1$ a cui corrispondono le pulsazioni

$$\omega_1 = \sqrt{3\frac{k}{m}}, \qquad \omega_2 = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Gli autovettori si ottengono facilmente sostituendo η_1 e η_2 nella matrice $\begin{pmatrix} 2-\eta & -1 \\ -1 & 2-\eta \end{pmatrix}$ e cercandone il nucleo. Otteniamo gli autovettori (non normalizzati)

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Intuitivamente, quando il moto è in controfase la frequenza è radice di tre volte più alta di quando è in fase (la ragione è che la molla si stira più rapidamente in quanto a parità di spostamento in ascissa i punti si allontanano di più).

La soluzione più generale al problema delle piccole oscillazioni si scrive

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + a_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \sin(\omega_2 t + \varphi_2)$$

e, come atteso, dipende da quattro costanti di integrazione: $a_1, a_2, \varphi_1, \varphi_2$.