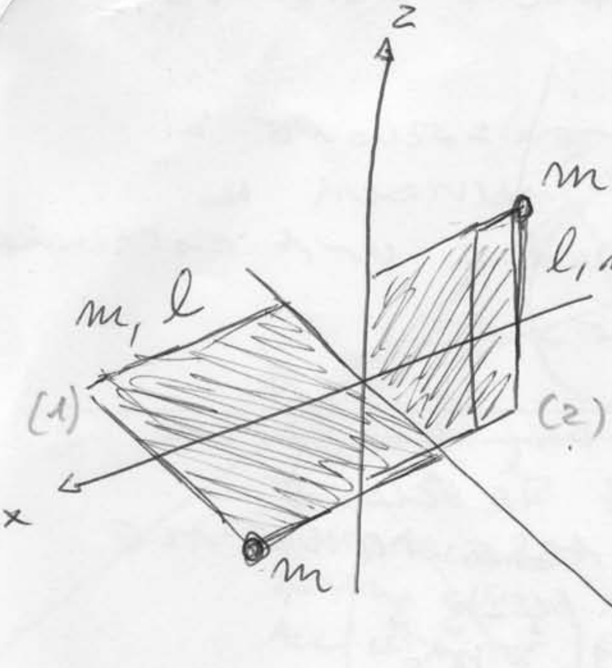
ESERCIZIO 1



1) CALCOLARE MATRICE D'INERZIA

2) DETERMINARE UNA SIMMETRIA E UN ASSE PRINCIPALE

3) TROVARE ASSI PRINCIPALI E MOMENTI PRINCIPALI D'INERZIA

4) SE $m = 1\,kg$, $l = 2\,cm$ E $\vec{\omega} = (\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k})\,s^{-1}$ QUANTO VALGONO $\vec{L}$ E T?

(1): $\begin{pmatrix} \frac{1}{12} & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 5/12 \end{pmatrix} m l^2$ | PUNTO MATERIALE $ml^2 \begin{pmatrix} 1/4 & -1/2 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5/4 \end{pmatrix}$

(1) + PUNTO MATERIALE: $\begin{pmatrix} 1/3 & -1/2 & 0 \\ -1/2 & 4/3 & 0 \\ 0 & 0 & 5/3 \end{pmatrix} m l^2$

(2): $\begin{pmatrix} 1/12 & 0 & 0 \\ 0 & 5/12 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix} m l^2$ | PUNTO MATERIALE $ml^2 \begin{pmatrix} 1/4 & 0 & 1/2 \\ 0 & 5/4 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(2) + PUNTO MATERIALE: $\begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 1/2 \\ 0 & 5/3 & 0 \\ 1/2 & 0 & 4/3 \end{pmatrix} m l^2$

$$I = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 3 & 0 \\ 1/2 & 0 & 3 \end{pmatrix} ml^2 = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 3 \\ -3 & 18 & 0 \\ 3 & 0 & 18 \end{pmatrix} \frac{ml^2}{6}$$

SE RIFLETTIAMO IL SISTEMA SUL PIANO X=0 E
POI SUL PIANO Z=Y MANDIAMO IL SISTEMA SUL

SISTEMA STESSO. DUNQUE L'INTERSEZIONE DI
QUESTI DUE PIANI ORTOGONALI INDIVIDUA IL
VETTORE $\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ RISPETTO AL QUALE UNA ROTAZIONE
DI π MANDA IL SISTEMA IN SE STESSO.

SE UNA ROTAZIONE DI π DELL'ELISSOIDE LO
LASCIA INVARIATO ALLORA LA DIREZIONE
INDIVIDUATA FORNISCE UN ASSE PRINCIPALE.

UN AUTOVALORE DI $\tilde{I} = \begin{pmatrix}4 & -3 & 3\\ -3 & 18 & 0\\ 3 & 0 & 18\end{pmatrix}$

È PERTANTO λ_1: $\begin{pmatrix}4 & -3 & 3\\ -3 & 18 & 0\\ 3 & 0 & 18\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$

QUINDI $\lambda_1 = 18$ (MOMENTO PRINCIPALE $\frac{ml^2}{6}\lambda_1$)

IL POLINOMIO CARATTERISTICO È

$$P(\lambda) = \det\begin{pmatrix}4-\lambda & -3 & 3\\ -3 & 18-\lambda & 0\\ 3 & 0 & 18-\lambda\end{pmatrix}$$

$$= (4-\lambda)(18-\lambda)^2 - 9(18-\lambda) - 9(18-\lambda)$$

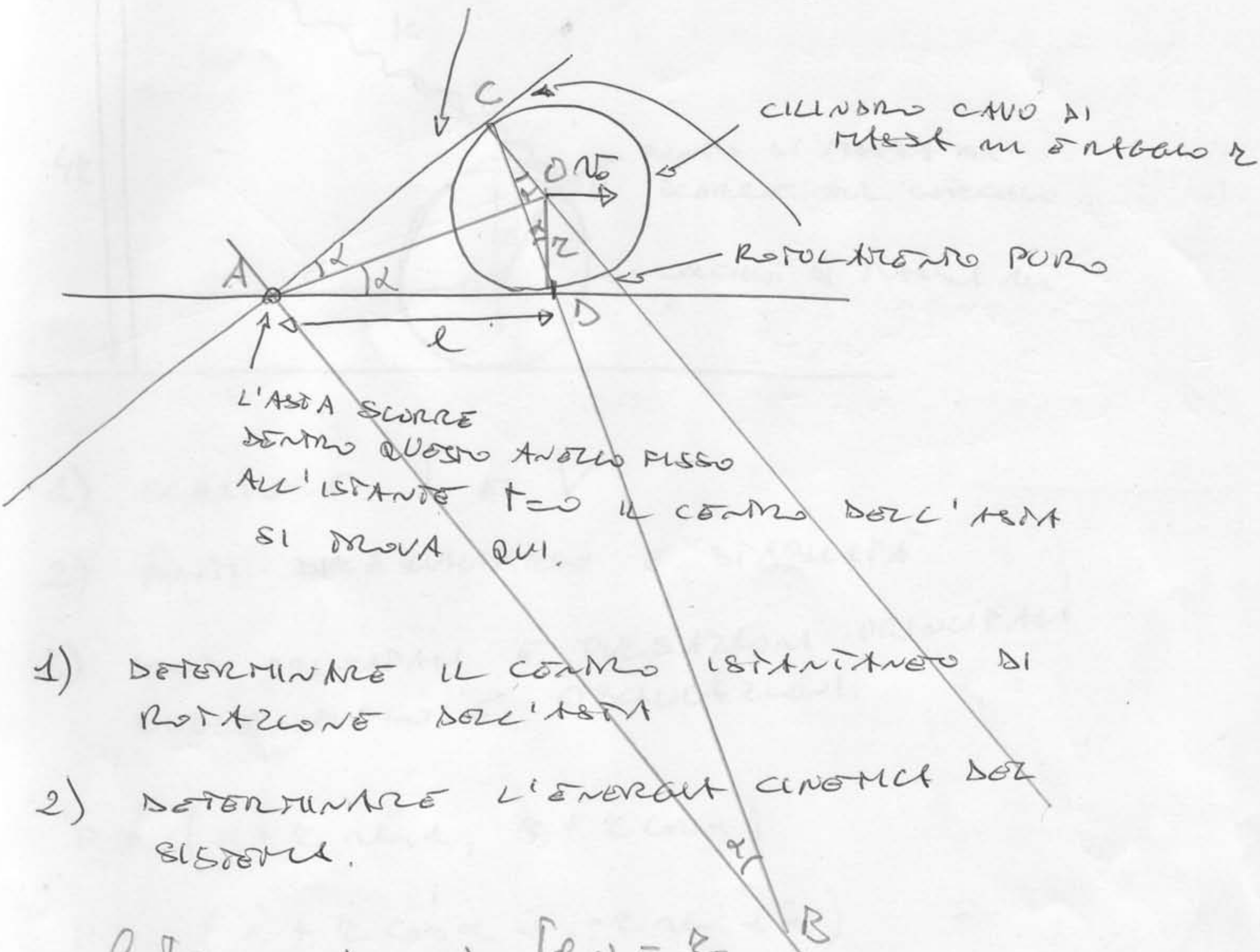
$$= (18-\lambda)\left\{(4-\lambda)(18-\lambda) - 18\right\}$$

$$= (18-\lambda)\left\{\lambda^2 - 22\lambda + 54\right\}$$

$$\Rightarrow \lambda_{2,3} = 11 \pm \sqrt{67}$$

ASSI PRINCIPALI: $\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}18-\lambda_2\\3\\-3\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}18-\lambda_3\\3\\-3\end{pmatrix}$ ...

ESERCIZIO 2



1) DETERMINARE IL CENTRO ISTANTANEO DI ROTAZIONE DELL'ASTA

2) DETERMINARE L'ENERGIA CINETICA DEL SISTEMA.

$$l \tan\alpha = r \Rightarrow \tan\alpha = \frac{r}{l}$$

$$AC = l$$

$$AB \tan\alpha = AC = l \Rightarrow AB \Rightarrow l^2/r$$

$$CB = \sqrt{AC^2 + AB^2} = \sqrt{l^2 + l^4/r^2} = l\sqrt{1 + l^2/r^2}$$

$$CD = 2r\cos\alpha = 2r\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}} = \frac{2r}{\sqrt{1+r^2/l^2}} = \frac{2l}{\sqrt{1+\left(\frac{l}{r}\right)^2}}$$

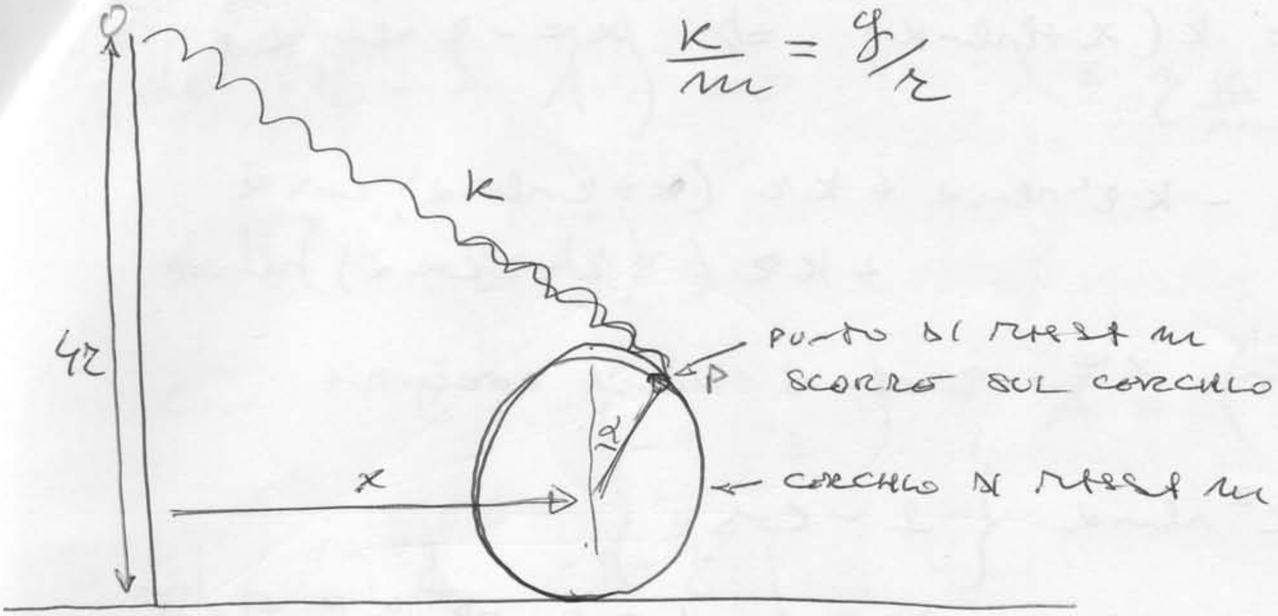
$$v_C = \frac{v_0}{r} CD$$

$$= \omega_{ASTA}\, CB \Rightarrow \omega_{ASTA} = \frac{CD}{CB}\frac{v_0}{r} = \frac{2}{1+\left(\frac{l}{r}\right)^2}\frac{v_0}{r}$$

$$T = \frac{1}{2}\left(2mr^2\right)\left(\frac{v_0}{r}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{12}m(4l)^2 + m\left(\frac{l^2}{r}\right)^2\right)\left[\frac{2}{1+\left(\frac{l}{r}\right)^2}\frac{v_0}{r}\right]^2$$

ESERCIZIO 3

$$\frac{k}{m} = g/r$$



1) SCRIVERE T E V

2) PUNTI DI EQUILIBRIO E STABILITÀ

3) MODI PRINCIPALI E PULSAZIONI PRINCIPALI DELLE PICCOLE OSCILLAZIONI.

$$P = \left(x + r\sin\alpha,\ r + r\cos\alpha\right)$$

$$\dot{P} = \left(\dot{x} + r\cos\alpha\,\dot{\alpha},\ -r\sin\alpha\,\dot{\alpha}\right)$$

$$v_P^{\,2} = \left(\dot{x} + r\cos\alpha\,\dot{\alpha}\right)^2 + \left(r\sin\alpha\,\dot{\alpha}\right)^2 =$$

$$= \dot{x}^2 + r^2\dot{\alpha}^2 + 2r\cos\alpha\,\dot{x}\dot{\alpha}$$

$$T = \frac{1}{2}\left(2mr^2\right)\left(\frac{\dot{x}}{r}\right)^2 + \frac{1}{2}m\left\{\dot{x}^2 + r^2\dot{\alpha}^2 + 2r\cos\alpha\,\dot{x}\dot{\alpha}\right\}$$

$$= \frac{1}{2}m\left\{3\dot{x}^2 + r^2\dot{\alpha}^2 + 2r\cos\alpha\,\dot{x}\dot{\alpha}\right\}$$

$$|P-O|^2 = \left(x + r\sin\alpha\right)^2 + \left(3r - r\cos\alpha\right)^2$$

$$V = \underbrace{mg}_{kr}\,r\cos\alpha + \frac{1}{2}\left\{\left(x + r\sin\alpha\right)^2 + \left(3r - r\cos\alpha\right)^2\right\}$$

$$0=\frac{\partial V}{\partial x} = k(x+r\,\mathrm{sen}\,\alpha) \Rightarrow x=-r\,\mathrm{sen}\,\alpha$$

$$0=\frac{\partial V}{\partial \alpha} = -kr^2\,\mathrm{sen}\,\alpha + kr\,(x+r\,\mathrm{sen}\,\alpha)\cos\alpha$$
$$+ kr\,(3r-r\cos\alpha)\,\mathrm{sen}\,\alpha$$

SOSTITUISCO $x=-r\,\mathrm{sen}\,\alpha$ NELLA SECONDA

$$kr^2\,\mathrm{sen}\,\alpha\,\left\{2-\cos\alpha\right\}=0$$

MA $2-\cos\alpha>0 \Rightarrow \mathrm{sen}\,\alpha=0 \Rightarrow \alpha=0,\pi$
E $x=0$

$x=0,\ \alpha=0$

$$B=\begin{pmatrix} k & kr \\ kr & 2kr^2 \end{pmatrix}$$

OSSERVO $B_{11}>0$
$\det B = k^2r^2>0$
QUINDI STABILE

$x=0,\ \alpha=\pi$

$$B=\begin{pmatrix} k & -kr \\ -kr & -2kr^2 \end{pmatrix}$$

$B_{11}>0$
$\det B=-3k^2r^2<0$
INSTABILE

PICCOLE OSCILLAZIONI

$$A=m\begin{pmatrix} 3 & r \\ r & r^2 \end{pmatrix}$$

RIDEFINISCO $y=r\theta$

$$\hat{B}=k\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix},\quad \hat{A}=m\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det\left(\hat{B} - \lambda \hat{A}\right) = 0 \qquad \lambda = \eta \frac{k}{m}$$

$$\det\left(\tilde{B} - \eta \tilde{A}\right) = 0$$

con $$\tilde{B} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \tilde{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det\begin{pmatrix} 1-3\eta & -1-\eta \\ -1-\eta & 2-\eta \end{pmatrix} = 0$$

$$(1-3\eta)(2-\eta) - (1+\eta)^2 = 0$$

$$3\eta^2 - 7\eta + 2 - \eta^2 - 2\eta - 1 = 0$$

$$\eta^2 - 9\eta + 1 = 0 \Rightarrow \eta_{1,2} = \frac{9 \pm \sqrt{81-4}}{2} = \frac{9 \pm \sqrt{77}}{2}$$

MODI:

$$\begin{pmatrix} 2-\eta_1 \\ 1+\eta_1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2-\eta_2 \\ 1+\eta_2 \end{pmatrix}$$

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}\eta_1} \qquad \omega_2 = \sqrt{\frac{k}{m}\eta_2}$$