1. Calcolare
$$\frac{2^{4/5}\sqrt[5]{i-\sqrt{3}}-\sqrt{3}}{1+i}$$

2. E' dato uno spazio vettoriale 3 dimensionale V, una base e_1, e_2, e_3 e una seconda base $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$ che si scrive rispetto alla prima
$$\bar{e}_1 = 3e_1 + 2e_2 + e_3 \tag{1}$$
$$\bar{e}_2 = e_1 + 2e_2 + 3e_3 \tag{2}$$
$$\bar{e}_3 = 2e_1 + 3e_2 + e_3 \tag{3}$$
Date le componenti di un generico vettore $v = v_1e_1 + v_2e_2 + v_3e_3$ determinare la matrice di trasformazione che manda il vettore colonna
$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$
nelle componenti
$$\begin{pmatrix} \bar{v}_1 \\ \bar{v}_2 \\ \bar{v}_3 \end{pmatrix}$$
dello stesso vettore rispetto alla nuova base. Nel caso specifico $v_1 = 1$, $v_2 = -1$, $v_3 = 1$ quali sono le componenti del vettore rispetto alla nuova base?

3. Usando l'eliminazione di Gauss discutere per quali valori di k e h il sistema $Bx = c$ con
$$B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & k \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad c = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3-h \end{pmatrix}$$
ammette una, nessuna o infinite soluzioni. Calcolare il polinomio caratteristico della matrice
$$D = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$
ottenuta dalla precedente ponendo $k = 0$. D è diagonalizzabile? Se si qual è la forma diagonale? Trovare una base del nucleo e una base dell'immagine di $D - 3I$ intesa come applicazione lineare $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.

4. Sono dati due vettori $u, w \in \mathbb{R}^3$ e una costance $k \in \mathbb{R}$. L'applicazione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ che manda il generico vettore v in
$$f(v) = (v \cdot u)w + kv$$
è lineare? (un argomento breve è sufficiente) Quali sono il nucleo e l'immagine dell'applicazione e che dimensione hanno? La risposta dipende dalla collinearità o ortogonalità dei vettori u e w o dal valore di k?

5. Le matrici 3×3 che soddisfano l'equazione $A + A^T = kA_{31}I$, dove A_{31} è l'elemento di riga 3 e colonna 1 di A, I è la matrice identità e $k \geq 0$ è una costante, formano uno spazio vettoriale? Perché? Di che dimensione? Dare una base. Le risposte dipendono dal valore di k?

1 Soluzioni

1. Il calcolo dà : $\frac{1+i}{2}$

2. La matrice di trasformazione é $(A^{-1})^T$ dove

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Il calcolo fornisce

$$(A^{-1})^T = -\frac{1}{12} \begin{pmatrix} -7 & 5 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 4 & -8 & 4 \end{pmatrix}$$

Le componenti del vettore v rispetto alla nuova base sono $\bar{v}_1 = 13/12$, $\bar{v}_2 = 5/12$, $\bar{v}_3 = -4/3$.

3. L'eliminazione di Gauss riduce il sistema a $B'x = c'$ dove

$$B' = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & k \\ 0 & 0 & 7k+9 \end{pmatrix} \qquad c' = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 7-3h \end{pmatrix}$$

A questo punto se $k \neq -9/7$ c'è una e una sola soluzione, se $k = -9/7$ e $h = 7/3$ ci sono infinite soluzioni infine se $k = -9/7$ e $h \neq 7/3$ non ci sono soluzioni.

Il calcolo del polinomio caratteristico di D risulta $p(\lambda) = -(\lambda-3)^2(\lambda-1)$. Ci sono due autovalori distinti: 3 e 1 di molteplicità algebriche rispettivamente 2 e 1.

Sappiamo che se la molteplicità algebrica di un autovalore é uguale a 1 allora il corrispondente autospazio ha dimensione 1 (perché?), cioè molteplicità algebrica e geometrica necessariamente coincidono. Quindi l'autospazio V_1 ha dimensione 1 e bisogna verificare se V_3 ha dimensione 2.

L'eliminazione di Gauss su

$$D - 3I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

fornisce

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

quindi i pivots sono 2 dunque l'immagine ha dimensione 2 e il nucleo ha dimensione 1. In particolare la molteplicità algebrica per l'autovalore 3 (cioè 2) differisce da quella geometrica (cioè 1). Dunque D non è diagonalizzabile.

Guardando la posizione dei pivots e riportandosi alla matrice di partenza $D - 3I$ otteniamo che una base per l'immagine é

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

mentre una base per il nucleo é

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

4. L'applicazione e' lineare. Per quanto riguarda il nucleo, $f(v) = 0$ si scrive

$$kv = -(v \cdot u)w$$

quindi se (i) $k = 0$ il nucleo è lo spazio vettoriale bidimensionale ortogonale a u. Se $k \neq 0$ allora l'equazione ci dice che v è proporzionale a w, $v = \beta w$. Sostituendo nella precedente $k = -(w \cdot u)$. Dunque se (ii) $k = -(w \cdot u)$ allora il nucleo è dato dalla retta generata da w altrimenti se (iii) $k \neq 0$ e $k \neq -(w \cdot u)$, il nucleo è dato dal solo vettore 0. Nel caso (i) l'immagine è la retta generata da w, nel caso (ii) è il piano perpendicolare a u, nel caso (iii) è tutto $\mathbb{R}^3$.

5. La più generale matrice che soddisfa l'equazione $A + A^T = kA_{31}I$ si scrive

$$\begin{pmatrix} \frac{k}{2}b & a & -b \\ -a & \frac{k}{2}b & c \\ b & -c & \frac{k}{2}b \end{pmatrix}$$

ne segue che lo spazio vettoriale delle matrici che soddisfano l'equazione ha dimensione 3 e una base è

$$\begin{pmatrix} \frac{k}{2} & 0 & -1 \\ 0 & \frac{k}{2} & 0 \\ 1 & 0 & \frac{k}{2} \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

La dimensione dello spazio vettoriale non dipende da k.