1. Calcolare

$$\frac{\sqrt{2}\, e^{-i\pi/4} + 2i}{\sqrt[3]{2}\,\sqrt[3]{-1+i}}$$

2. E' dato uno spazio vettoriale 3 dimensionale V, una base e_1, e_2, e_3 e una seconda base $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$ che si scrive rispetto alla prima

$$\bar{e}_1 = e_2 + e_3 \tag{1}$$
$$\bar{e}_2 = 2e_1 - e_2 + e_3 \tag{2}$$
$$\bar{e}_3 = e_1 + 2e_2 + e_3 \tag{3}$$

Date le componenti di un generico vettore $v = v_1 e_1 + v_2 e_2 + v_3 e_3$ determinare la matrice di trasformazione che manda il vettore colonna

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

nelle componenti

$$\begin{pmatrix} \bar{v}_1 \\ \bar{v}_2 \\ \bar{v}_3 \end{pmatrix}$$

dello stesso vettore rispetto alla nuova base. Nel caso specifico $v_1 = 1$, $v_2 = 2$, $v_3 = 1$ quali sono le componenti del vettore rispetto alla nuova base? Se non si conosce la risposta alle precedenti domande calcolare l'inversa della matrice

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

3. Usando l'eliminazione di Gauss discutere per quali valori di k e h il sistema $Bx = c$ con

$$B = \begin{pmatrix} 1 & k & 1 \\ -1 & 1 & k \\ 1 & 2k & 2 \end{pmatrix} \qquad c = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ h+1 \end{pmatrix}$$

ammette una, nessuna o infinite soluzioni. Calcolare il polinomio caratteristico della matrice

$$D = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

ottenuta dalla precedente ponendo $k = -1$. D è diagonalizzabile? Trovare una base del nucleo e una base dell'immagine di D intesa come applicazione lineare $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. (IL COMPITO PROSEGUE DALL'ALTRO LATO)

4. Sono dati due vettori $u, w \in \mathbb{R}^3$. L'applicazione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ che manda il generico vettore v in

$$f(v) = (u \cdot w)v - v \times (w \times u)$$

è lineare? (un argomento breve è sufficiente) Quali sono il nucleo e l'immagine dell'applicazione e che dimensione hanno? La risposta dipende dalla collinearità o ortogonalità dei vettori u e w?

5. Le matrici 3×3 simmetriche a traccia nulla formano uno spazio vettoriale? Perché? Di che dimensione? Dare una base.

1 Soluzioni

1. Il calcolo è

$$\frac{\sqrt{2}\,e^{-i\pi/4} + 2i}{\sqrt[3]{2}\,\sqrt[3]{-1+i}} = \frac{\sqrt{2}\,(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i) + 2i}{\sqrt[3]{2}\,\sqrt[3]{-1+i}} = \frac{1+i}{\sqrt[3]{2}\,\sqrt[3]{\sqrt{2}(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i)}}$$
$$= \frac{1+i}{\sqrt[3]{2}\,\sqrt[3]{\sqrt{2}(e^{i\frac{3}{4}\pi})}} = \frac{1+i}{\sqrt[3]{2}\,\sqrt[3]{\sqrt{2}}\,e^{i\pi/4}} = \frac{1+i}{\sqrt[3]{2}\,\sqrt[3]{\sqrt{2}}\,\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}\,\sqrt[3]{\sqrt{2}}\,\frac{1}{\sqrt{2}}}$$
$$= \frac{1}{2^{\frac{1}{3}+\frac{1}{6}-\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2^0} = 1$$

2. La matrice di trasformazione é $(A^{-1})^T$ dove

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Il calcolo fornisce

$$(A^{-1})^T = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -3 & -1 & -5 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

Le componenti del vettore v rispetto alla nuova base sono $\bar{v}_1 = 0$, $\bar{v}_2 = 0$, $\bar{v}_3 = 1$ come conferma anche il fatto che $v = e_1 + 2e_2 + e_3 = \bar{e}_3$.

3. L'eliminazione di Gauss riduce il sistema a $B'x = c'$ dove

$$B' = \begin{pmatrix} 1 & k & 1 \\ 0 & k+1 & k+1 \\ 0 & k & 1 \end{pmatrix} \qquad c' = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ h \end{pmatrix}$$

La matrice non e' ancora a scala. Eseguiamo sulla terza riga l'operazione

$$R_3 \to (k+1)R_3 - kR_2$$

che può essere fatta solo se $k \neq -1$ (il caso $k = -1$ lo consideriamo dopo) otteniamo $B''x = c''$ dove

$$B' = \begin{pmatrix} 1 & k & 1 \\ 0 & k+1 & k+1 \\ 0 & 0 & 1-k^2 \end{pmatrix} \qquad c' = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ (k+1)h - 2k \end{pmatrix}$$

A questo punto se k oltre a essere diverso da -1, é anche diverso da 1 allora il sistema ammette una sola soluzione. Se $k = 1$ si hanno due casi dipendendo da $(k+1)h - 2k = 2(h-1)$. Se $h = 1$ si hanno infinite soluzioni, se $h \neq 1$ non si hanno soluzioni. Infine, nel caso $k = -1$ il sistema non ha soluzioni come si vede dalla seconda Eq. che fornisce $0 = 2$.

Il calcolo del polinomio caratteristico di D risulta $p(\lambda) = -\lambda(\lambda^2 - 4\lambda + 1)$. Il discriminante del polinomio di secondo grado é $b^2 - 4ac = 12 > 0$ dunque ci sono tre autovalori distinti

$$\lambda_1 = 0, \tag{4}$$
$$\lambda_2 = 2 + \sqrt{3}, \tag{5}$$
$$\lambda_3 = 2 - \sqrt{3}. \tag{6}$$

Sappiamo che se la molteplicità algebrica di un autovalore é uguale a 1 allora il corrispondente autospazio ha dimensione 1 (perché?), cioè molteplicità algebrica e geometrica necessariamente coincidono. Poiché questo é vero per i tre autovalori ne segue la diagonalizzazione della matrice.

L'eliminazione di Gauss su D fornisce

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

quindi guardando la posizione dei pivots e riportandosi alla matrice di partenza D otteniamo che una base per l'immagine é

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

mentre una base per il nucleo é

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

4. L'applicazione e' lineare. Se u e w sono linearmente indipendenti l'immagine e' tutto $\mathbb{R}^3$ infatti il nucleo é il solo vettore nullo $K = \{0\}$. Per vederlo notiamo che imporre $f(v) = 0$ implica

$$(u \cdot w)v = v \times (w \times u)$$

ma il prodotto vettoriale tra v e un altro vettore non è mai proporzionale a v infatti è perpendicolare a v, dunque $v = 0$. Ne segue che se u e v sono linearmente indipendenti (o equivalentemente $w \times u \neq 0$) allora l'immagine è tutto $\mathbb{R}^3$. Se $w \times u = 0$ la funzione si riduce a

$$f(v) = (u \cdot w)v$$

e ancora $f(v) = 0$ implica $v = 0$ cioè siamo nel caso di prima a meno che uno dei vettori u, w non sia nullo nel qual caso il nucleo è tutto $\mathbb{R}^3$ e l'immagine è il solo 0.

5. La piú generica matrice simmetrica a traccia nulla si scrive

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & -a-d \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} + e \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

dunque la dimensione dello spazio vettoriale è 5, e le matrici riportate formano una base, in quanto è facile vedere che sono linearmente indipendenti.