1. Calcolare
$$\frac{1}{2\sqrt[5]{\frac{-\sqrt{3}+i}{2}}+\sqrt{3}}$$

2. E' dato uno spazio vettoriale 3 dimensionale V, una base e_1, e_2, e_3 e una seconda base $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$ che si scrive rispetto alla prima
$$\bar{e}_1 = e_1 + 2e_2 + 2e_3 \tag{1}$$
$$\bar{e}_2 = e_1 - e_2 - 2e_3 \tag{2}$$
$$\bar{e}_3 = 2e_1 + e_2 - e_3 \tag{3}$$
Date le componenti di un generico vettore $v = v_1e_1 + v_2e_2 + v_3e_3$ determinare la matrice di trasformazione che manda il vettore colonna
$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$
nelle componenti
$$\begin{pmatrix} \bar{v}_1 \\ \bar{v}_2 \\ \bar{v}_3 \end{pmatrix}$$
dello stesso vettore rispetto alla nuova base. Nel caso specifico $v_1 = 1$, $v_2 = 1$, $v_3 = 1$ quali sono le componenti del vettore rispetto alla nuova base?

3. Usando l'eliminazione di Gauss discutere per quali valori di k e h il sistema $Bx = c$ con
$$B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & k \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad c = \begin{pmatrix} 0 \\ k \\ h \end{pmatrix}$$
ammette una, nessuna o infinite soluzioni. Calcolare il polinomio caratteristico della matrice
$$D = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
ottenuta dalla precedente ponendo $k = 1$. D è diagonalizzabile? Se si qual è la forma diagonale? Trovare una base del nucleo e una base dell'immagine di $D - I$ intesa come applicazione lineare $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.

4. Sono dati due vettori $u, w \in \mathbb{R}^3$ e una costance $k \in \mathbb{R}$. L'applicazione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ che manda il generico vettore v in
$$f(v) = (v \cdot u)w + v \times w$$

è lineare? (un argomento breve è sufficiente) Quali sono il nucleo e l'immagine dell'applicazione e che dimensione hanno? La risposta dipende dalla collinearità o ortogonalità dei vettori u e w?

5. Le matrici 3×3 che soddisfano l'equazione $A - 2A^T = k(\mathrm{tr}A)I$, dove $\mathrm{tr}A$ è la traccia di A, I è la matrice identità e $k \geq 0$ è una costante, formano uno spazio vettoriale? Perché? Di che dimensione? Dare una base. Le risposte dipendono dal valore di k?

1 Soluzioni

1. Il calcolo fornisce
$$\frac{2\sqrt{3} - i}{13}$$

2. La matrice di trasformazione é $(A^{-1})^T$ dove
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$
Il calcolo fornisce
$$(A^{-1})^T = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & -3 & 3 \\ 4 & -5 & 3 \\ -2 & 4 & -3 \end{pmatrix}$$
Le componenti del vettore v rispetto alla nuova base sono $\bar{v}_1 = 1$, $\bar{v}_2 = 2/3$, $\bar{v}_3 = -1/3$.

3. L'eliminazione di Gauss riduce il sistema a $B'x = c'$ dove
$$B' = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 3k-2 \\ 0 & 0 & 6-3k \end{pmatrix} \qquad c' = \begin{pmatrix} 0 \\ 3k \\ 3h-3k \end{pmatrix}$$
A questo punto se $k \neq 2$ c'è una e una sola soluzione, se $k = 2$ e $h = 2$ ci sono infinite soluzioni infine se $k = 2$ e $h \neq 2$ non ci sono soluzioni.

   Il calcolo del polinomio caratteristico di D risulta $p(\lambda) = -(\lambda - 2)(\lambda - 1)^2$. Ci sono due autovalori distinti: 2 e 1.

   Sappiamo che se la molteplicità algebrica di un autovalore é uguale a 1 allora il corrispondente autospazio ha dimensione 1 (perché?), cioè molteplicità algebrica e geometrica necessariamente coincidono. Quindi la moltelplicità algebrica e geometrica corrispondenti all'autovalore 2 coincidono. Per l'autovalore 1 dobbiamo trovare la dimensione del nucleo di
$$D - 1I = D - I = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

L'eliminazione di Gauss su $D - I$ fornisce

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

quindi il rango è 2 e dunque il nucleo ha dimensione 1 (molteplicitgèeometrica dell'autovalore 1). Poichè non coincide con la molteplicità algebrica D non è diagonalizzabile. Guardando la posizione dei pivots della riduzione a scala di $D - I$ e riportandosi alla matrice di partenza $D - I$ otteniamo che una base per l'immagine é

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

mentre una base per il nucleo é

$$\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

4. L'applicazione e' lineare. Per quanto riguarda il nucleo, è ovvio che se $w = 0$ il nucleo è tutto $\mathbb{R}^3$ e l'immagine è il solo vettore nullo. Sia dunque $w \neq 0$. Se $f(v) = (v \cdot u)w + v \times w = 0$ allora, poiché $v \times w$ è necessariamente ortogonale a w deve essere separatamente $v \cdot u = 0$ e $v \times w = 0$. La seconda ci dice che $v = \beta w$ per una certa costante β e inserita nella prima otteniamo $\beta w \cdot u = 0$. Dunque se $w \cdot u \neq 0$ il nucleo è costituito dal solo vettore nullo e l'immagine da tutto $\mathbb{R}^3$, se invece $w \cdot u = 0$ allora il nucleo è costituito dalla retta generata da w mentre l'immagine è il piano generato dal vettore u e dal vettore $(u \cdot u)w + u \times w$ anche se la dimostrazione viene qui omessa.

5. La dimostrazione che l'insieme delle matrici è uno spazio vettoriale è omessa. Se prendiamo la traccia dell'equazione otteniamo

$$(3k + 1)\mathrm{tr}A = 0$$

quindi se $k \neq -1/3$ la traccia è nulla e l'equazione di partenza può sostituirsi con $A - 2A^T = 0$ (che implica allo stesso modo una traccia nulla). Ora non è difficile verificare scrivendo l'equazione come un sistema nelle componenti della matrice, che tutti i coefficienti della matrice A sono nulli. Infatti ci sarà l'equazione $A_{21} - 2A_{12} = 0$ ma anche l'equazione $A_{12} - 2A_{21} = 0$ che forniscono $A_{12} = A_{21} = 0$. Quindi se $k \neq -1/3$ lo spazio vettoriale è banale essendo composto dalla sola matrice nulla. Nel caso $k = -1/3$, la traccia può essere non nulla ma si ha ancora che gli elementi fuori dalla diagonale di A sono nulli. Si ottengono le equazioni

$-A_{11} = -A_{22} = -A_{33} = -\frac{1}{3}\mathrm{tr}A$. Dunque chiamata $t = \mathrm{tr}A$ otteniamo che la matrice A ha la forma

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} t & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & t \end{pmatrix}$$

cioè lo spazio vettoriale coincide con la retta generata dalla matrice identità. L'identità fornisce una base e la dimensione è 1.