1. Calcolare
$$\sqrt{i\sqrt{3}\,e^{i\pi 7/3}+1}\;+\;\frac{2}{1+i\sqrt{3}}$$

2. Sia
$$A=\begin{pmatrix}0&1&2\\2&1&3\\1&1&1\end{pmatrix}\qquad b=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$$

   Invertire la matrice A usando l'eliminazione di Gauss, *e* il metodo dei complementi algebrici (riportare i calcoli in ordine).

   Mostrare come è possibile ottenere l'unica soluzione di $Ax=b$ usando l'inversa A^{-1}. Confermare il calcolo del vettore x usando direttamente il metodo di Cramer.

3. Usando l'eliminazione di Gauss discutere per quali valori di k e h il sistema $Bx=c$ con
$$B=\begin{pmatrix}1&1-k&-1\\-1&k-1&1\\1&1+k&k\end{pmatrix}\qquad c=\begin{pmatrix}h\\-h\\-2\end{pmatrix}$$
   ammette una, nessuna o infinite soluzioni. Calcolare il polinomio caratteristico della matrice
$$D=\begin{pmatrix}1&0&-1\\-1&0&1\\1&2&1\end{pmatrix}$$
   ottenuta dalla precedente ponendo $k=1$. D è diagonalizzabile? Trovare una base del nucleo e una base dell'immagine di D intesa come applicazione lineare $\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$.

4. Sono dati due vettori $u,w\in\mathbb{R}^3$. L'applicazione $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ che manda il generico vettore v in
$$f(v)=(v\cdot w)u-v\times(w\times u)$$
   è lineare? (un argomento breve è sufficiente) Quali sono il nucleo e l'immagine dell'applicazione e che dimensione hanno? La risposta dipende dalla collinearità o ortogonalità dei vettori u e w?

5. Le matrici 2×2 a traccia nulla formano uno spazio vettoriale? Argomentare. Se si' la seguente è una base?
$$E_1=\begin{pmatrix}1&0\\-1&-1\end{pmatrix}\qquad E_2=\begin{pmatrix}1&1\\-1&-1\end{pmatrix}\qquad E_3=\begin{pmatrix}-2&1\\-1&2\end{pmatrix}$$

1 Risposte (traccia)

1. Il calcolo dà il numero complesso 1.

2. L'inversa è

$$A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

   L'unica soluzione di $Ax = b$ si scrive $x = A^{-1}b$ e quindi

$$x = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

3. Poiché la riduzione a scala di $B(k)x = c$ fornisce

$$\begin{pmatrix} 1 & 1-k & -1 \\ 0 & 2k & k-1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h \\ -2-2h \\ 0 \end{pmatrix}$$

   la matrice a sinistra ha rango 2 per qualunque valore di k. Il sistema ha, per qualunque scelta di h e k, infinite soluzioni. Il polinomio caratteristico di D è $p(\lambda) = -\lambda^2(\lambda - 2)$. Gli autovalori sono 0 e 2 ma l'autospazio V_0 ovvero nucleo $K = V_0$ ha dimensione 1, in quanto la riduzione a scala di D fornisce, ponendo $k = 1$ nella riduzione fatta sopra

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   e il rango è 2, quindi la dimensione del nucleo è 3-2=1. Poiché la molteplicità geometrica dell'autovalore 0 è diversa da quella algebrica la matrice non è diagonalizzabile. Un base per l'immagine è

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

   Una base per il nucleo è

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

4. L'applicazione è lineare. L'applicazione si riscrive $f(v) = 2(v \cdot w)u - (v \cdot u)w$ da cui segue che l'immagine è $L(u, w)$ ed è 1-dimensionale se u e w sono collineari, altrimenti è bidimensionale. Il nucleo nel primo caso è dato dal piano ortogonale a w, nel secondo caso è dato dalla retta generata da $w \times u$.

5. Il prendere la traccia è una operazione lineare, da ciò segue che si tratta di uno spazio vettoriale. Il generico elemento si scrive

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

dove le matrici a secondo membro sono linearmente indipendenti. Lo spazio vettoriale ha dimensione 3. Possiamo prendere le componenti delle matrici date in questa base e usarle come righe (a, b, c) per una matrice 3×3

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

il fatto che questa matrice sia non singolare implica che le matrici E_i sono linearmente indipendenti e quindi formano una base.