1. Calcolare
$$\frac{\sqrt[4]{2}\,(e^{-i\pi/6}+i)}{\sqrt[3]{2}\,\sqrt[4]{-1+\sqrt{3}\,i}}$$

2. E' dato uno spazio vettoriale 3 dimensionale V, una base e_1, e_2, e_3 e una seconda base $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$ che si scrive rispetto alla prima
$$\bar{e}_1 = 2e_1 - e_2 + e_3 \quad (1)$$
$$\bar{e}_2 = e_2 + 2e_3 \quad (2)$$
$$\bar{e}_3 = e_1 + 2e_2 + e_3 \quad (3)$$
Date le componenti di un generico vettore $v = v_1e_1 + v_2e_2 + v_3e_3$ determinare la matrice di trasformazione che manda il vettore colonna
$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$
nelle componenti
$$\begin{pmatrix} \bar{v}_1 \\ \bar{v}_2 \\ \bar{v}_3 \end{pmatrix}$$
dello stesso vettore rispetto alla nuova base. Nel caso specifico $v_1 = 1$, $v_2 = -1$, $v_3 = 1$ quali sono le componenti del vettore rispetto alla nuova base?

3. Usando l'eliminazione di Gauss discutere per quali valori di k e h il sistema $Bx = c$ con
$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & k \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 3k \end{pmatrix} \qquad c = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ h \end{pmatrix}$$
ammette una, nessuna o infinite soluzioni. Calcolare il polinomio caratteristico della matrice
$$D = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$
ottenuta dalla precedente ponendo $k = 1$. D è diagonalizzabile? Trovare una base del nucleo e una base dell'immagine di D intesa come applicazione lineare $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.

4. Sono dati due vettori $u, w \in \mathbb{R}^3$. L'applicazione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ che manda il generico vettore v in
$$f(v) = (v \cdot u)w + (v \cdot w)u$$

è lineare? (un argomento breve è sufficiente) Quali sono il nucleo e l'immagine dell'applicazione e che dimensione hanno? La risposta dipende dalla collinearità o ortogonalità dei vettori u e w?

5. Le matrici 3×3 che soddisfano l'equazione $A + A^T = \frac{k}{3}(\mathrm{tr}A)I$, dove $\mathrm{tr}A$ è la traccia di A, I è la matrice identità e $k > 0$ è una costante, formano uno spazio vettoriale? Perché? Di che dimensione? Dare una base. Le risposte dipendono dal valore di k?

1 Soluzioni

1. Il calcolo è

$$\frac{\sqrt[4]{2}\,(e^{-i\pi/6}+i)}{\sqrt[3]{2}\,\sqrt[4]{-1+\sqrt{3}\,i}} = \frac{e^{-i\pi/6}+i}{\sqrt[3]{2}\,\sqrt[4]{-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\,i}}$$
$$= \frac{(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2})+i}{\sqrt[3]{2}\,\sqrt[4]{e^{i\frac{2}{3}\pi}}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}}{\sqrt[3]{2}\,e^{i\frac{1}{6}\pi}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$$

2. La matrice di trasformazione é $(A^{-1})^T$ dove

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Il calcolo fornisce

$$(A^{-1})^T = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -3 & -1 & 5 \\ 3 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

Le componenti del vettore v rispetto alla nuova base sono $\bar{v}_1 = 2/3$, $\bar{v}_2 = 1/3$, $\bar{v}_3 = -1/3$.

3. L'eliminazione di Gauss riduce il sistema a $B'x = c'$ dove

$$B' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & k \\ 0 & -2 & k+1 \\ 0 & 0 & 1-k \end{pmatrix} \qquad c' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1-h \end{pmatrix}$$

A questo punto se $k \neq 1$ c'è una e una sola soluzione, se $k = 1$ e $h = 1$ ci sono infinite soluzioni infine se $k = 1$ e $h \neq 1$ non ci sono soluzioni.

Il calcolo del polinomio caratteristico di D risulta $p(\lambda) = -\lambda(\lambda-4)(\lambda-1)$. Ci sono tre autovalori distinti: 0, 4 e 1.

Sappiamo che se la molteplicità algebrica di un autovalore é uguale a 1 allora il corrispondente autospazio ha dimensione 1 (perché?), cioè molteplicità algebrica e geometrica necessariamente coincidono. Poiché questo é vero per i tre autovalori ne segue che la matrice è diagonalizzabile.

L'eliminazione di Gauss su D fornisce

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

quindi guardando la posizione dei pivots e riportandosi alla matrice di partenza D otteniamo che una base per l'immagine é

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

mentre una base per il nucleo é

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

4. L'applicazione e' lineare. Per quanto riguarda il nucleo, se w e u sono linearmente indipendenti allora $f(v) = 0$ se e solo se $v \cdot u = 0$ e $v \cdot w = 0$, quindi il nucleo è lo spazio unidimensionale ortogonale a u e w cioè quello generato da $u \times v$. Se w e u sono linearmente dipendenti allora uno si può esprimere in funzione dell'altro, per esempio $u = \alpha w$, l'altro caso essendo analogo. In questo caso $f(v) = 2\alpha(v \cdot w)w$ e quindi se uno dei due si annulla allora il nucleo è tutto $\mathbb{R}^3$ in quanto $\alpha = 0$, altrimenti il nucleo è il piano ortogonale a w.

   Per quanto riguarda l'immagine, se u o w sono nulli l'immagine è il solo vettore nullo, se sono linearmente indipendenti è il piano generato da u e w, mentre se sono proporzionali e diversi da 0 allora è la retta generata da w.

5. Se prendiamo la traccia dell'equazione otteniamo

$$(k-2)\mathrm{tr}A = 0$$

   quindi se $k \neq 2$ la traccia è nulla e l'equatione di partenza si riduce a $A + A^T = 0$ cioè la matrice è una matrice antisimmetrica, una base è allora data da

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

   quindi lo spazio delle matrici ha dimensione 3. Se invece $k = 2$, introduciamo la matrice $B = A - \frac{(\mathrm{tr}A)}{3} I$ con la quale l'equazione di partenza si scrive $B + B^T = 0$ dunque B è antisimmetrica e A si scrive come una matrice antisimmetrica più una matrice proporzionale all'identità

$$\begin{pmatrix} a & b & -c \\ -b & a & d \\ c & -d & a \end{pmatrix}$$

dunque la dimensione dello spazio vettoriale è 4, e le matrici riportate sopra piú l'identità formano una base.