

**Domande guida per il corso di algebra lineare e geometria (22
marzo 2007).**

Si può rispondere a ogni domanda con poche ma ben scelte parole. Il loro scopo è quello di aiutare lo studente a mettere in evidenza le parti del corso che sono rimaste oscure e che richiedono un ulteriore studio. E' sconsigliabile presentarsi all'orale senza conoscere la risposta a gran parte di queste domande.

1. Cosa è un vettore? Cosa è uno spazio vettoriale? Esempi?
2. Cosa è un sottospazio vettoriale?
3. Come si definisce l'indipendenza lineare? Cosa è una base? Qual è la base canonica di \mathbb{R}^n ?
4. Le basi hanno lo stesso numero di elementi? Cosa dice il teorema del completamento della base?
5. Che relazione c'è tra il generico spazio vettoriale di dimensione n e \mathbb{R}^n ?
6. Come controlleresti l'indipendenza lineare di m vettori di \mathbb{R}^n ?
7. Quali proprietà definiscono una relazione di equivalenza? Quali esempi abbiamo incontrato nel corso?
8. Cosa è una matrice? Lo spazio delle matrici $n \times m$ è vettoriale? Qual è una base?
9. Cosa è una applicazione lineare? In cosa differisce da una matrice? Che relazione c'è tra le due?
10. Cosa sono il nucleo e l'immagine? Sai dimostrare che sono spazi vettoriali? Quando è che una applicazione lineare è iniettiva?
11. In che modo sono legate le dimensioni di nucleo e immagine?
12. Cosa è un isomorfismo?
13. Cosa è il rango di una matrice? Come si lega ai pivots?
14. Come sono relazionate il cambiamento di una base con il cambiamento delle componenti di un vettore? Come cambia la matrice associata a una applicazione lineare $f : V \rightarrow V$ quando si cambia base in V ?
15. Cosa è un gruppo? Esempi?
16. In un gruppo cosa è l'elemento identità? E l'inverso? Sono unici? Esempi di gruppo?
17. Cosa è una permutazione? Quale è il suo segno?
18. Cosa è un campo? Esempi?

19. In quali casi ha senso parlare di lunghezza di un vettore?
20. Cosa è un prodotto scalare su uno spazio vettoriale? Cosa dice la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz?
21. Come si scrive il prodotto scalare usando l'angolo tra due vettori? Come si definisce, e in quali casi si può definire l'angolo tra due vettori?
22. Una base ortonormale esiste sempre? Se sì, sai dirmi come si costruisce?
23. Cosa è una matrice ortogonale? Esempi?
24. Come si scrive un sistema inomogeneo in termini di matrici e vettori? Come si scrive la più generale soluzione del sistema inomogeneo?
25. Come si definisce il determinante? Quali metodi di calcolo conosci? Quali proprietà ha per scambio di righe e colonne? Cosa succede se due righe o colonne sono uguali? Qual è il determinante del prodotto di due matrici? E il determinante di inversa o trasposta di una matrice?
26. Cosa è il prodotto vettoriale? In quali spazi vettoriali è definito? Come cambia se si scambiano i fattori?
27. Cosa è il prodotto misto? Che legame ha con il determinante? Quale interpretazione geometrica possiede?
28. Come si semplifica il doppio prodotto vettoriale.
29. Cosa è un complemento algebrico?
30. Come si calcola l'inversa di una matrice $n \times n$ con i complementi algebrici? Quando è che la matrice è invertibile?
31. Come si trova l'unica soluzione di un sistema con il metodo di Cramer?
32. Cosa è la classe di coniugazione di una matrice $n \times n$?
33. Cosa è il polinomio caratteristico di una applicazione lineare $f : V \rightarrow V$.
34. Cosa sono un autovettore, un autovalore e un autospazio?
35. Cosa sono la molteplicità algebrica e geometrica?
36. In quali casi una matrice $n \times n$ è diagonalizzabile? In quali casi una matrice simmetrica è diagonalizzabile?
37. Qual è l'equazione parametrica della retta? In che modo l'equazione del piano è legata al prodotto scalare? Se un piano è generato da due vettori come si determina la sua equazione?

Dimostrazioni da sapere

1. Le componenti di un vettore rispetto a una base sono uniche? Perché?

2. Dimostrare che se dei vettori sono linearmente dipendenti allora uno di essi puo' essere scritto come combinazione lineare degli altri.
3. Perche' un'applicazione lineare e' iniettiva se e solo se il suo nucleo e' il solo vettore 0?
4. Dimostrare che il nucleo di una applicazione lineare e' uno spazio vettoriale.
5. Dimostrare che l'immagine di una applicazione lineare e' uno spazio vettoriale.
6. Dimostrare che l'autospazio relativo all'autovalore λ di una applicazione $f : V \rightarrow V$ e' uno spazio vettoriale.
7. La relazione di coniugazione (similitudine) di due matrici e' di equivalenza? Dimostrare.
8. Perche' cerchiamo gli autovalori di una matrice nelle radici del suo polinomio caratteristico?
9. Perché la molteplicita' geometrica di un autovalore vale sempre almeno 1?