UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PISA
FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE, NATURALI
CORSO DI LAUREA IN FISICA

TESI DI LAUREA

Modelli Matriciali in 2D-Gravity

Candidato:
Ettore Minguzzi

Relatore:
Chiar.mo Prof. Pietro Menotti

Anno Accademico 1998/99

Prefazione

Lo scopo di questo lavoro è presentare in maniera rigorosa i fondamenti matematici di tutte quelle teorie fisiche che fanno uso dei modelli matriciali, in particolare la 2D-Gravity. Assieme alla presentazione di alcuni risultati classici di contenuto sia matematico che fisico, come il modello di Ising in un reticolo bidimensionale casuale, trovano infine una esplicita esposizione e dimostrazione anche temi più basilari come la formula per lo sviluppo topologico, o risultati curiosi come il legame di un particolare modello matriciale con il problema dei quattro colori. Il lavoro si suddivide come segue:

Nel primo capitolo rivediamo brevemente alcuni concetti della teoria dei grafi e svolgiamo alcuni integrali che ci saranno utili nelle discussioni che seguiranno.

Nel secondo capitolo ci occupiamo del calcolo perturbativo della funzione di partizione; tale funzione viene espressa come somma su un insieme di grafi definiti dalla forma dell'interazione e dalle variabili di integrazione coinvolte. Affrontiamo e risolviamo il caso in cui la variabile è scalare e il caso in cui è una matrice hermitiana, simmetrica o antisimmetrica. Come corollario ne deriviamo una interessante formula che lega il gruppo di automorfismi di un grafo con i gruppi di automorfismi dei grafi che si ottengono dal primo "sdoppiandolo", cioè dando spessore a lati e vertici. Parte dei contenuti di questo capitolo sono originali.

Nel terzo capitolo mostriamo che la 2D-Gravity può essere riformulata in termini di modelli matriciali. Il ruolo di questi ultimi è soltanto quello di generare somme di grafi ai cui duali facciamo corrispondere particolari triangolazioni dello spazio-tempo. In questo modo possiamo semplificare il calcolo della funzione di partizione della 2D-Gravity; si tratta ovviamente di un approccio discreto al problema.

Nel quarto capitolo discutiamo nuove soluzioni al problema della 1 e 2-irriducibilità, in particolare dimostriamo come ottenere, per grandi ordini delle matrici, la generazione di soli grafi 1-irriducibili mediante l'integrazione sulle matrici hermitiane a traccia nulla, evitando così il calcolo della trasformata di Legendre. Seguendo questa linea di ragionamento e modificando anche la parte libera, investighiamo un plausibile metodo per raggiungere la 2-irriducibilità. Sviluppiamo infine un modello automaticamente 1-irriducibile, esso genera tutti i grafi planari proprio grazie alla validità del teorema dei quattro colori. I contenuti di questo capitolo sono originali.

Nel quinto capitolo ci occupiamo del calcolo esatto della funzione di partizione usando tecniche non perturbative, in particolare presentiamo il metodo dei polinomi ortogonali il cui utilizzo consente di calcolare alcuni indici critici in 2D-Gravity. Noi estendiamo questo metodo, sviluppato in letteratura solo per i vertici quartici, a vertici qualunque e portiamo in fondo i calcoli nel caso cubico e quartico.

Nel sesto capitolo veniamo ad una applicazione classica del metodo dei polinomi ortogonali nel modello di Ising per un reticolo planare, bidimensionale, casuale; esso rappresenta l'accoppiamento della gravità con un sistema di spin.

Vorrei cogliere l'occasione per ringraziare tutti i professori che mi hanno seguito, con grande disponibilità, nel corso degli studi. Un ringraziamento particolare va ai prof. Luciano Bracci, Antonio Marino e Pietro Menotti.

Vorrei ringraziare anche il prof. Riccardo Benedetti che, con grande cortesia, ha messo a mia disposizione alcuni appunti sui grafi di nastri.

Infine è incalcolabile il debito nei confronti dei miei amici, Carlo Menchini, Enrico Prati e Sabrina Rossi con i quali ho condiviso lo studio e la passione per la fisica.

Indice

Elenco delle figure

Capitolo 1

Introduzione

1.1 Grafi: definizioni

Un aspetto piacevole dei modelli matriciali è la relativa semplicità della matematica coinvolta rispetto alla ricchezza delle conseguenze. Poiché tuttavia la mancanza di chiare definizioni può creare confusione, ne rivediamo qui alcune delle più importanti.

Se S è un insieme indichiamo con $|S|$ il numero di elementi dell'insieme. Se S e T sono insiemi, $S \times T$ è il prodotto cartesiano dei due insiemi, cioè l'insieme delle coppie ordinate (s,t), con $s \in S$ e $t \in T$. Inoltre $(s,t) = (s',t')$ se e solo se, $s = s'$ e $t = t'$. Se S è un insieme definiamo $S\&S$ il prodotto non ordinato di S su se stesso. Ogni suo elemento sarà indicato con $[s,s']$. Ogni coppia non ordinata è una classe di equivalenza di $S \times S$ sotto la relazione di equivalenza $(s,s') \sim (s',s)$.

Un grafo $\mathcal{G}$ è una terna (V,E,Φ), dove $0 < |V| < +\infty$ è l'ordine del grafo, e $\Phi : E \to V\&V$ è una funzione. Gli elementi di V si chiamano anche *vertici*, e quelli di E *lati*; Φ è la funzione di incidenza. Se $\Phi(e) = [u,v]$, u e v si dicono adiacenti tra loro e estremi di e. Indicheremo anche con [1] $V(\mathcal{G})$ e $I(\mathcal{G})$ il numero di vertici e lati di un grafo $\mathcal{G}$. Se due lati e ed e' hanno gli stessi estremi allora si dicono anche *lati paralleli*.

Un lato con un solo vertice per estremità si chiama *loop*. Si noti che questa è la notazione usata dai matematici, i fisici in genere usano la parola *loop* per indicare il numero di tagli necessari a rendere ogni componente connessa del grafo un albero; noi, poichè ci occuperemo prevalentemente di grafi immersi in superfici, seguendo la convenzione matematica, parleremo di *facce* (che sempre nella letteratura matematica, in relazione ai grafi di nastri,

[1] A volte $V(\mathcal{G})$ indicherà anche l'insieme dei vertici che caratterizza il grafo, quale sia la giusta interpretazione del caso sarà chiaro dal contesto.

sono anche dette *componenti di bordo*). Un grafo si dice *semplice* se non ha loops o lati paralleli.

La *valenza* di un vertice u di un grafo $\mathcal{G}$ è il numero di lati incidenti in u, dove i loop vanno contati doppi. Se tutti i vertici di un grafico hanno valenza tre il grafo si dirà anche *cubico*, o trivalente, mentre se tutti i vertici hanno valenza quattro si dirà anche *quartico*, o tetravalente.

Chiamiamo molteplicità di $a \in E$ in $v \in V$:

$$\begin{array}{ll} m(a,v) = 0 & \text{se } v \text{ non è estremo di } a \\ m(a,v) = 1 & \text{se } \Phi(a) = [v,w] \text{ e } w \neq v \\ m(a,v) = 2 & \text{se } \Phi(a) = [v,v] \end{array}$$

Con questa definizione la valenza di v si riscrive:

$$\mathrm{val}(v) = \sum_{a \in E} m(a,v)$$

Un *sottografo* $\mathcal{G}_2$ di $\mathcal{G}$ è costituito da due sottoinsiemi V_2, E_2, rispettivamente di V e E per i quali $\Phi(E_2) \subset V_2 \& V_2$ e la funzione di incidenza è Φ ristretta in E_2.

Un insieme di n lati $e_1, e_2, \ldots, e_n$ in un grafo $\mathcal{G}$ si chiama *cammino* se esiste un'opportuna sequenza di $n+1$, non necessariamente distinti, vertici $v_0, v_1, \ldots, v_n$ tali che e_i incide con $[v_{i-1}, v_i]$. Se i vertici del cammino sono tutti distinti si parla di *catena*. Una catena chiusa è detta *circuito*.

Gran parte del nostro studio seguente riguarderà la connessione dei grafi. Un grafo si dice *connesso* se per ogni coppia di vertici esiste un cammino di cui sono gli estremi. Una *componente connessa* del grafo è un un sottografo connesso massimale, cioè non contenuto in un sottografo connesso più grande. Ogni grafo è, in modo unico, l'unione di componenti connesse. Un *ponte* è un lato di una componente connessa del grafo la cui rimozione causa la sconnessione di tale componente. Coerentemente con la notazione dei fisici, diremo un grafo $\mathcal{G}$ *1-irriducibile* se ogni sua componente connessa è priva di ponti. Lo diremo *2-irriducibile* se la rimozione di due opportuni lati in una componente connessa ne causa la sconnessione, e così di seguito.

Un *albero* è un grafo connesso senza circuiti.

Un grafo si dirà *planare* qualora possa essere immerso nel piano senza che due lati si intersechino, questa immersione suddivide il piano in tante *regioni* a formare una *mappa*, il grafo viene detto allora grafo sottostante la mappa M e indicato con $U(M)$. Il lettore può convincersi che c'è, in generale, più di un modo di immergere un grafo planare nel piano a formare mappe differenti (ad esempio si può spostare un loop dentro o fuori una regione in modo tale da ottenere una mappa con o senza una regione con un dato numero di lati).

Per questo motivo qualora non si immergano i grafi su superfici è ambiguo parlare di facce di un grafo, in tal caso si può solo definire il numero di tagli necessari ad ottenere un albero (numero di loops per i fisici).

Siano $\mathcal{G} = (V, E, \Phi)$ e $\mathcal{G}' = (V', E', \Phi')$ due grafi, un *isomorfismo* $\Psi : \mathcal{G} \to \mathcal{G}'$ è una coppia di funzioni biunivoche $\rho : V \to V'$ e $\sigma : E \to E'$ tale che se $\Phi(e) = [u, v]$ allora $[\rho(u), \rho(v)] = \Phi(\sigma(e))$, ovvero gli estremi dell'immagine del lato sono l'immagine degli estremi del lato. Si può pensare ad un movimento rigido di un grafo nell'altro, dove con rigidità intendiamo un movimento continuo che lascia i lati uniti gli uni con gli altri nei relativi vertici, ma per cui i lati sono pensati come invisibili, cioè in grado di attraversarsi reciprocamente. L'ultima condizione imposta nella definizione determina allora questo tipo di movimento rigido.

Un *automorfismo* è l'isomorfismo di un grafo con se stesso; una osservazione importante, utile anche nel seguito, consiste nel notare che la rotazione di un loop su se stesso di mezzo giro fino a tornare alla posizione di partenza non costituisce un automorfismo differente da quello identità, infatti tutti i lati e tutti i vertici vanno comunque in se stessi, proprio come nell'automorfismo identità.

Il lettore potrà trovare nella seconda colonna della figura 2.7 numerosi esempi di grafi connessi.

In figura 1.1, 1.2, 1.3, sono rappresentate alcune strutture spesso presenti all'interno dei grafi e di particolare interesse fisico. In base alle definizioni date in questo paragrafo riconosciamo nelle figure 1.1, 1.2, esempi di loops, mentre nella figura 1.3 un esempio di lati paralleli.

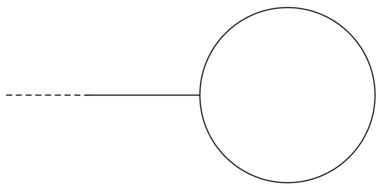


Figura 1.1: Tadpole.

1.2 Grafi di nastri

I contenuti di questo paragrafo [2] non sono strettamente indispensabili per il resto del lavoro, il loro scopo è la formalizzazione di alcuni concetti utili come

[2] Questo paragrafo si basa su alcune note del professor R. Benedetti.

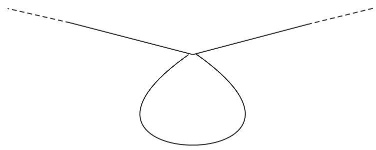


Figura 1.2: Seagull

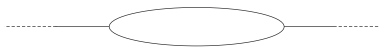


Figura 1.3: Self-Energy.

quelli di grafi di nastri e grafi di nastri orientabili. Nel seguito non saremo così formali, il lettore interessato a questo tipo di impostazione potrà riferirsi a questo paragrafo per trascrivere i risultati seguenti. Consiglio pertanto di saltarlo tornandovi solo più tardi dopo aver letto il secondo capitolo.

Introduciamo la prima suddivisione di $\mathcal{G}$, $\mathcal{G}^1$.

Def. (Prima suddivisione $\mathcal{G}^1$). *$\mathcal{G}^1$ è il grafo tale che*

$$
\begin{array}{rcl}
V(\mathcal{G}^1) & = & V(\mathcal{G}) \bigcup E(\mathcal{G}) \\
E(\mathcal{G}^1) & = & \big\{\{v,a,k\} : v \in V(\mathcal{G}), \quad a \in E(\mathcal{G}), k \textit{ intero in } [1, m(a,v)],\ m(a,v) > 0\big\} \\
\Phi_{\mathcal{G}^1} & : & E(\mathcal{G}^1) \to V(\mathcal{G}^1)\,\&\,V(\mathcal{G}^1) \\
 & & \{v,a,k\} \to [v,a]
\end{array}
$$

In pratica si tratta di aggiungere al grafo $\mathcal{G}$ un vertice per ogni lato, come illustrato nella figura 1.4. Il concetto di prima suddivisione consente di

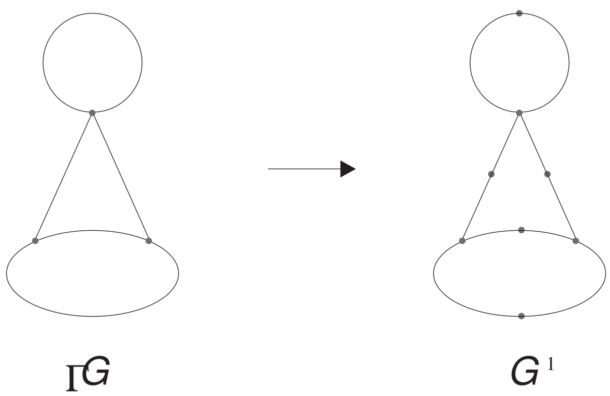


Figura 1.4: La prima suddivisione.

dare forma matematica a quelle che nel seguito chiameremo [3] *proiezioni*, cioè alle estremità dei lati che incidono sui vertici; ciò si realizza con la seguente definizione. La stella di v, con $v \in E(\mathcal{G}) \subset E(\mathcal{G}^1)$, è:

$$\mathrm{st}(v) = \{b \in E(\mathcal{G}^1) :\ v \text{ è estremo di } b\}$$

Vale $\#\mathrm{st}(v) = \mathrm{val}(v)$. Chiameremo gli elementi di $\mathrm{st}(v)$ anche *campi* o *proiezioni* di v, questi concetti verranno richiamati anche nel seguito senza far ricorso alla prima suddivisione; il lettore in queste pagine ha visto allora come il concetto di proiezione possa essere formalizzato.

Grafi orientati. Un grafo di nastri orientato è una coppia $(\mathcal{G}, \{\theta\})$ dove θ specifica un *ordinamento ciclico* per ogni stella $\mathrm{st}(v)$, $\quad v \in V(\mathcal{G})$. Un ordinamento ciclico è semplicemente una corrispondenza biunivoca delle proiezioni della stella con i numeri 1,2,..., $\mathrm{val}(v)$ a meno di permutazioni cicliche. Questa definizione consente di introdurre il concetto di proiezione precedente o successiva. Per $\mathcal{G}$ fissato vi sono $\prod_i (i-1)!^{V_i}$ ordinamenti ciclici possibili dove V_i è il numero di vertici con valenza i. Supponiamo che il vertice u di $\mathcal{G}$ abbia un loop e supponiamo di aver ordinato ciclicamente il vertice (cioè la stella), la stella avrà due lati associati al loop, supponiamo di scambiare le posizioni di questi due lati all'interno dell'ordinamento ciclico, otteniamo così un nuovo ordinamento ciclico θ' che diremo equivalente al primo. Diremo due ordinamenti ciclici equivalenti se possono ottenersi l'un l'altro attraverso ripetute modificazioni dell'ordinamento ciclico secondo le regole mostrate. Indicheremo con $\{\theta\}$ le relative classi di equivalenza; per $\mathcal{G}$ fissato vi sono $\prod_i (i-1)!^{V_i}/2^{l\mathcal{G})}$ classi di equivalenza, dove $l(\mathcal{G})$ è il numero di loop del grafo. Continueremo a chiamare le classi di equivalenza di ordinamenti ciclici semplicemente, *ordinamenti ciclici*. Il ricorso alle classi di equivalenza servirà a semplificare le proprietà degli isomorfismi. $\mathcal{G}$ verrà anche detto *scheletro* del grafo di nastri orientato $(\mathcal{G}, \theta)$. Nella figura 1.5 mostriamo in che modo un grafo così definito sia equivalente ai grafi che emergono dallo sviluppo delle funzioni generatrici nel caso hermitiano.

Se $\Phi : \mathcal{G}_1 \to \mathcal{G}_2$ è un isomorfismo esso induce, in modo non univoco, $2^l(\mathcal{G})$ isomorfismi $\Phi^1 : \mathcal{G}_1^1 \to \mathcal{G}_2^1$ tra le prime suddivisioni; la non univocità deriva da come decidiamo di ribaltare i loop nell'isomorfismo. Ogni isomorfismo tra prime suddivisioni consente di trasferire l'ordinamento ciclico di un vertice in $\mathcal{G}_1$ in un ordinamento ciclico del vertice immagine in $\mathcal{G}_2$. L'ordinamento immagine dipende dall'isomorfismo tra prime suddivisioni scelto; tuttavia è facile rendersi conto che se al posto degli ordinamenti ciclici θ si considerano

[3]Mi scuso se a volte le notazioni usate non coincidono esattamente con quelle di uso più comune, se ciò accade significa che non vi è nella letteratura un chiaro accordo su come chiamare o definire certi oggetti.

le classi di equivalenza $\{\theta\}$, l'isomorfismo Φ consente di definirne in modo univoco l'immagine $\Phi(\{\theta\})$ che sarà a sua volta una classe di equivalenza di ordinamenti ciclici secondo la relazione di equivalenza citata.

Diremo due grafi di nastri orientati $(\mathcal{G}_1, \{\theta_1\})$, $(\mathcal{G}_2, \{\theta_2\})$ isomorfi se esiste un isomorfismo $\Phi : \mathcal{G}_1 \to \mathcal{G}_2$ e $\Phi(\{\theta_1\}) = \{\theta_2\}$.

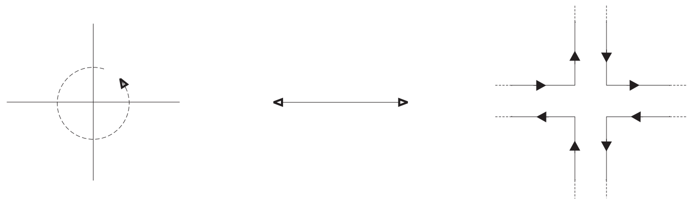


Figura 1.5: Corrispondenza tra vertici ordinati ciclicamente e vertici di grafi di nastri orientati.

Grafi non orientati. Un grafo di nastri non orientato aggiunge complicazioni alla definizione del caso orientato. Si considerino le terne $T = (\mathcal{G}, \{\theta\}, \gamma)$ dove $\{\theta\}$ è un ordinamento ciclico dei vertici, e γ una funzione che associa ad ogni lato del grafo uno dei due possibili numeri, 0 o 1. Nell'insieme delle terne siffatte introduciamo una relazione di equivalenza: se esiste un vertice in T_1 tale che invertendo la ciclicità del vertice, (cioè assegnando ora il numero $\alpha = \mathrm{val}(v) + 1 - \beta$, alla proiezione che prima aveva il numero β) e cambiando il valore di γ sui lati su esso incidenti (da 0 a 1, e da 1 a 0 per tutti i lati incidenti eccetto che per i loop) T_1 risulta uguale a T_2, allora T_1 e T_2 sono equivalenti. Le classi di equivalenza delle terne sotto questa relazione di equivalenza sono i grafi di nastri non orientati. Il lettore potrà trovare nel paragrafo 2.2.4 alcune figure illuminanti sul significato di queste definizioni.

Diremo due grafi non orientati $G_1 = \{(\mathcal{G}_1, \{\theta_1\}, \gamma_1)\}$, $G_2 = \{(\mathcal{G}_2, \{\theta_2\}, \gamma_2)\}$ isomorfi se all'interno delle relative classi di equivalenza esistono due terne $(\mathcal{G}_1, \{\theta_1\}, \gamma_1)$, $(\mathcal{G}_2, \{\theta_2\}, \gamma_2)$, tali che i grafi orientati $(\mathcal{G}_1, \{\theta_1\})$ e $(\mathcal{G}_2, \{\theta_2\})$ sono isomorfi e l'isomorfismo conserva il "colore dei lati" definito dalle funzioni γ.

1.3 Calcolo di vari integrali matriciali

1.3.1 Integrale gaussiano in n variabili reali.

Se Q è una matrice reale, simmetrica, definita positiva, allora è possibile dimostrare, prima cambiando variabili per diagonalizzarla, quindi integrando e tornando alle variabili di partenza, che:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}v_1\, \mathrm{d}v_2 \ldots \mathrm{d}v_n\, \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}v^T Q\, v + b^T v} = \frac{(2\pi)^{n/2}}{\sqrt{\det Q}}\, \mathrm{e}^{\frac{1}{2}b^T Q^{-1} b}$$

dove b e v sono vettori. Si può svolgere la dimostrazione con b complesso e Q reale, e poi notare che anche Q può essere complessa, basta prolungare analiticamente ambo i membri in tutta la regione di convergenza, tenendo conto che la radice a secondo membro è il ramo con $\sqrt{1} = 1$. Nel seguito ci occuperemo di integrali su spazi di matrici.

1.3.2 Integrali matriciali: matrice hermitiana.

Indichiamo con A la generica matrice hermitiana di ordine N, essa dipende dalle N^2 variabili reali: $Re(A_{ij})$, $Im(A_{ij})$ per $i < j$ e A_{ii} per ogni i.

La misura. Nello spazio vettoriale delle matrici hermitiane introduciamo una metrica attraverso la seguente definizione di prodotto scalare: $(A, B) = \mathrm{tr}(AB^\dagger)$. L'intervallo infinitesimo assume la forma:

$$\mathrm{d}s^2 = (\mathrm{d}A, \mathrm{d}A) = 2\sum_{i<j}\{(\mathrm{Re}\,\mathrm{d}A_{ij})^2 + (\mathrm{Im}\,\mathrm{d}A_{ij})^2\} + \sum_i \mathrm{d}A_{ii}^2$$

Da ogni metrica $g_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu \mathrm{d}x^\nu$ è possibile derivare la misura $\sqrt{|\det g|}\,\prod_i \mathrm{d}x_i$ che conserva le eventuali proprietà di invarianza della metrica, dipendendo solo da essa. Nel nostro caso particolare, poichè la forma quadratica non dipende dal punto, il determinante è una costante e noi possiamo definire come misura invariante sotto trasformazioni unitarie($A \to UAU^\dagger$):

$$\mathrm{d}A_H = \prod_{i<j} \mathrm{Re}\,\mathrm{d}A_{ij}\, \mathrm{Im}\,\mathrm{d}A_{ij} \prod_i \mathrm{d}A_{ii}$$

dove la lettera H indica che si riferisce alle matrici hermitiane.

L'integrale gaussiano. Vogliamo calcolare l'integrale:

$$I_H = \int \mathrm{d}A_H\, \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\mathrm{tr}(A^2) + \mathrm{tr}(AJ)}$$

con J matrice qualunque sul campo complesso. Notiamo che:

$$\mathrm{tr}A^2 = 2\sum_{i<j}\{(\mathrm{Re}A_{ij})^2 + (\mathrm{Im}A_{ij})^2\} + \sum_i A_{ii}^2$$

$$\mathrm{tr}(AJ) = \sum_{i<j}\mathrm{Re}A_{ij}(J_{ji}+J_{ij}) + \mathrm{i}\sum_{i<j}\mathrm{Im}A_{ij}(J_{ji}-J_{ij}) + \sum_i A_{ii}J_{ii}$$

L'integrale nelle N^2-N variabili $\mathrm{Re}A_{ij}$, $\mathrm{Im}A_{ij}$, $i<j$, contribuisce con un fattore $\pi^{\frac{N^2-N}{2}}\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\sum_{i\neq j}J_{ji}J_{ij}}$, l'integrale nelle N variabili A_{ii} contribuisce con un fattore $(2\pi)^{N/2}\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\sum_i J_{ii}^2}$. Infine:

$$I_H = \int \mathrm{d}A_H\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\mathrm{tr}(A^2)+\mathrm{tr}(AJ)} = \pi^{N^2/2}2^{N/2}\,\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\mathrm{tr}(J^2)}$$

Propagatore. Il propagatore [4] nel caso hermitiano è:

$$\Delta_H = < A_{j_1}^{i_1}A_{j_2}^{i_2} >= \frac{1}{I_H(0)}\frac{\partial}{\partial J_{i_1}^{j_1}}\frac{\partial}{\partial J_{i_2}^{j_2}}I_H(J)\Big|_{J=0} = \delta_{j_2}^{i_1}\delta_{i_2}^{j_1}$$

1.3.3 Integrali matriciali: matrice hermitiana a traccia nulla.

La misura. Consideriamo le relazioni:

$$\begin{cases} (\mathrm{d}A,\mathrm{d}A) &=& \mathrm{tr}(\mathrm{d}A\mathrm{d}A) \\ \mathrm{tr}(A) &=& 0 \end{cases}$$

esse definiscono una metrica invariante sotto trasformazioni unitarie visto che entrambe le relazioni lo sono. Scegliamo come variabili quelle del caso precedente eliminando A_{NN} con $\mathrm{tr}A=0$. Una matrice hermitiana a traccia nulla dipende quindi da N^2-1 variabili. Con la condizione $\mathrm{tr}A=0$ abbiamo esplicitamente:

$$\mathrm{d}s^2 = (\mathrm{d}A,\mathrm{d}A) = 2\sum_{i<j}^{N}\{(\mathrm{Re}\,\mathrm{d}A_{ij})^2+(\mathrm{Im}\,\mathrm{d}A_{ij})^2\}+2\sum_{i}^{N-1}\mathrm{d}A_{ii}^2+2\sum_{i<j}^{N-1}\mathrm{d}A_{ii}\mathrm{d}A_{jj}$$

Poiché la forma quadratica associata non dipende dal punto, ne deriviamo la seguente misura invariante sotto trasformazioni unitarie:

$$\mathrm{d}A_{HT} = \prod_{i<j}\mathrm{Re}\,\mathrm{d}A_{ij}\,\mathrm{Im}\,\mathrm{d}A_{ij}\prod_{i}^{N-1}\mathrm{d}A_{ii}$$

[4] L'utilità del propagatore sarà chiara nel secondo capitolo.

Notiamo che vale la seguente relazione tra la misura per matrici hermitiane e quella per matrici hermitiane a traccia nulla:

$$\int \mathrm{d}A_{HT}\, f(A) = \int \mathrm{d}A_H\, \delta(\mathrm{tr}A) f(A)$$

L'integrale gaussiano. Vogliamo calcolare:

$$I_{HT} = \int \mathrm{d}A_H\, \delta(\mathrm{tr}A)\, \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\mathrm{tr}A^2+\mathrm{tr}(JA)}$$

Il modo più veloce consiste consiste nell'esprimere la delta come:

$$\delta(\mathrm{tr}A) = \int \frac{\mathrm{d}\alpha}{2\pi}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha\,\mathrm{tr}A}$$

Scambiando gli integrali otteniamo:

$$I_{HT} = \int \frac{\mathrm{d}\alpha}{2\pi} \int \mathrm{d}A\, \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\mathrm{tr}A^2+\mathrm{tr}(J_2A)} = \pi^{N^2/2} 2^{N/2} \int \frac{\mathrm{d}\alpha}{2\pi}\, \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\mathrm{tr}(J_2^2)}$$

dove si è posto $J_2 = J + \mathrm{i}\alpha I$ e dove si è usato l'integrale gaussiano per le matrici hermitiane. Esprimendo in funzione di α e integrando otteniamo infine:

$$I_{HT} = \frac{\pi^{\frac{N^2-1}{2}} 2^{\frac{N-1}{2}}}{\sqrt{N}} \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\{\mathrm{tr}J^2 - \frac{1}{N}(\mathrm{tr}J)^2\}}$$

Propagatore.

$$\Delta_{HT} = < A^{i_1}_{j_1} A^{i_2}_{j_2} > = \frac{1}{I_{HT}(0)} \frac{\partial}{\partial J^{j_1}_{i_1}} \frac{\partial}{\partial J^{j_2}_{i_2}}\, I_{HT}(J)\Big|_{J=0} = \delta^{i_1}_{j_2}\delta^{j_1}_{i_2} - \frac{1}{N}\delta^{j_1}_{i_1}\delta^{j_2}_{i_2}$$

1.3.4 Integrali matriciali: matrice simmetrica.

Le matrici simmetriche A dipendono da $\frac{N^2+N}{2}$ variabili reali: A_{ij} per $i<j$ e A_{ii} per ogni i.

La misura. Notiamo che:

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{tr}A^2 & = & 2\sum_{i<j} A_{ij}^2 + \sum_i A_{ii}^2 \\ \mathrm{tr}(JA) & = & \mathrm{tr}(J_S A) = 2\sum_{i<j} A_{ij} J_{S\,ji} + \sum_i A_{ii} J_{S\,ii} \end{array}$$

con $J_S = \frac{J+J^T}{2}$ e J matrice complessa qualunque. La prima equazione definisce la nostra forma quadratica $\mathrm{d}s^2 = (\mathrm{d}A, \mathrm{d}A) = \mathrm{tr}(\mathrm{d}A\mathrm{d}A)$ da cui deriviamo la misura invariante sotto trasformazioni ortogonali:

$$\mathrm{d}A_S = \prod_{i<j} \mathrm{d}A_{ij} \prod_i \mathrm{d}A_{ii}$$

L'integrale gaussiano. Vogliamo calcolare:

$$I_S = \int \mathrm{d}A_S \, \mathrm{e}^{-\frac{1}{4}\mathrm{tr}A^2 + \mathrm{tr}(JA)}$$

con J matrice qualunque nel campo complesso. Il perchè l'integrale gaussiano sia stato definito in questo modo, con il fattore 1/4 nella parte quadratica, sarà chiaro nel paragrafo 2.2.4. Otteniamo:

$$\begin{aligned} I_S &= \pi^{\frac{N^2+N}{4}} 2^{\frac{N^2+3N}{4}} \, \mathrm{e}^{\mathrm{tr}J_S^2} \\ I_S &= \pi^{\frac{N^2+N}{4}} 2^{\frac{N^2+3N}{4}} \, \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\{\mathrm{tr}J^2 + \mathrm{tr}(JJ^T)\}} \end{aligned}$$

Propagatore.

$$\Delta_S = < A^{i_1}_{j_1} A^{i_2}_{j_2} > = \frac{1}{I_S(0)} \frac{\partial}{\partial J^{j_1}_{i_1}} \frac{\partial}{\partial J^{j_2}_{i_2}} I_S(J) \Big|_{J=0} = \delta^{i_1}_{j_2}\delta^{j_1}_{i_2} + \delta^{i_1}_{i_2}\delta^{j_1}_{j_2}$$

1.3.5 Integrali matriciali: matrice simmetrica a traccia nulla.

La misura. Sia A la generica matrice simmetrica, consideriamo le relazioni:

$$\begin{cases} (\mathrm{d}A, \mathrm{d}A) = \mathrm{tr}(\mathrm{d}A\mathrm{d}A) \\ \mathrm{tr}(A) = 0 \end{cases}$$

esse definiscono una metrica invariante sotto trasformazioni ortogonali visto che entrambe le relazioni lo sono. Scegliamo come variabili quelle del caso precedente eliminando A_{NN} con $\mathrm{tr}A = 0$. Una matrice simmetrica a traccia nulla dipende quindi da $\frac{N^2+N}{2} - 1$ variabili. Con la condizione $\mathrm{tr}A = 0$ abbiamo esplicitamente:

$$\mathrm{d}s^2 = (\mathrm{d}A, \mathrm{d}A) = 2\sum_{i<j}^{N} \mathrm{d}A_{ij}^2 + 2\sum_{i}^{N-1} \mathrm{d}A_{ii}^2 + 2\sum_{i<j}^{N-1} \mathrm{d}A_{ii}\mathrm{d}A_{jj}$$

Poiché la forma quadratica associata non dipende dal punto, ne deriviamo la seguente misura invariante sotto trasformazioni ortogonali:

$$\mathrm{d}A_{ST} = \prod_{i<j} \mathrm{d}A_{ij} \prod_{i}^{N-1} \mathrm{d}A_{ii}$$

Notiamo che vale la seguente relazione tra la misura per matrici simmetriche e quella per matrici simmetriche a traccia nulla:

$$\int \mathrm{d}A_{ST} \, f(A) = \int \mathrm{d}A_S \, \delta(\mathrm{tr}A) f(A)$$

L'integrale gaussiano. Vogliamo calcolare:

$$I_{ST} = \int \mathrm{d}A_S\, \delta(\mathrm{tr}A)\, \mathrm{e}^{-\frac{1}{4}\mathrm{tr}A^2 + \mathrm{tr}(JA)}$$

Usando ancora una volta la rappresentazione integrale della delta e scambiando gli integrali otteniamo:

$$I_{ST} = \int \frac{\mathrm{d}\alpha}{2\pi} \int \mathrm{d}A\, \mathrm{e}^{-\frac{1}{4}\mathrm{tr}A^2 + \mathrm{tr}(J_2 A)} = \pi^{\frac{N^2+N}{4}} 2^{\frac{N^2+3N}{4}} \int \frac{\mathrm{d}\alpha}{2\pi}\, \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\{\mathrm{tr}(J_2^2) + \mathrm{tr}(J_2 J_2^T)\}}$$

dove si è posto $J_2 = J + \mathrm{i}\alpha I$ e dove si è usato l'integrale gaussiano per le matrici simmetriche. Esprimendo in funzione di α e integrando otteniamo infine:

$$I_{ST} = \frac{\pi^{\frac{N^2+N-2}{4}} 2^{\frac{N^2+3N-4}{4}}}{\sqrt{N}} \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\{\mathrm{tr}J^2 + \mathrm{tr}(JJ^T)\} - \frac{1}{N}(\mathrm{tr}J)^2}$$

Propagatore.

$$\Delta_{ST} =< A^{i_1}_{j_1} A^{i_2}_{j_2} >= \frac{1}{I_{ST}(0)} \frac{\partial}{\partial J^{j_1}_{i_1}} \frac{\partial}{\partial J^{j_2}_{i_2}} I_{ST}(J) \bigg|_{J=0} = \delta^{i_1}_{j_2} \delta^{j_1}_{i_2} + \delta^{i_1}_{i_2} \delta^{j_1}_{j_2} - \frac{2}{N} \delta^{j_1}_{i_1} \delta^{j_2}_{i_2}$$

1.3.6 Integrali matriciali: matrice antisimmetrica

La generica matrice reale antisimmetrica dipende dalle $\frac{N^2-N}{2}$ variabili reali: A_{ij} per $i < j$.

La misura. Anzitutto notiamo che:

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}A^2 &= -2 \textstyle\sum_{i<j} A_{ij}^2 \\ \mathrm{tr}(JA) &= \mathrm{tr}(J_A A) = 2 \textstyle\sum_{i<j} A_{ij} J_{Aji} \end{aligned}$$

con $J_A = \frac{J - J^T}{2}$ e J matrice qualunque sul campo complesso. La prima equazione definisce la forma quadratica che risulta indipendente dal punto, ne segue l'invarianza sotto trasformazioni ortogonali della misura:

$$\mathrm{d}A_A = \prod_{i<j} \mathrm{d}A_{ij}$$

L'integrale gaussiano. Vogliamo calcolare:

$$I_A = \int \mathrm{d}A_A\, \mathrm{e}^{\frac{1}{4}\mathrm{tr}A^2 + \mathrm{tr}(AJ)}$$

Usando le precedenti espressioni otteniamo:

$$\begin{aligned} I_A &= (2\pi)^{\frac{N^2-N}{4}}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{tr}(J_A^2)} \\ I_A &= (2\pi)^{\frac{N^2-N}{4}}\, \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\{\mathrm{tr}(J^2) - \mathrm{tr}(JJ^T)\}} \end{aligned}$$

Propagatore.

$$\Delta_A =< A^{i_1}_{j_1} A^{i_2}_{j_2} >= \frac{1}{I_A(0)} \frac{\partial}{\partial J^{j_1}_{i_1}} \frac{\partial}{\partial J^{j_2}_{i_2}} I_A(J)\Big|_{J=0} = -\delta^{i_1}_{j_2}\delta^{j_1}_{i_2} + \delta^{i_1}_{i_2}\delta^{j_1}_{j_2}$$

Osservazione. *Il caso delle matrici antihermitiane non viene trattato perchè coincidente con quello delle matrici hermitiane, previa moltiplicazione per l'unità immaginaria.*

1.4 Cambio di variabili

Le funzioni generatrici che incontreremo nel seguito saranno ottenute dall'integrazione su un opportuno spazio di matrici; il primo passo verso l'integrazione esplicita consisterà nell'abbassamento del numero di variabili di integrazione. In particolare è utile esprimere le misure $\mathrm{d}A_H$ e $\mathrm{d}A_S$ in funzione delle sole N variabili degli autovalori della matrice, [5], [19]. Ciò è possibile in quanto gli argomenti di integrazione, essendo invarianti sotto trasformazioni unitarie o ortogonali, consentiranno l'eliminazione della parte non diagonale.

1.4.1 Caso hermitiano

Scriviamo $A = U\lambda U^\dagger$, le colonne di U sono vettori ortonormali le cui fasi sono scelte in modo che la prima componente di ciascuno di essi sia positiva, mentre λ è diagonale. Con questo vincolo c'è un unico modo [5] per diagonalizzare una matrice hermitiana A e quindi le coppie (U, λ) sono in corrispondenza biunivoca con le matrici hermitiane A. Le matrici U dipendono da $N^2 - N$ parametri p_μ. E' infine possibile riesprimere la misura in funzione delle variabili λ_i e p_μ; il risultato è:

$$\mathrm{d}A_H = \prod_{\alpha<\beta} (\lambda_\beta - \lambda_\alpha)^2 f_H(p) \mathrm{d}\lambda\, \mathrm{d}p = \Delta^2(\lambda) \mathrm{d}\lambda\, \mathrm{d}U$$

dove $\Delta(\lambda) = \prod_{\alpha<\beta}(\lambda_\beta - \lambda_\alpha)$ è il determinante di Vandermonde. Inoltre Mehta [19] ha calcolato $\int \mathrm{d}\lambda\, \mathrm{e}^{-\mathrm{tr}\lambda^2} \Delta^2(\lambda) = \frac{1}{C_{N2}}$. Da:

$$\int \mathrm{d}A\, \mathrm{e}^{-\mathrm{tr}A^2} = \int \mathrm{d}U \int \mathrm{d}\lambda\, \mathrm{e}^{-\mathrm{tr}\lambda^2} \Delta^2(\lambda) = \frac{k_H}{C_{N2}} = \pi^{N^2/2} 2^{\frac{N-N^2}{2}}$$

[5] Bisogna in effetti aggiungere che λ non abbia autovalori multipli, circostanza questa discussa in [19].

troviamo l'utile risultato:

$$k_H = \int \mathrm{d}U = \frac{\pi^{\frac{N^2-N}{2}}}{\prod_{j=1}^{N} j!}$$

Per argomenti invarianti possiamo perciò scrivere subito:

$$\int \mathrm{d}A_H\, f(A) = k_H \int \mathrm{d}\lambda\, \Delta^2(\lambda) f(\lambda)$$

1.4.2 Caso simmetrico

Scriviamo $A = O\lambda O^T$ con le stesse convenzioni per O che abbiamo usato per U. Tali matrici O dipendono da $\frac{N^2-N}{2}$ parametri p_μ. Il risultato della riespressione della misura in termini delle nuove variabili è:

$$\mathrm{d}A_S = |\Delta(\lambda)|\, f_S(p) \mathrm{d}\lambda \mathrm{d}p = |\Delta(\lambda)| \mathrm{d}\lambda\, \mathrm{d}O$$

Inoltre Mehta [19] ha calcolato $\int \mathrm{d}\lambda\, \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\mathrm{tr}\lambda^2} \Delta^2(\lambda) = \frac{1}{C_{N1}}$. Da:

$$\int \mathrm{d}A\, \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\mathrm{tr}A^2} = \int \mathrm{d}O \int \mathrm{d}\lambda\, \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\mathrm{tr}\lambda^2} |\Delta(\lambda)| = \frac{k_S}{C_{N1}} = \pi^{\frac{N^2+N}{2}} 2^{\frac{N}{2}}$$

troviamo l'utile risultato:

$$k_S = \int \mathrm{d}O = \frac{\pi^{\frac{N^2+N}{4}} 2^{-N}}{\prod_{j=1}^{N} \Gamma(1 + \frac{j}{2})}$$

Per argomenti invarianti possiamo perciò scrivere subito:

$$\int \mathrm{d}A_S\, f(A) = k_S \int \mathrm{d}\lambda\, |\Delta(\lambda)| f(\lambda)$$

1.4.3 Altre variabili

L' utilità delle variabili λ_i risiede nei semplici estremi di integrazione e nel termine(caso hermitiano) $\Delta^2(\lambda)$ che consente, come vedremo in seguito, l'utilizzo del metodo dei polinomi ortogonali. Può essere comunque interessante investigare nuovi insiemi di variabili. Le variabili λ_i sono gli autovalori di A, cioè soluzioni dell'equazione algebrica:

$$\det(A - \lambda I) = (-\lambda)^N + \sigma_1(-\lambda)^{N-1} + \ldots + \sigma_N = 0$$

con

$$\sigma_j = \sum_{1\leq k_1<\cdots<k_j\leq N} \lambda_{k_1}\lambda_{k_2}\ldots\lambda_{k_j} \qquad 1\leq j\leq N$$

Ogni funzione invariante $f(A)$ è una funzione simmetrica nelle λ_i, ogni funzione simmetrica in λ_i può essere espressa in funzione delle nuove variabili σ_j, [19]. Per il cambio di variabili dobbiamo calcolare:

$$\frac{\partial\sigma_j}{\partial\lambda_i} = \sum_{\substack{1\leq k_1<\cdots<k_{j-1}\leq N\\ k_s\neq i}} \lambda_{k_1}\lambda_{k_2}\ldots\lambda_{k_{j-1}} = \sigma_{j-1} - \lambda_i \sum_{\substack{1\leq k_1<\cdots<k_{j-2}\leq N\\ k_s\neq i}} \lambda_{k_1}\lambda_{k_2}\ldots\lambda_{k_{j-2}}$$

$$= \sum_{k=1}^{j} \sigma_{j-k}(-\lambda_i)^{k-1}$$

dove $\sigma_0 = 1$. Quest'ultima espressione può essere vista come il prodotto di due matrici di cui una diagonale inferiore, otteniamo pertanto:

$$\det\left(\frac{\partial\sigma_j}{\partial\lambda_i}\right) = \prod_{\alpha<\beta}^{N}(\lambda_\alpha - \lambda_\beta)$$

Si noti inoltre che, assegnati i σ_j, i λ_α non sono univocamente determinati, ma vi sono $N!$ possibili scelte in relazione all'ordine : $\lambda_\alpha < \lambda_\beta < \ldots < \lambda_\gamma$. In pratica il dominio di integrazione in $\mathrm{d}\lambda$ si suddivide in $N!$ domini in cui l'ordine è fissato; qui il determinante della trasformazione $\sigma_j \leftrightarrow \lambda_i$ è definito e non si annulla mai. Infine basta sostituire:

$$|\Delta(\lambda)|\mathrm{d}\lambda = N!\mathrm{d}\sigma$$

La semplificazione nell'argomento dell'integrale è notevole, si ha ad esempio:

$$\int \mathrm{d}A_S\, \mathrm{e}^{-\frac{1}{4}\mathrm{tr}A^2 + \frac{g}{6\sqrt{N}}\mathrm{tr}A^3} = k_S\, N! \int \mathrm{d}\sigma\, \mathrm{e}^{-\frac{\sigma_1^2}{4}+\frac{\sigma_2}{2}+\frac{g}{12\sqrt{N}}(3\sigma_2\sigma_1+6\sigma_3-\sigma_1^3)}$$

dove si è usato:

$$\sum \lambda_i^2 = t_2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2$$

$$\sum \lambda_i^3 = t_3 = \frac{3\sigma_2\sigma_1 + \sigma_3 - \sigma_1^3}{2}$$

Con questa sostituzione nasce il problema di determinare gli estremi del dominio di integrazione delle variabili σ_i. Questo problema è forse risolubile, tuttavia la successiva esplicita integrazione resta improponibile. Tra gli estremi più semplici c'è quello di σ_1, $(-\infty, +\infty)$, e quello di σ_2, $(-\infty, \binom{N}{2}\frac{\sigma_1^2}{N})$. Per il calcolo di tali estremi può essere utile la lettura di, [29], pag. 206.

Un'altra sostituzione. Usiamo stavolta le variabili $t_i = \sum_{j=1}^{N} \lambda_j^i$, da cui segue facilmente $\det(\frac{\partial t_j}{\partial \lambda_i}) = N!\Delta(\lambda)$, quindi, in sintesi, si ha la sostituzione:

$$|\Delta(\lambda)|\mathrm{d}\lambda = \mathrm{d}t$$

Capitolo 2

Lo sviluppo topologico

Nel seguito ci occuperemo diffusamente di sviluppi perturbativi di funzioni generatrici e della loro espressione in termini di grafi; qui vogliamo rivedere in dettaglio questo passaggio evidenziando alcuni aspetti più insidiosi che portano a frequenti errori qualora vengano sottovalutati. Mi riferisco in particolare al problema del calcolo dell'ordine di automorfismi di un grafo.

In generale, data la funzione di partizione di un modello matriciale, il problema matematico si riduce al calcolo della stessa funzione nei due modi seguenti:

- Perturbativamente, cioè sviluppando in serie l'interazione, integrando, ed esprimendo il relativo risultato in termine di sommatoria su un opportuno insieme di grafi.

- Esplicitamente, cioè calcolando in modo esatto l'integrale con le tecniche standard di integrazione.

Quando entrambe le strade sono percorribili con successo, dal relativo confronto, si possono ricavare interessanti proprietà sui grafi coinvolti. Questo capitolo è dedicato al primo metodo di calcolo; vi mostriamo come tale problema possa essere risolto sia nel caso scalare che nel caso matriciale per matrici hermitiane, simmetriche e antisimmetriche, qualunque sia l'interazione considerata. Il nostro riferimento principale per questo capitolo sarà l'articolo di Bessis et al., [5]; l'autore tuttavia non è in grado di citare adeguatamente la letteratura matematica. Il lettore interessato potrà trovare nelle referenze degli articoli matematici, [16], [17], un punto di partenza per eventuali approfondimenti in questo campo.

2.1 Il caso scalare

Il nostro esempio guida sarà quello della teoria ϕ^3, con ϕ variabile reale; la nostra funzione generatrice è:

$$Z_3(g) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\phi \, \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\phi^2 + \frac{g}{3!}\phi^3}$$

L'integrale gaussiano è:

$$I_3(J) = \int \mathrm{d}\phi \, e^{-\frac{1}{2}\phi^2 + J\phi} = \sqrt{2\pi}\, e^{J^2/2} = I_3(0)e^{J^2/2}$$

Supporremo g complessa per evitare problemi di convergenza. Notiamo fin d'ora che nel seguito per come sono definite le funzioni generatrici e gli integrali gaussiani avremo sempre: $Z(0) = I(0)$. Sviluppiamo perturbativamente $Z_3(g)$:

$$Z_3(g) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{g^n}{n!(3!)^n} \int (\phi^3)^n \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\phi^2} \, \mathrm{d}\phi = Z_3(0) \sum_{n=0}^{+\infty} z_n \, g^n$$

con:

$$z_n = \frac{1}{n!(3!)^n Z_3(0)} \int (\phi^3)^n \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\phi^2} \, \mathrm{d}\phi$$

per calcolare z_n scriviamolo come:

$$z_n = \frac{1}{n!(3!)^n Z_3(0)} \int \underbrace{(\phi\phi\phi)\cdots(\phi\phi\phi)}_{n\, fattori} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\phi^2} \, \mathrm{d}\phi =$$

$$= \frac{1}{n!(3!)^n} \underbrace{(\tfrac{\partial}{\partial J}\tfrac{\partial}{\partial J}\tfrac{\partial}{\partial J})\cdots(\tfrac{\partial}{\partial J}\tfrac{\partial}{\partial J}\tfrac{\partial}{\partial J})}_{n\, fattori} \mathrm{e}^{J^2/2}|_{J=0}$$

Ogni derivata può identificarsi con una coppia di numeri $(i,\, j)$, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq 3$, che indicano da destra a quale fattore e in quale posto del fattore la derivata si trova. Possiamo perciò riscrivere:

$$z_n = \frac{1}{n!(3!)^n} (\tfrac{\partial}{\partial J^{(n,3)}}\tfrac{\partial}{\partial J^{(n,2)}}\tfrac{\partial}{\partial J^{(n,1)}})\cdots(\tfrac{\partial}{\partial J^{(1,3)}}\tfrac{\partial}{\partial J^{(1,2)}}\tfrac{\partial}{\partial J^{(1,1)}})\mathrm{e}^{J^2/2}|_{J=0}$$

qui l'apice indica solo in quale posizione si trova la derivata, e non altre variabili.

Svolgiamo adesso le derivazioni: la $(n,\, m) - esima$ derivata si troverà a derivare una somma di prodotti ognuno dei quali avrà il seguente aspetto:

$$\mathrm{e}^{J^2/2} J^{(i_1,j_1)} J^{(i_2,j_2)} J^{(i_k,j_k)} \quad con \quad i < n$$

gli indici in alto indicano da quale derivata la variabile è stata "tirata giù", come sarà chiaro tra poco. La derivata $\frac{\partial}{\partial J^{(n,m)}}$ può agire in due modi:

1. Eliminando uno dei fattori $J^{(\cdot,\cdot)}$ e dando così luogo ad un 1.
2. Tirando giù una variabile $J^{(n,m)}$ che per convenzione spostiamo in fondo al fattore (in modo tale che per induzione esso risulta sempre ordinato).

Poichè infine si pone J=0, gli unici termini che sopravvivono sono quelli per cui ogni variabile tirata giù da una derivata (fenomeno 2) è stata eliminata da un'altra (fenomeno 1), ne segue che ogni termine è definito da un accoppiamento delle derivate e può essere rappresentato tracciando delle linee che lo esplicitino ed omettendo i simboli $\frac{\partial}{\partial J}$ come in figura 2.1. Compattando

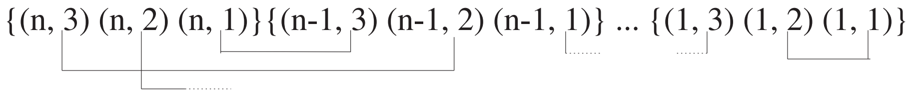


Figura 2.1: Accoppiamento

le parentesi graffe in un vertice e "stirando" la figura otteniamo un "grafo indicizzato" che è una migliore, ma equivalente, rappresentazione dell'accoppiamento (figura 2.2). Si può sempre tornare da questa rappresentazione alla

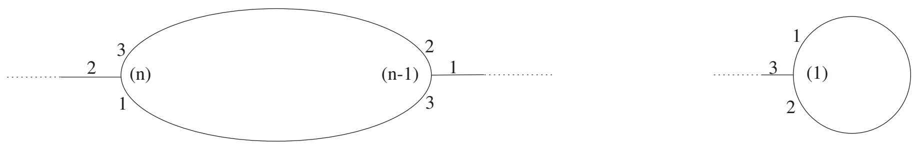


Figura 2.2: Grafo indicizzato

precedente. I numeri tra parentesi relativi al vertice indicano la parentesi graffa. La derivata di posto j nella parentesi k è rappresentata dall'estremità di un lato che incide sul vertice *(k)*, con associato il numero j. Parleremo perciò di "estremità" quando vorremo evidenziare il lato di appartenenza, mentre di "proiezione" o "campo" quando vorremo evidenziare il vertice di incidenza.

Così ogni termine non nullo vale 1 ed è in corrispondenza con un grafo indicizzato. Indicheremo il generico grafo indicizzato con una lettera maiuscola, corsiva, apostrofata, come $\mathcal{F}'$ o $\mathcal{G}'$.

Quindi abbiamo dimostrato che:

$$z_n = \frac{1}{n!(3!)^n} \sum_{\substack{\mathcal{F}'\ con \\ n\ vertici}} 1$$

Per evitare di contare due volte lo stesso grafo è necessario chiarire che due grafi indicizzati sono distinti se non sono isomorfi, dove l'isomorfismo è definito dalla seguente:

Def. (Isomorfismo di grafi indicizzati). *Due grafi indicizzati si dicono isomorfi se esiste un'applicazione biunivoca che manda vertici in vertici con lo stesso numero, proiezioni in proiezioni con lo stesso numero, lati in lati, e tale che gli estremi dell'immagine di un lato sono l'immagine degli estremi del lato.*

Ad ogni grafo indicizzato $\mathcal{F}'$ possiamo associare un grafo non indicizzato $\mathcal{F}$ ottenuto semplicemente eliminando tutti i numeri. Nel seguito indicheremo sempre con lettere corsive maiuscole i grafi non indicizzati; quando parleremo semplicemente di "grafi" ci riferiremo implicitamente a grafi non indicizzati.

A volte parleremo di "topologia di $\mathcal{F}'$" per indicare $\mathcal{F}$, questa espressione però non deve essere presa troppo sul serio. Consideriamo infatti che esistono rappresentazioni di grafi $\mathcal{F}$ perfettamente identiche nel senso dei grafi, ma topologicamente differenti, ad esempio si annodi un lato prima di congiungerne le estremità. Con "topologie differenti" indicheremo sempre il significato della teoria dei grafi, cioè "grafi non isomorfi".

Dobbiamo adesso chiarire il concetto di isomorfismo per i grafi non indicizzati, (si veda 1.1):

Def. (Isomorfismo di grafi non indicizzati). *Due grafi non indicizzati si dicono isomorfi se esiste un'applicazione biunivoca che manda vertici in vertici, lati in lati, e tale che gli estremi dell'immagine di un lato sono l'immagine degli estremi del lato.*

E' chiaramente possibile che due grafi siano distinti se considerati come indicizzati e identici se considerati come non indicizzati. Poiché noi vogliamo esprimere z_n come sommatoria sui grafi non indicizzati dobbiamo capire, dato un grafo non indicizzato $\mathcal{G}$, quanti sono i grafi indicizzati distinti $\mathcal{G}'$ che si riducono a $\mathcal{G}$ per eliminazione degli indici. Introduciamo a tal fine il gruppo P delle permutazioni di $3n$ elementi, divisi in n gruppi di 3, tali che ogni permutazione manda elementi dello stesso gruppo in elementi dello stesso gruppo. P conta $n!(3!)^n$ permutazioni, ognuna delle quali si rappresenta con il simbolo:

$$\begin{pmatrix} [(1,1)(1,2)(1,3)]\dots & \dots[(n,1)(n,2)(n,3)] \\ [(i_1,j_{1,1})(i_1,j_{2,1})(i_1,j_{3,1})]\dots & \dots[(i_n,j_{1,n})(i_n,j_{2,n})(i_n,j_{3,n})] \end{pmatrix}$$

e diremo che manda (k,s) in $(i_k,j_{s,k})$.

Veniamo all'azione di questo gruppo sui grafi indicizzati:

Def.. *Se $p \in P$ è tale che $p : (k,s) \to (i_k, j_{s,k})$, allora $p\,\mathcal{G}'\,p^{-1}$ è il grafo indicizzato in cui al posto di (k,s) sostituiamo $(i_k, j_{s,k})$.*

La nostra notazione $p\,\mathcal{G}'\,p^{-1}$ è stata fatta per rendere le seguenti dimostrazioni formalmente simili alla dimostrazione della "formula delle classi" in teoria dei gruppi ([28] pag. 91) a cui si ispirano. Il lettore può facilmente rendersi conto della validitá della proprietà associativa per l'azione del gruppo sul grafo.

Introduciamo il gruppo $\mathcal{C}(\mathcal{G}')$:

Teorema (Centralizzante di $\mathcal{G}'$). *Sia $\mathcal{C}(\mathcal{G}') = \{p \in P : \quad p\,\mathcal{G}'\,p^{-1} \sim \mathcal{G}'\}$ dove con $\sim$ si è indicato l'isomorfismo per i grafi indicizzati, allora $\mathcal{C}(\mathcal{G}')$ è un gruppo.*

Dim. Poichè gli elementi appartengono già ad un gruppo è sufficiente dimostrare la chiusura della composizione e dell'inverso. Se $p, q \in \mathcal{C}(\mathcal{G}')$ allora $qp\,\mathcal{G}'\,(qp)^{-1} \sim q\,\mathcal{G}'\,q^{-1} \sim \mathcal{G}'$ quindi la composizione è chiusa. Da $p\,\mathcal{G}'\,p^{-1} \sim \mathcal{G}'$ segue, applicando p^{-1}: $p^{-1}\,\mathcal{G}'\,p \sim \mathcal{G}'$, quindi è chiusa anche l'inversione. □

Osservazione. $\mathcal{C}(q\,\mathcal{G}'\,q^{-1}) = q\,\mathcal{C}(\mathcal{G}')\,q^{-1}$

Dim. Infatti se $c \in \mathcal{C}(\mathcal{G}')$ allora: $(qcq^{-1})(q\,\mathcal{G}'\,q^{-1})(qcq^{-1}) \sim q\,\mathcal{G}'\,q^{-1}$ quindi $q\,\mathcal{C}(\mathcal{G}')\,q^{-1} \subset \mathcal{C}(q\,\mathcal{G}'\,q^{-1})$. Inoltre se b è tale che: $b(q\,\mathcal{G}'\,q^{-1})b^{-1} \sim q\,\mathcal{G}'\,q^{-1}$ allora facendo agire q^{-1} ad ambo i membri:

$$(q^{-1}bq)\mathcal{G}'(q^{-1}bq)^{-1} \sim \mathcal{G}' \Rightarrow b \in q\,\mathcal{C}(\mathcal{G}')\,q^{-1}$$

ovvero $\mathcal{C}(q\,\mathcal{G}'\,q^{-1}) \subset q\,\mathcal{C}(\mathcal{G}')\,q^{-1}$. □

Corollario. *$o(\mathcal{C}(q\,\mathcal{G}'\,q^{-1})) = o(\mathcal{C}(\mathcal{G}'))$ cioè dipende solo da $\mathcal{G}$.*

Sia $c_{\mathcal{G}}$ il numero di grafi indicizzati distinti $\mathcal{G}'$ associati al grafo non indicizzato $\mathcal{G}$, possiamo riscrivere:

$$z_n = \frac{1}{n!(3!)^n} \sum_{\mathcal{G}} c_{\mathcal{G}}$$

Giungiamo infine al seguente importante risultato:

Teorema. *$c_{\mathcal{G}} = o(P)/o(\mathcal{C}(\mathcal{G}'))$ dove $\mathcal{G}'$ è un qualunque grafo indicizzato associato a $\mathcal{G}$.*

Dim. Mostriamo che esiste una corrispondenza biunivoca tra i laterali sinistri del sottogruppo $\mathcal{C}(\mathcal{G}')$ di P e i grafi indicizzati distinti associati a $\mathcal{G}$.

Anzitutto facendo viaggiare q su tutto P, $q\,\mathcal{G}'\,q^{-1}$ genera tutti i possibili grafi indicizzati associati a $\mathcal{G}$. Se $p = qc$, $c \in \mathcal{C}(\mathcal{G}')$ allora $p\,\mathcal{G}'\,p^{-1} \sim q\,\mathcal{G}'\,q^{-1}$ e quindi due elementi dello stesso laterale generano lo stesso grafo indicizzato. D'altra parte se $p\,\mathcal{G}'\,p^{-1} \sim q\,\mathcal{G}'\,q^{-1} \Rightarrow (q^{-1}\,p)\mathcal{G}'(q^{-1}\,p) \sim \mathcal{G}' \Rightarrow q^{-1}\,p \in \mathcal{C}(\mathcal{G}')$ cioè q e p appartengono allo stesso laterale, quindi ogni laterale è associato ad un diverso diagramma indicizzato. Poichè, come noto, i laterali sono in tutto $o(P)/o(\mathcal{C}(\mathcal{G}'))$ il teorema è dimostrato. □

Osservazione. $o(\mathcal{C}(\mathcal{G}')) = 2^{l(\mathcal{G})} o(A(\mathcal{G}))$ *dove* $l(\mathcal{G})$ *è il numero di loops di* $\mathcal{G}$ *e* $A(\mathcal{G})$ *è il gruppo di automorfismi di* $\mathcal{G}$*.*

Dim. Ogni elemento p di $\mathcal{C}(\mathcal{G}')$ dà un grafo $p\,\mathcal{G}'\,p^{-1}$ isomorfo a $\mathcal{G}'$ e quindi individua un automorfismo di $\mathcal{G}$ perché consente, guardandone gli estremi, di vedere dove un dato lato viene mandato. Tuttavia la presenza di loops in $\mathcal{G}$ implica che più permutazioni p danno lo stesso automorfismo, infatti la permutazione degli indici all'estremità di un loop dà sì un grafo isomorfo al precedente, ma l'automorfismo relativo è sempre l'identità dal punto di vista dei grafi non indicizzati (ogni lato e ogni vertice va in se stesso). Così c'è un sottogruppo $H(\mathcal{G}')$ che è associato all'automorfismo identità, e solo i laterali sinistri $pH(\mathcal{G}')$ $\quad p \in \mathcal{C}(\mathcal{G}')$ sono associati ad automorfismi distinti. Quindi: $o(A(\mathcal{G})) = o(\mathcal{C}(\mathcal{G}'))/o(H(\mathcal{G}'))$ ma è evidente che $o(H(\mathcal{G}')) = 2^{l(\mathcal{G})}$ da cui la nostra affermazione. □

Abbiamo dimostrato infine che:

$$c_{\mathcal{G}} = \frac{o(P)}{2^{l(\mathcal{G})} o(A(\mathcal{G}))}$$

$$z_n = \sum_{\substack{\mathcal{G} \\ \text{con } n \text{ vertici}}} \frac{1}{2^{l(\mathcal{G})} o(A(\mathcal{G}))}$$

Nota. Per convincersi della presenza del fattore $2^{l(\mathcal{G})}$ si consideri il doppio tadpole di figura 2.3. Il suo contributo è $\frac{1}{2^3}$, infatti lo si vede anche con il

Figura 2.3: Doppio tadpole.

calcolo esplicito: un fattore $\frac{1}{2(3!)^2}$ è esterno, il fattore $< \phi^3\,\phi^3 >$ è una somma di accoppiamenti ognuno dei quali contribuisce di 1. Ogni accoppiamento è definito una volta scelto quale campo di ϕ^3 a sinistra si debba accoppiare con quello di destra, questo porta un fattore 3 per ogni vertice , quindi infine il contributo è $\frac{1}{2(3!)^2}3^2 = \frac{1}{2^3}$. Nelle figure 2.7 e 2.8 diamo i valori di $o(A(\mathcal{G}))$ per i grafi connessi più semplici.

Nota. Se si considera un'interazione più complicata, come ad esempio $\frac{g}{3!}\phi^3 + \frac{\lambda}{4!}\phi^4$, quanto detto resta inalterato, semplicemente bisognerà modificare la definizione di isomorfismo in modo che vertici con la stessa valenza vadano in vertici con la stessa valenza. Quindi ad esempio se $\mathcal{G}$ contiene n_1 vertici cubici e n_2 vertici quartici avremo $o(P) = n_1!n_2!(3!)^{n_1}(4!)^{n_2}$, ma la formula finale per z_n resta immutata; in generale dunque la formula per lo sviluppo topologico nel caso scalare si scrive [1] :

$$\frac{Z(\mathbf{g})}{Z(\mathbf{0})} = \sum_{\mathcal{G}} \frac{\prod_i g_i^{V_i(\mathcal{G})}}{2^{l(\mathcal{G})}\, o(A(\mathcal{G}))}$$

dove abbiamo supposto l'interazione della forma: $\sum_i \frac{g_i}{i!}\phi^i$, e dove $V_i(\mathcal{G})$ è il numero di vertici di valenza i in $\mathcal{G}$.

2.2 Il caso matriciale

In questa sezione studieremo la formula dello sviluppo topologico nel caso matriciale, utilizzando molti dei risultati ottenuti nel primo capitolo. Approfondiremo anche, nel corso del calcolo, alcuni importanti concetti di teoria dei grafi non citati prima, come la costruzione esplicita della superficie associata ad un grafo di nastri e la sua orientabilità. Rispetto al primo capitolo la trattazione sarà meno formale ma altrettanto rigorosa.

2.2.1 Matrici hermitiane e grafi di nastri orientabili.

Sulla traccia del caso scalare affrontiamo ora il caso matriciale hermitiano. Nel nostro esempio la funzione generatrice sarà:

$$Z_{3M}(g) = \int \mathrm{d}M\, \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\mathrm{tr}(M^2)+\frac{g}{3\sqrt{N}}\mathrm{tr}(M^3)}$$

dove M è una matrice hermitiana e g una variabile complessa che, per quanto concerne lo sviluppo topologico, può essere posta immaginaria onde evitare

[1]In verità bisogna aggiungere un 1 a secondo membro, derivante dal primo termine dello sviluppo di Taylor del potenziale. Lo supporremo sempre implicito nella sommatoria, come avviene nella letteratura fisica. Il lettore però deve fare attenzione, qualora la somma sia sui grafi connessi, è veramente assente.

problemi di convergenza. In seguito 5.3.2 vedremo che l'integrale su scritto converge in un intorno di 0 purché si restringa la somma sui grafi dello sviluppo perturbativo ai soli grafi planari e si passi al limite $N \to \infty$ [2]. La nozione di misura dM è stata spiegata nel paragrafo 1.3.2.

L'integrale gaussiano è:

$$I_H(J) = \int \mathrm{d}M\, \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\mathrm{tr}(M^2)+\mathrm{tr}(JM)} = \pi^{N^2/2}\, 2^{N/2}\, e^{\frac{1}{2}\mathrm{tr}(J^2)}$$

Si noti che nell'azione, rispetto al caso scalare, il fattore $\frac{1}{3!}$ è sostituito da $\frac{1}{3}$, ciò semplificherà le formule ed è dovuto, come sarà chiaro nel seguito, all'invarianza della traccia per sole permutazioni cicliche dei suoi argomenti. In particolare se nel caso scalare una interazione ha l'aspetto $V(\phi) = \sum_i \frac{g_i}{i!}\phi^i$, nel caso matriciale hermitiano essa sarà sostituita da $V(M) = \sum_i \frac{g_i}{iN^{\frac{i}{2}-1}}\mathrm{tr}(M^i)$. Scriviamo:

$$\frac{Z_{3M}(g)}{Z_{3M}(0)} = \sum_v z_v g^v$$

come indice usiamo v al posto di n per non confondere quest'ultimo con l'ordine della matrice. Seguendo il caso scalare troviamo:

$$z_v = \frac{1}{N^{\frac{v}{2}}\, v!\, 3^v Z_{3M}(0)} \int (\mathrm{tr}(M^3))^v \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\mathrm{tr}(M^2)}\mathrm{d}M$$

Usando l'integrale gaussiano:

$$z_v = \frac{1}{N^{\frac{v}{2}}\, v!\, 3^v} \left(\frac{\partial}{\partial J^{i_{(v,2)}}_{i_{(v,3)}}} \frac{\partial}{\partial J^{i_{(v,1)}}_{i_{(v,2)}}} \frac{\partial}{\partial J^{i_{(v,3)}}_{i_{(v,1)}}} \right) \cdots \left(\frac{\partial}{\partial J^{i_{(1,2)}}_{i_{(1,3)}}} \frac{\partial}{\partial J^{i_{(1,1)}}_{i_{(1,2)}}} \frac{\partial}{\partial J^{i_{(1,3)}}_{i_{(1,1)}}} \right) \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\mathrm{tr}J^2} \Bigg|_{J=0}$$

dove è implicita la somma sugli indici ripetuti. z_v risulta quindi essere una sommatoria di termini ognuno dei quali è associato ad un particolare accoppiamento delle derivate, inoltre ogni accoppiamento di derivate $\frac{\partial}{\partial J^{j_1}_{i_1}}$ e $\frac{\partial}{\partial J^{j_2}_{i_2}}$ contribuisce al termine con un fattore detto propagatore:

$$< M^{i_1}_{j_1} M^{i_2}_{j_2} >= \frac{1}{I_H(0)} \frac{\partial}{\partial J^{j_1}_{i_1}} \frac{\partial}{\partial J^{j_2}_{i_2}} I_H(J) \Bigg|_{J=0} = \delta^{i_1}_{j_2}\delta^{j_1}_{i_2}$$

ogni termine può quindi rappresentarsi con il relativo accoppiamento, vedi ad esempio figura 2.4.

[2]Tale operazione può essere considerata come una particolare convergenza nel limite in cui la costante di accoppiamento $g/\sqrt{N}$ tende a 0. Ovviamente, se non eliminiamo i termini non planari, la convergenza non è garantita.

Possiamo rappresentare l'accoppiamento con i soliti grafi $\mathcal{G}'$ e $\mathcal{G}$. Questa volta però ogni accoppiamento porta un fattore costituito da delta di Kroneker, per dare un chiaro significato a tale prodotto di delta introduciamo una nuova rappresentazione G' (lettera stampatella). Questa nuova rappresentazione dell'accoppiamento può dedursi direttamente dall'accoppiamento stesso (figura 2.4) cui è perfettamente equivalente, o anche dalla rappresentazione $\mathcal{G}'$ attraverso la trasformazione dei vertici di figura 2.5. Per passare da $\mathcal{G}''$ a G' possiamo prima immergere $\mathcal{G}'$ nel piano, sia pure con eventuali intersezioni tra i lati, e quindi applicare le corrispondenze illustrate. Se il nostro disegno nel piano del grafo $\mathcal{G}'$ non ha il necessario ordinamento ciclico delle proiezioni, tale da consentire l'applicazione delle regole nelle figure, è sufficiente riordinare le proiezioni stesse in modo da raggiungere l'ordinamento cilclico in senso antiorario. Ciò può essere fatto con opportune trasformazioni continue ed eventuali nuove intersezioni. In ogni caso si noti che il vertice in cui gli indici $i_{(n,3)}$ e $i_{(n,2)}$ sono scambiati non comparirà mai nella rappresentazione G', comunque lo si disegni nel piano; nel grafo G' l'ordine ciclico inverso (nel caso ϕ^4 è 4-3-2-1) deve seguire l'orientazione, oraria o antioraria, determinata dalle frecce.

L'accoppiamento di $\frac{\partial}{\partial J^{i_{(n,j-1)}}_{i_{(n,j)}}}$ con $\frac{\partial}{\partial J^{i_{(k,s-1)}}_{i_{(k,s)}}}$ è rappresentato in G' come in figura 2.6, e corrisponde in $\mathcal{G}'$ al lato di estremi (n) e (k) e proiezioni j e s. Qui con $j-1$ e $s-1$ si intendono i valori modulo la valenza del vertice considerato.

Questa rappresentazione consente di associare ogni segmento orientato

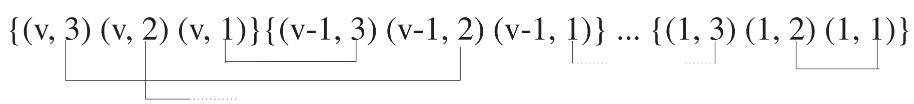


Figura 2.4: Accoppiamento.

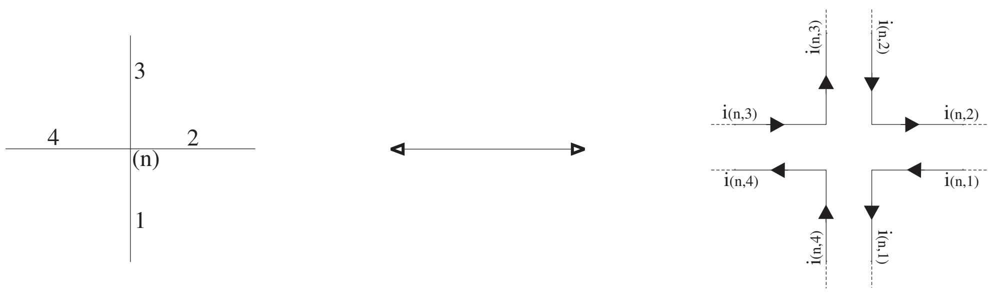


Figura 2.5: Corrispondenza tra i vertici quartici di $\mathcal{G}'$ e G'.

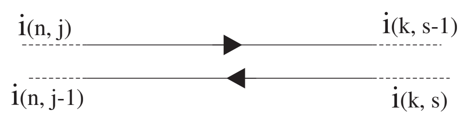


Figura 2.6: Lato in G'.

del lato con una delta del propagatore relativo: $\delta^{i_{(n,j)}}_{i_{(k,s-1)}}\,\delta^{i_{(n,j-1)}}_{i_{(k,s)}}$. Questa è la caratteristica principale che fa preferire la rappresentazione G' perché consente di calcolare facilmente il prodotto delle δ relative al grafo. Scegliendo infatti una linea del grafo e seguendola si ritornerà infine al punto di partenza, ciò si esprime dicendo che si è percorso il bordo di una *faccia orientata.* Il grafo si scompone in tante linee chiuse ognuna associata alla relativa faccia orientata. Notiamo poi che ogni segmento della faccia porta una δ a fattore, inoltre i suoi indici sono ripresi dai segmenti consecutivi che formano la stessa faccia; poichè la somma sugli indici è implicita troviamo infine che le delta dei lati di una faccia vanno a formare un fattore, $\sum_\alpha \delta^\alpha_\alpha = N$ ordine della matrice M. Ne segue che il prodotto delle delta contribuisce di N^F con F numero delle facce del grafo rappresentativo G'. Indicheremo sempre questi grafi indicizzati con lettere maiuscole, stampatelle e apostrofate.

Da ogni grafo indicizzato G' possiamo derivare per eliminazione di tutti gli indici il grafo G, anch'esso sarà indicato con lettere maiuscole stampatelle, ma non apostrofate. Ci riferiremo a G' e G anche con i termini *grafi sdoppiati* o *grafi di nastri* . Prima di continuare con lo sviluppo topologico, mostriamo nel paragrafo seguente la possibilità di associare ad ogni grafo G una superficie.

2.2.2 La superficie di un grafo: immersione e orientabilità.

Nel paragrafo precedente abbiamo chiamato faccia ogni linea chiusa del grafo G, infatti se tale grafo è immerso in una superficie senza che vi siano intersezioni tra le linee, allora ogni linea chiusa individua una regione (faccia) di cui la linea chiusa costituisce parte del bordo. Se tale regione è isomorfa al disco in $\mathbb{R}^2$ la superficie in esame può essere solo orientabile, altrimenti non sarebbe possibile associare il verso alle regioni, cioè il verso del relativo bordo, in modo tale che due regioni adiacenti abbiano le frecce in opposizione. Ciò corrisponde infatti ad avere un determinante positivo nel passaggio da una carta U_α all'altra U_β, per ogni coppia di carte con intersezione non nulla nell'atlante $\{U_\alpha\}$ che ricopre la varietà. Viceversa dato un grafo G è sempre possibile associargli in modo canonico una superficie orientabile su cui è immerso; ciò si realizza costruttivamente nel seguente modo:

- Si costruiscono carte poligonali standard in $\mathbb{R}^2$.
- Si incollano le carte lungo i bordi come prescritto dal grafo G, incollare significa aggiungere ulteriori carte all'atlante onde rendere differenziabile il passaggio lungo gli spigoli e vertici da un poligono all'altro.

Il grafo è così immerso nella superficie orientabile ottenuta, basta identificarlo con il bordo e le orientazioni delle regioni.

Si noti inoltre che per un importante teorema sulla classificazione delle superfici, [24], l'unica superficie compatta con caratteristica di Eulero 2 è la sfera. Un grafo con tale caratteristica di Eulero, con il procedimento canonico esposto sopra, può essere certamente immerso nella sfera, e quindi anche nel piano se identifichiamo una faccia con la regione estesa all'infinito.

Nel seguito vedremo che funzioni generatrici derivate da integrazione sulle matrici simmetriche danno luogo a grafi di nastri con linee non orientate, ne segue che le matrici simmetriche danno luogo anche a superfici non orientabili.

2.2.3 Lo sviluppo topologico: caso hermitiano.

Abbiamo visto che z_n si esprime come sommatoria sui grafi indicizzati G'; onde evitare di contare più volte lo stesso grafo è necessario definire cosa si intende per grafi distinti. Per i grafi G' sfruttiamo la corrispondenza biunivoca di questi grafi con i grafi $\mathcal{G}'$. Diremo due grafi G', F', isomorfi se i grafi associati $\mathcal{G}'$, $\mathcal{F}'$, lo sono. Per i grafi G, ottenuti dai G' per eliminazione di tutti gli indici, invece la definizione è più complicata e fa uso della corrispondenza biunivoca dei grafi G con le coppie $(\mathcal{G}, \{\theta\})$ come spiegato nel paragrafo 1.2. L'isomorfismo per i grafi G coincide allora con quello illustrato in tale sezione [3].

Abbiamo stabilito che:

$$z_v = \frac{1}{N^{v/2} v!\, 3^v} \sum_{\substack{G' \\ \text{con } v \text{ vertici}}} N^{F(G)}$$

[3]Come conseguenza della definizione di isomorfismo è facile dedurre che se due grafi $F = (\mathcal{F}, \{\theta_F\})$ e $G = (\mathcal{G}, \{\theta_G\})$ sono isomorfi allora esiste una applicazione biunivoca che manda lati in lati, vertici in vertici, facce orientate (intese come linee chiuse orientate) in facce orientate, e tale che l' immagine di un lato ha come estremi l' immagine degli estremi del lato e come facce adiacenti l' immagine delle facce adiacenti al lato.

dove con $F(G)$ si sono indicate le facce di G. Poiché $3V = 2I$ ne segue $F - \frac{V}{2} = F - I + V = \chi$ per la relazione di Eulero. Questa è la giustificazione del fattore $N^{\frac{i}{2}-1}$ a denominatore nel vertice. Quindi:

$$z_v = \frac{1}{v!\,3^v} \sum_{\substack{G' \\ \text{con } v \text{ vertici}}} N^{\chi(G)}$$

con $\chi(G)$ genere del grafo. Un altro modo per vedere che ogni grafo G' contribuisce con un fattore proporzionale a $N^{\chi(G)}$ è fare la sostituzione $M \to \sqrt{N}M$ nella funzione di partizione, allora l' azione diventa:

$$S(M) = N\frac{1}{2}\mathrm{tr}(M^2) - \sum_i \frac{g_i\,N}{i}\mathrm{tr}(M^i)$$

e quindi ogni vertice dà un fattore N, ogni lato un fattore $\frac{1}{N}$ perché il propagatore è inversamente proporzionale alla parte libera, e ogni faccia un fattore N per il solito ragionamento sulla somma delle δ. Infine N porta una potenza $F - I + V = \chi$ come anticipato.

Le relazioni intercorrenti tra i grafi $\mathcal{G}$, $\mathcal{G}'$, G, G' , sono le seguenti:

$$\mathcal{G} \leftarrow \mathcal{G}' \leftrightarrow G' \to G \to \mathcal{G}$$

dove la freccia indica che dall'uno si può dedurre l'altro, così alla somma su G' si può benissimo sostituire la somma su $\mathcal{G}'$. Noi invece vogliamo che la somma sia sui grafi non indicizzati G, perché è solo da questi che dipende $\chi(G)$.

Dobbiamo calcolare quanti grafi indicizzati distinti G' corrispondono allo stesso grafo non indicizzato G. Indicheremo l'isomorfismo tra grafi G' con $\approx$.

Il gruppo P ha P_p come sottogruppo, dove P_p ha solo permutazioni cicliche, cioè se $q \in P_p$ manda (k, s) in $(i_k, j_{s,k})$ allora per k fissato $\sigma : s \to j_{s,k}$ è una permutazione ciclica. P_p conta $v!\,3^v$ permutazioni.

$\mathcal{C}(\mathcal{G}')$ ha come sottogruppo $\mathcal{C}_p(\mathcal{G}')$ costituito dalle sole permutazioni cicliche, nel senso su indicato, di $\mathcal{C}(\mathcal{G}')$. Ne segue tra l'altro che $\mathcal{C}_p(\mathcal{G}')$ è anche sottogruppo di P_p.

Definiamo l'azione di una permutazione $p \in P_p$ su un grafo G', se $p : (k, s) \to (i_k, j_{s,k})$ allora $p\,G'\,p^{-1}$ è il grafo che si ottiene sostituendo all'indice (k, s), l'indice $(i_k, j_{s,k})$. Si noti che p deve appartenere a P_p se vogliamo che il grafo così ottenuto sia presente nello sviluppo perturbativo, infatti abbiamo osservato in precedenza che l'ordine ciclico degli indici è determinato da quello delle frecce e ciò non sarebbe più possibile se $p \notin P_p$.

Introduciamo un nuovo gruppo:

Teorema (Centralizzante di G'). $C(G') = \{q \in P_p : \quad q\, G'\, q^{-1} \approx G'\}$ *è un sottogruppo di* $\mathcal{C}_p(\mathcal{G}')$.

Dim. La dimostrazione che si tratta di un gruppo è analoga a quella del caso scalare; per dimostrare che è un sottogruppo di $\mathcal{C}(\mathcal{G}')$ notiamo che è un sottogruppo di P_p e inoltre:

$$\textit{se } q\, G'\, q^{-1} \approx G' \Rightarrow q\, \mathcal{G}'\, q^{-1} \sim \mathcal{G}' \Rightarrow q \in \mathcal{C}(\mathcal{G}')$$

per le definizioni di isomorfismo. □

Poniamo:

$$h_G = \binom{\text{numero di grafi } G' \text{ distinti}}{\text{associati ad un dato grafo } G}$$

Con questa definizione segue:

$$c_{\mathcal{G}} = \sum_{\substack{\text{grafi } G \text{ con} \\ \text{scheletro } \mathcal{G}}} h_G$$

dove $\mathcal{G}$ viene anche detto *scheletro* di G e G'.

Teorema.

$$h_G = \frac{o(P_p)}{o(C(G'))} = \frac{o(P_p)}{o(A(G))} \quad \textit{con } o(A(G)) \textit{ gruppo degli automorfismi di } G$$

Dim. Mostriamo che esiste una corrispondenza biunivoca tra i laterali sinistri del sottogruppo $C(G')$ di P_p e i grafi indicizzati distinti G' associati a G. Anzitutto facendo viaggiare q su tutto P_p, $q\, G'\, q^{-1}$ genera tutti i possibili grafi indicizzati G' associati a G e derivabili dallo sviluppo perturbativo. Se $p = qc$ con $c \in C(G')$ allora $p\, G'\, p^{-1} \approx q\, G'\, q^{-1}$ e quindi due elementi dello stesso laterale generano lo stesso grafo indicizzato. D'altra parte:

$$\textit{se } p\, G'\, p^{-1} \approx q\, G'\, q^{-1} \Rightarrow (q^{-1}p)G'(q^{-1}p)^{-1} \approx G' \Rightarrow q^{-1}p \in C(G')$$

cioè q e p appartengono allo stesso laterale, quindi ogni laterale è associato ad un diverso diagramma indicizzato G'.

Poichè i laterali sono in tutto $o(P_p)/o(C(G'))$ resta solo da dimostrare che $o(C(G')) = o(A(G))$, ma ciò è evidente confrontando le definizioni dei due gruppi. Si noti che ne segue tra l'altro l'indipendenza di $o(C(G'))$ dall'indicizzazione del diagramma, risultato questo che poteva essere dimostrato in modo analogo a quello per il caso scalare. □

Abbiamo quindi dimostrato che:

$$z_v = \sum_{\substack{G \text{ con} \\ v \text{ vertici}}} \frac{N^{\chi(G)}}{o(A(G))}$$

analogamente al caso scalare questa formula resta invariata cambiando vertice o usando interazioni più complesse, a patto di modificare opportunamente il concetto di isomorfismo. In generale quindi la formula per lo sviluppo topologico nel caso hermitiano si scrive:

$$\frac{Z(\mathbf{g})}{Z(\mathbf{0})} = \sum_G N^{\chi(G)} \frac{\prod_i g_i^{V_i(G)}}{o(A(G))}$$

dove abbiamo supposto una interazione della forma: $V(M) = \sum_i \frac{g_i}{iN^{\frac{i}{2}-1}} \mathrm{tr}(M^i)$. Nella letteratura fisica manca una deduzione completa della formula topologica su scritta, lo stesso articolo di Bessis et al. non copre questa lacuna.

Notiamo che possiamo dire ancora di più, si ha infatti la seguente formula che lega il gruppo di automorfismi di un grafo $\mathcal{G}$ con i gruppi di automorfismi dei grafi G che hanno $\mathcal{G}$ come scheletro.

Teorema.

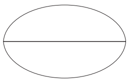
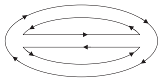
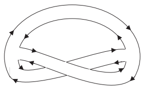
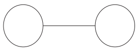
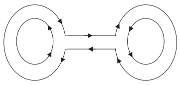
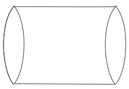
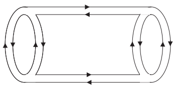
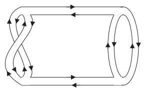
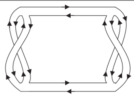
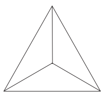
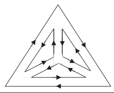
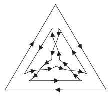
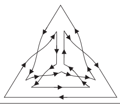
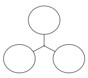
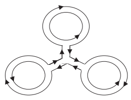
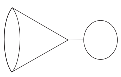
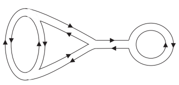
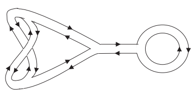
$$\sum_{G \text{ con scheletro } \mathcal{G}} \frac{o(P_p)}{o(A(G))} = \frac{o(P)}{2^{l(\mathcal{G})}\, o(A(\mathcal{G}))}$$

inoltre ogni addendo è un numero intero, $o(P) = \prod_i V_i!\,(i!)^{V_i}$ *e* $o(P_p) = \prod_i V_i!\, i^{V_i}$*, dove* V_i *è il numero di vertici di* $\mathcal{G}$ *con valenza* i*.*

Dim. Deriva semplicemente eguagliando l'espressione data poc'anzi per $c_{\mathcal{G}}$ con quella trovata precedentemente affrontando il caso scalare. □

E' interessante verificare la formula generale dimostrata sopra in alcuni casi particolari usando i dati delle seguenti tabelle per i grafi connessi $\mathcal{G}$ più semplici. Per verificare che i valori dati di $o(A(G))$ sono corretti suggerisco di immergere il grafo G in modo opportuno in $\mathbb{R}^3$ e quindi studiarne le simmetrie in base alla classificazione dei gruppi puntuali finiti, [30]; qualora ciò non sia possibile bisogna ricorrere alla definizione di automorfismo ed eseguire una analisi più dettagliata. Verifichiamo la formula per il terzo grafo $\mathcal{F}$ di figura 2.8.

$$\begin{aligned} 2!\,4^2\{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+1\} &= \frac{2!\,(4!)^2}{2^2\,4} \\ 36 &= 36 \end{aligned}$$

Ordine	Scheletro F	o(A(F))	Grafo F	Facce	o(A(F))	χ(F)
2		12		3	6	2
				1	6	0
		2		3	2	2
4		16		4	4	2
				2	2	0
				2	4	0
		24		4	12	2
				2	3	0
				2	4	0
		6		4	3	2
		4		4	1	2
				2	1	0

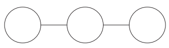
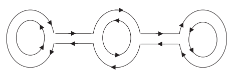
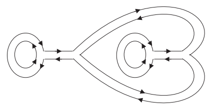
Ordine	Scheletro F	o(A(F))	Grafo F	Facce	o(A(F))	χ(F)
4		4		4	2	2
				4	2	2

Figura 2.7: Grafi connessi del secondo e quarto ordine con vertice $\frac{g}{\sqrt{N}}tr(M^3)$ ed M hermitiana.

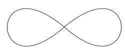
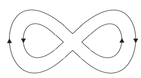
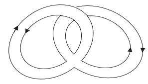
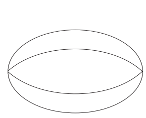
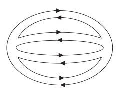
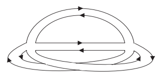
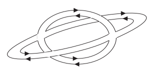
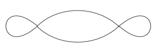
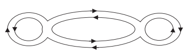
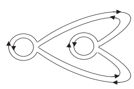
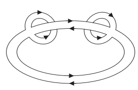
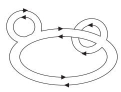
Ordine	Scheletro F	o(A(F))	Grafo F	Facce	o(A(F))	χ(F)
1		2		3	2	2
				1	4	0
2		48		4	8	2
				2	2	0
				2	8	0
		4		4	2	2
				4	2	2
				2	4	0
				2	1	0

Figura 2.8: Grafi connessi del primo e secondo ordine con vertice $\frac{g}{N}tr(M^4)$ ed M hermitiana.

2.2.4 Lo sviluppo topologico: caso simmetrico

In questa sezione studiamo la formula dello sviluppo topologico nel caso matriciale simmetrico la cui dimostrazione presenta nuovi, interessanti, aspetti. Ancora una volta il nostro esempio avrà vertice ϕ^3, la funzione generatrice sarà:

$$Z_{3S}(g) = \int \mathrm{d}S\, \mathrm{e}^{-\frac{1}{4}\mathrm{tr}(S^2)+\frac{g}{6\sqrt{N}}\mathrm{tr}(S^3)}$$

dove S è una matrice simmetrica e g una variabile complessa che, per quanto concerne lo sviluppo topologico, può essere posta immaginaria onde evitare problemi di convergenza. La nozione di misura $\mathrm{d}S$ è stata spiegata nel paragrafo 1.3.4.

L'integrale gaussiano è:

$$I_S(J) = \int \mathrm{d}S\, \mathrm{e}^{-\frac{1}{4}\mathrm{tr}(S^2)+\mathrm{tr}(JS)} = \pi^{\frac{N^2+N}{4}}\, 2^{\frac{N^2+3N}{4}}\, e^{\frac{1}{2}\{\mathrm{tr}(J^2)+\mathrm{tr}(J\,J^T)\}}$$

Come nel caso hermitiano il coefficiente dell'interazione è scelto in modo da rendere più semplici le formule seguenti. In particolare se nel caso scalare l'interazione ha l'aspetto $V(\phi) = \sum_i \frac{g_i}{i!}\phi^i$, nel caso matriciale simmetrico essa sarà sostituita da $V(S) = \sum_i \frac{g_i}{2iN^{\frac{i}{2}-1}}\mathrm{tr}(S^i)$. La stessa correzione si applica alla parte libera. In ultima analisi questa modifica deriva dall'invarianza della traccia per permutazioni cicliche degli argomenti e, qualora gli argomenti siano matrici simmetriche, anche per l'invarianza sotto inversione dell'ordine ciclico delle matrici; quest'ultima proprietà deriva dall'invarianza della traccia per trasposizione. Cioè se gli argomenti sono matrici simmetriche allora $\mathrm{tr}(ABCD) = \mathrm{tr}(DCBA)$. Scriviamo:

$$\frac{Z_{3S}(g)}{Z_{3S}(0)} = \sum_v z_v g^v$$

Seguendo il caso scalare troviamo:

$$z_v = \frac{1}{N^{\frac{v}{2}}\, v!\, 6^v Z_{3S}(0)} \int (\mathrm{tr}(S^3))^v \mathrm{e}^{-\frac{1}{4}\mathrm{tr}(S^2)}\mathrm{d}S$$

Usando l'integrale gaussiano:

$$z_v = \frac{1}{N^{\frac{v}{2}}\, v!\, 6^v}\left(\frac{\partial}{\partial J^{i_{(v,2)}}_{i_{(v,3)}}}\frac{\partial}{\partial J^{i_{(v,1)}}_{i_{(v,2)}}}\frac{\partial}{\partial J^{i_{(v,3)}}_{i_{(v,1)}}}\right)\cdots\left(\frac{\partial}{\partial J^{i_{(1,2)}}_{i_{(1,3)}}}\frac{\partial}{\partial J^{i_{(1,1)}}_{i_{(1,2)}}}\frac{\partial}{\partial J^{i_{(1,3)}}_{i_{(1,1)}}}\right)\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\{\mathrm{tr}(J^2)+\mathrm{tr}(J\,J^T)\}}\Bigg|_{J=0}$$

dove è implicita la somma sugli indici ripetuti. z_v risulta quindi essere una sommatoria di termini ognuno dei quali è associato ad un particolare accoppiamento delle derivate, vedi ad esempio la figura 2.9. Compattando le {(v, 3) (v, 2) (v, 1)}{(v-1, 3) (v-1, 2) (v-1, 1)} ... {(1, 3) (1, 2) (1, 1)}

Figura 2.9: Accoppiamento.

parentesi otteniamo il grafo $\mathcal{G}'$ ed eliminando gli indici il grafo $\mathcal{G}$. Supporremo sempre di disegnare questi grafi nel piano, con eventuali intersezioni, ma con le proiezioni dei vertici di $\mathcal{G}'$ ordinate ciclicamente in senso antiorario. A questo punto notiamo che essendo il propagatore:

$$< S^{i_1}_{j_1} S^{i_2}_{j_2} >= \frac{1}{I_S(0)} \frac{\partial}{\partial J^{j_1}_{i_1}} \frac{\partial}{\partial J^{j_2}_{i_2}} I_S(J) \bigg|_{J=0} = \delta^{i_1}_{j_2} \delta^{j_1}_{i_2} + \delta^{i_1}_{i_2} \delta^{j_1}_{j_2}$$

ogni lato moltiplica per due il numero di termini associati ad un grafo $\mathcal{G}'$ a seconda di quale coppia di delta scegliamo per tale lato, ne segue che aggiungendo uno 0 a fianco di ogni lato per cui scegliamo la prima coppia di delta ed un 1 a fianco dei lati per cui scegliamo la seconda coppia di delta, il contributo di ogni grafo $\mathcal{G}'$ si suddivide in 2^I contributi rappresentati da grafi indicizzati colorati, $\mathcal{G}''$, che indicheremo con due apici, e che supporremo ancora disegnati sul piano, vedi figura 2.10 e 2.11. A questo punto conviene

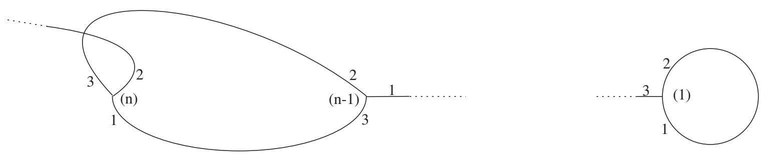


Figura 2.10: Grafo indicizzato $\mathcal{G}'$.

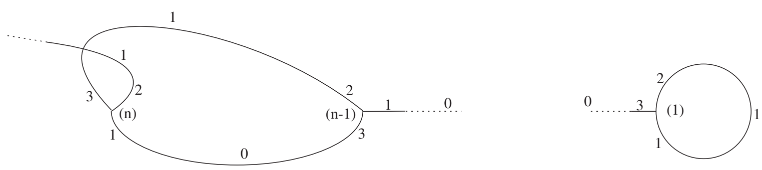


Figura 2.11: Grafo indicizzato colorato $\mathcal{G}''$.

introdurre una ulteriore rappresentazione G' equivalente ai grafi $\mathcal{G}''$; ancora una volta usiamo i grafi di nastri onde poter interpretare il contributo delle delta attraverso il numero delle facce. Il passaggio è descritto dalla figura 2.12 per i vertici e dalla figura 2.13 per i lati.

Si noti che la regola per i lati consente di associare ad ogni spigolo delle facce di G' una delta, in modo tale che ogni faccia porta un fattore N. Si noti altresì che gli spigoli di G' non sono più orientati; si potrebbe cercare di orientare i grafi a cominciare dai vertici seguendo la regola già vista nel caso hermitiano, tuttavia è facile rendersi conto che non si potrebbero orientare i *twist* senza privilegiare una delle due estremità. In altre parole non esiste alcuna valida convenzione per l'orientamento di tali grafi, ed inoltre essa risulta superflua per il nostro scopo: la corrispondenza biunivoca con i termini dello sviluppo topologico.

Ancora una volta dall'eliminazione degli indici di G' otteniamo i grafi G, che si distinguono da quelli del caso hermitiano per la mancanza di orientazione delle facce.

In questa sezione considereremo sempre i grafi come disegnati sul piano. I grafi indicizzati possono comunque essere pensati immersi in $\mathbb{R}^3$, e all'occasione riportartati nuovamente sul piano sfruttando l'ordinamento ciclico delle proiezioni. La figura così ottenuta differirà dall'originale solo per trasformazioni continue e per scambi nelle sovrapposizioni tra lati, aspetti, questi, irrilevanti nella nostra analisi. Le relazioni intercorrenti tra i grafi

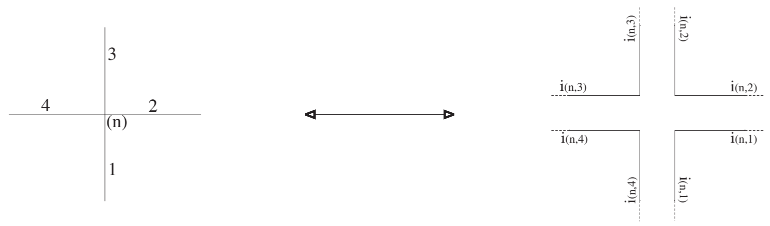


Figura 2.12: Corrispondenza tra i vertici di $\mathcal{G}''$ e G'.

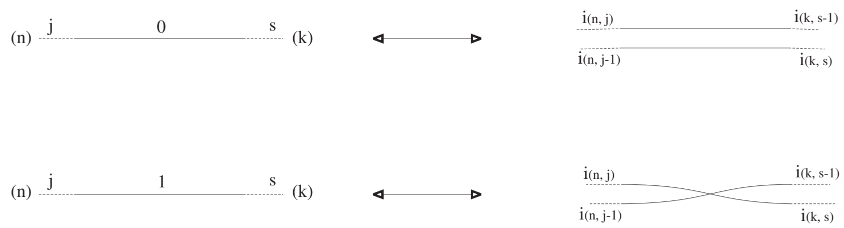


Figura 2.13: Corrispondenza tra i lati di $\mathcal{G}''$ e G'.

introdotti sono le seguenti:

$$\mathcal{G} \leftarrow \mathcal{G}' \leftarrow \mathcal{G}'' \leftrightarrow G' \rightarrow G \rightarrow \mathcal{G}$$

dove la freccia indica che dall'uno si può dedurre l'altro. Imitando gli analoghi passaggi del caso hermitiano giungiamo infine a:

$$z_v = \frac{1}{v!\,6^v} \sum_{\substack{G' \\ \text{con } v \text{ vertici}}} N^{\chi(G)}$$

Il nostro scopo è riesprimere questa sommatoria come somma su grafi G visto che è solo da questi ultimi che dipende l'argomento. A tal fine dobbiamo capire quanti sono i grafi G' che corrispondono al medesimo grafo G. Naturalmente per rendere questo problema ben definito è necessario specificare che cosa si intende per grafi distinti attraverso un'adeguata definizione di isomorfismo; per G questa è trattata in 1.2, e il lettore potrà adattarla ai grafi G', essenzialmente identificando G' con una classe di equivalenza $\{(\mathcal{G}', \gamma)\}$ dove la relazione di equivalenza tra le coppie è simile a quella delle terne nel paragrafo 1.2. Indicheremo l'isomorfismo tra grafi G' con $\approx$, mentre $\sim$ indicherà ancora l'isomorfismo tra grafi $\mathcal{G}'$.

Il gruppo P ha P_I come sottogruppo, dove P_I ha solo permutazioni cicliche o che invertono la ciclicità, cioè se $q \in P_I$ manda (k, s) in $(i_k, j_{s,k})$ allora per k fissato $\sigma : s \rightarrow j_{s,k}$ è o una permutazione ciclica o una permutazione ciclica moltiplicata per la permutazione che inverte la ciclicità:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & i-1 & i \\ i & i-1 & \dots & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

dove i è la valenza del vertice considerato. E' facile dimostrare che P_I è un gruppo e conta $V!\, i^V\, 2^V$ permutazioni se il grafo è costituito da V vertici di valenza i.

$\mathcal{C}(\mathcal{G}')$ ha come sottogruppo $\mathcal{C}_I(\mathcal{G}')$ costituito dalle sole permutazioni cicliche e cicliche inverse [4] di $\mathcal{C}(\mathcal{G}')$. Ne segue tra l'altro che $\mathcal{C}_I(\mathcal{G}')$ è anche sottogruppo di P_I.

Definiamo l'azione di una permutazione $p \in P_I$ su un grafo G': se $p : (k, s) \rightarrow (i_k, j_{s,k})$ allora $p\, G'\, p^{-1}$ è il grafo che si ottiene sostituendo all'indice (k, s), l'indice $(i_k, j_{s,k})$. Se la permutazione in esame è, per un fissato k, una permutazione ciclica inversa allora la rappresentazione planare convenzionale che avevamo dato di G' non è più rispettata perché la ciclicità del vertice

[4] Indicheremo così le permutazioni che invertono la ciclicità, e facciamo notare che qui *inverso* non ha il comune significato della teoria dei gruppi.

risulta in senso orario. Per questo motivo supponiamo che l'azione contempli anche un ribaltamento del vertice su cui ha agito la permutazione inversa, vedi figura 2.14. Sono chiari i seguenti fatti:

- $p\,G'\,p^{-1}$ è relativo allo stesso grafo non indicizzato G di G'.
- Con $p \in P_I$, $p\,G'\,p^{-1}$ genera tutti i possibili grafi indicizzati G' associati a G.

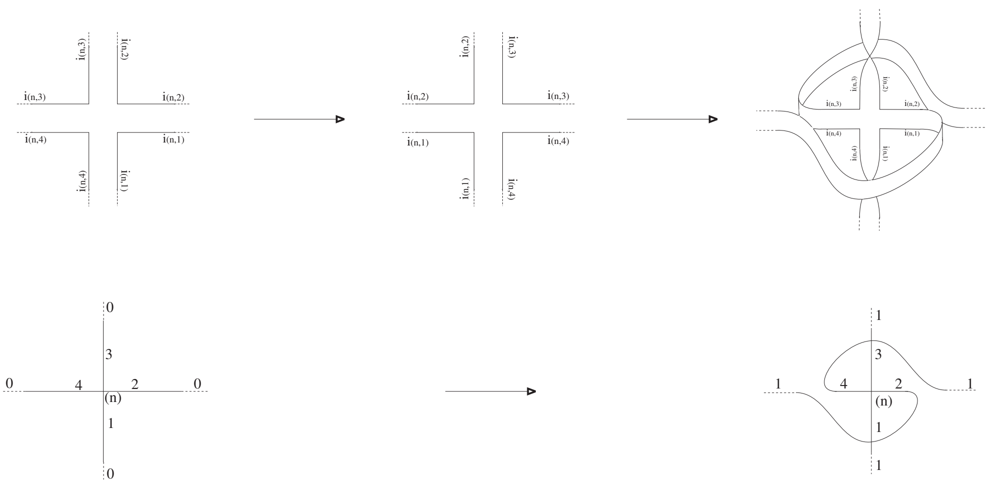


Figura 2.14: Ribaltamento del vertice nei grafi G' e $\mathcal{G}''$.

Nella figura 2.14 riportiamo inoltre l'effetto del ribaltamento nella rappresentazione $\mathcal{G}''$, essa mostra che il vertice può essere ribaltato ma bisogna contemporaneamente cambiare i colori dei lati incidenti.

Sulla traccia dei casi precedenti il lettore può dimostrare:

Teorema (Centralizzante di G'). $C(G') = \{q \in P_I : \quad q\,G'\,q^{-1} \approx G'\}$ *è un sottogruppo di* $\mathcal{C}_I(\mathcal{G}')$.

Ricordiamo che:

$$c_{\mathcal{G}} = \left(\begin{smallmatrix}\text{numero di grafi } \mathcal{G}' \text{ distinti} \\ \text{associati ad un dato grafo } \mathcal{G}\end{smallmatrix}\right)$$

$$h_G = \left(\begin{smallmatrix}\text{numero di grafi } G' \text{ distinti} \\ \text{associati ad un dato grafo } G\end{smallmatrix}\right)$$

Con queste definizioni, ricordando che ogni grafo $\mathcal{G}'$ genera 2^I grafi distinti $\mathcal{G}''$ e che c'è una corrispondenza biunivoca tra i grafi $\mathcal{G}''$ e G', si ha:

$$2^{I(\mathcal{G})}\,c_{\mathcal{G}} = \sum_{\substack{\text{grafi } G \text{ con} \\ \text{scheletro } \mathcal{G}}} h_G$$

Teorema.

$$h_G = \frac{o(P_I)}{o(C(G'))} = \frac{o(P_I)}{o(A(G))} \quad \textit{con } o(A(G)) \textit{ gruppo degli automorfismi di } G$$

La dimostrazione di questo teorema è del tutto simile a quella del caso hermitiano. Abbiamo quindi dimostrato che:

$$z_v = \sum_{\substack{G \\ \text{con } v \text{ vertici}}} \frac{N^{\chi(G)}}{o(A(G))}$$

E in generale la formula per lo sviluppo topologico nel caso simmetrico si scrive:

$$\frac{Z(\mathbf{g})}{Z(\mathbf{0})} = \sum_G \frac{N^{\chi(G)} \prod_i g_i^{V_i(G)}}{o(A(G))}$$

dove abbiamo supposto una interazione della forma: $V(S) = \sum_i \frac{g_i}{2iN^{\frac{i}{2}-1}} \mathrm{tr}(S^i)$, e una parte libera della forma $-\frac{1}{4}\mathrm{tr}(S^2)$.

La seguente formula lega il gruppo di automorfismi di un grafo $\mathcal{G}$ con i gruppi di automorfismi dei grafi G che hanno $\mathcal{G}$ come scheletro.

Teorema.

$$\sum_{G \textit{ con scheletro } \mathcal{G}} \frac{o(P_I)}{o(A(G))} = \frac{2^{I(\mathcal{G})}\, o(P)}{2^{l(\mathcal{G})}\, o(A(\mathcal{G}))}$$

inoltre ogni addendo è un numero intero, e $o(P) = \prod_i V_i!\,(i!)^{V_i}$ *e* $o(P_I) = \prod_i V_i!\,(2i)^{V_i}$*, dove* V_i *è il numero di vertici di* $\mathcal{G}$ *con valenza* i*.*

Essa è stata ottenuta per semplice sostituzione. La figura 2.15 riporta una tabella di grafi $\mathcal{G}$ e G con i relativi ordini dei gruppi di automorfismi; si faccia attenzione che adesso non è necessario conservare l'orientazione e alcune trasformazioni vietate nel caso hermitiano sono ora lecite.

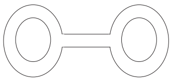
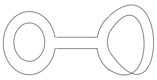
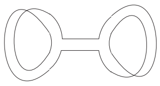
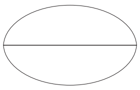
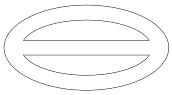
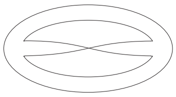
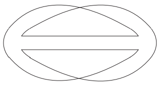
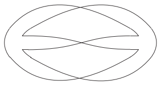
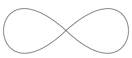
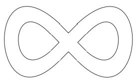
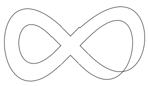
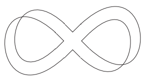
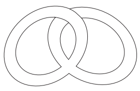
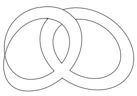
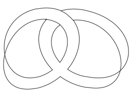
Ordine	Scheletro $\mathcal{F}$	o(A($\mathcal{F}$))	Grafo F	Facce	o(A(F))	χ(F)
2		2		3	4	2
				2	2	1
				1	4	0
		12		3	12	2
				2	4	1
				1	4	0
				1	12	0
1		2		3	4	2
				2	2	1
				1	4	0
				1	8	0
				1	4	0
				2	8	1

Figura 2.15: Analisi di semplici grafi connessi G.

2.2.5 Lo sviluppo topologico: caso antisimmetrico

In questa sezione studiamo la formula dello sviluppo topologico nel caso matriciale antisimmetrico, poichè il propagatore differisce dal quello del caso simmetrico solo per un segno, la trattazione sarà molto simile. Nel seguito considereremo solo vertici di valenza pari perché per le matrici antisimmetriche $\mathrm{tr}A^{2j+1} = 0$, come è facile verificare trasponendo l'argomento della traccia. Ne segue tra l'altro (vedi paragrafo 2.3) che la teoria con matrice antisimmetrica è 1-irriducibile, come ogni teoria che abbia solo vertici di valenza pari. Il nostro esempio avrà vertice ϕ^4, e la funzione generatrice sarà:

$$Z_{4A}(g) = \int \mathrm{d}A_A\, \mathrm{e}^{\frac{1}{4}\mathrm{tr}(A^2)+\frac{g}{8N}\mathrm{tr}(A^4)}$$

dove A è una matrice antisimmetrica e g una variabile complessa che, per quanto concerne lo sviluppo topologico, può essere posta immaginaria onde evitare problemi di convergenza. La nozione di misura $\mathrm{d}A_A$ è stata spiegata nel paragrafo 1.3.6.

L'integrale gaussiano è:

$$I_A(J) = \int \mathrm{d}A_A\, \mathrm{e}^{\frac{1}{4}\mathrm{tr}(A^2)+\mathrm{tr}(JA)} = (2\pi)^{\frac{N^2-N}{4}}\, e^{-\frac{1}{2}\{\mathrm{tr}(J^2)-\mathrm{tr}(J\,J^T)\}}$$

Come nel caso hermitiano il coefficiente dell'interazione è scelto in modo da rendere più semplici le formule seguenti. In particolare se nel caso scalare una interazione ha l'aspetto $V(\phi) = \sum_i \frac{g_i}{i!}\phi^i$, nel caso matriciale antisimmetrico essa sarà sostituita da $V(S) = \sum_i \frac{g_i}{2iN^{\frac{i}{2}-1}}\mathrm{tr}(S^i)$, dove abbiamo supposto ogni costante con indice dispari nulla. Sia:

$$\frac{Z_{4A}(g)}{Z_{4A}(0)} = \sum_v z_v g^v$$

Seguendo il caso simmetrico e definendo nello stesso modo i grafi $\mathcal{G}$, $\mathcal{G}'$, $\mathcal{G}''$, G e G', otteniamo nel nostro caso particolare:

$$z_v = \frac{1}{v!\,8^v} \sum_{\substack{\mathcal{G}'' \\ \text{con } v \text{ vertici}}} (-1)^{k(\mathcal{G}'')} N^{\chi(G)}$$

dove $k(\mathcal{G}'')$ deriva dal segno meno nel propagatore; poiché vi è un segno meno per ogni lato non twistato, $k(\mathcal{G}'')$ è il numero di lati colorati con 0 di $\mathcal{G}''$. Tutti i $\mathcal{G}''$ relativi allo stesso G hanno la stessa parità per k? La risposta è fortunatamente affermativa, infatti tutti i grafi $\mathcal{G}''$ relativi allo stesso G si ottengono a partire da uno per ribaltamento, in tutti i modi possibili, dei vertici, facendo attenzione a cambiare ogni volta (eccetto il caso in cui il lato sia un loop) i colori dei lati del vertice ribaltato. Ogni ribaltamento, se n sono i lati non twistati incidenti nel vertice u considerato, manda n in $\mathrm{val}(u) - n$, ne segue che sebbene il numero dei lati colorati con 0 non resti costante la sua parità $p(G)$, grazie al fatto che ogni vertice ha valenza pari, resta inalterata e pertanto dipende soltanto dal grafo G.

La formula generale per lo sviluppo topologico nel caso antisimmetrico si scrive infine:

$$\frac{Z(\mathbf{g})}{Z(\mathbf{0})} = \sum_G (-1)^{p(G)} \frac{N^{\chi(G)} \prod_i g_i^{V_i(G)}}{o(A(G))}$$

dove abbiamo supposto un'interazione della forma: $V(A) = \sum_i \frac{g_i}{2iN^{\frac{i}{2}-1}} \mathrm{tr}(A^i)$, e una parte libera della forma $\frac{1}{4}\mathrm{tr}(A^2)$.

2.3 Funzione generatrice dei grafi connessi

Si supponga di avere per funzione generatrice una funzione $Z(\mathbf{g})$ che sviluppata perturbativamente dà luogo a grafi non indicizzati che indichiamo con $\mathcal{G}$. Qui $\mathcal{G}$ non si riferisce ad alcun caso particolare, potrebbe essere il grafo della teoria scalare, o, ad esempio, il grafo G della teoria matriciale hermitiana, purché $Z(\mathbf{g})$ si esprima come:

$$\frac{Z(\mathbf{g})}{Z(\mathbf{0})} = \sum_{\mathcal{G}} \frac{f(\mathcal{G}, \mathbf{g})}{o(A(\mathcal{G}))}$$

dove $\mathbf{g}$ è un insieme di variabili [5]. f è invece una funzione moltiplicativa sui grafi sconnessi, cioè, se $\mathcal{G}$ è il grafo ottenuto dall'unione dei grafi $\mathcal{G}_1$, $\mathcal{G}_2$, $\ldots, \mathcal{G}_k$ allora:

$$f(\mathcal{G}, \mathbf{g}) = \prod_{j=1}^{k} f(\mathcal{G}_j, \mathbf{g})$$

mentre $A(\mathcal{G})$ è l'opportuno gruppo di automorfismi del grafo $\mathcal{G}$. Alcuni esempi sono, il caso scalare della teoria ϕ^3:

$$f(\mathcal{G}, g) = g^{V(\mathcal{G})}/2^{l(\mathcal{G})}$$

e il caso matriciale hermitiano della teoria $\mathrm{tr}(M^3)$:

$$f(\mathcal{G}, g) = g^{V(\mathcal{G})} N^{\chi(\mathcal{G})}$$

[5] Ve ne sono più di una se ad esempio l'interazione considera più tipi di vertici.

con $\chi(\mathcal{G}) = F(\mathcal{G}) - I(\mathcal{G}) + V(\mathcal{G})$, dove, per evitare ambiguità nel caso si considerino grafi sconnessi immersi in superfici, $F(\mathcal{G})$ deve essere sempre inteso come numero di linee chiuse che formano il grafo. Un altro esempio interessante verrà dato nel seguito.

Tornando al caso generale, se $\mathcal{G}$ è composto da a_1 copie di $\mathcal{G}_1$, ..., a_k copie di $\mathcal{G}_k$ allora:

$$o(A(\mathcal{G})) = \prod_{j=1}^{k} a_j!\, o(A(\mathcal{G}))^{a_j}$$

quindi:

$$\frac{Z(\mathbf{g})}{Z(\mathbf{0})} = \sum_{\mathcal{G}} \prod_{j=1}^{k} \frac{f(\mathcal{G}_j, \mathrm{g})^{a_j}}{a_j!\, o(A(\mathcal{G}_j))^{a_j}} = \mathrm{e}^{E(\mathbf{g})}$$

con:

$$E(\mathbf{g}) = \sum_{\mathcal{G}\ connessi} \frac{f(\mathcal{G}, \mathbf{g})}{o(A(\mathcal{G}))}$$

$E(\mathbf{g})$ è la funzione generatrice dei grafi connessi, anche detta energia libera:

$$E(\mathbf{g}) = \ln\left\{\frac{Z(\mathbf{g})}{Z(\mathbf{0})}\right\}$$

Nel seguito mostreremo come costruire funzioni generatrici che generino solo grafi 1-irriducibili (ma sconnessi), in particolare passare dall'integrazione sulle matrici hermitiane a quella su matrici hermitiane a traccia nulla porta alla 1-irriducibilità dei grafi generati dallo sviluppo perturbativo. Prendendo anche il logaritmo della funzione generatrice si elimina infine anche la sconnessione.

Si noti che il problema della 1-irriducibilità non si pone nella teoria ϕ^4, perché qui tutti i grafi sono 1-irriducibili [6]. Supponiamo infatti l'esistenza di un grafo con un ponte e schematizziamolo come in figura 2.16, dove il tratteggio indica grafi generici. Il grafo tratteggiato a destra conterrebbe V vertici e I lati escluso il ponte, e potremmo scrivere, considerando che da ogni vertice nascono 4 lati con 2 estremità ognuno, $4V = 2I + 1$, ma il primo membro risulta pari mentre il secondo è dispari. L'assurdo implica che non ci sono ponti nella teoria ϕ^4; questo è uno dei motivi, assieme alla migliore definizione degli integrali, che hanno reso questa teoria molto più semplice da studiare della teoria ϕ^3.

[6] Ricordiamo che noi consideriamo sempre grafi senza linee esterne.

Figura 2.16: Esempio di ponte.

2.3.1 Un esempio: il generatore di Tait-colorazioni

Vogliamo adesso investigare con un esempio quanto dimostrato sullo sviluppo topologico e sul passaggio dai grafi sconnessi a quelli connessi. L'esempio che segue può avere una certa rilevanza matematica e verrà in seguito ulteriormente generalizzato al caso matriciale. La nostra funzione generatrice è:

$$Z_{abc}(g) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}a\, \mathrm{d}b\, \mathrm{d}c\, \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)+\mathrm{i}\, g\, abc}$$

con a, b, c, g, reali. L'integrale gaussiano è:

$$I_{abc}(J) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}a\, \mathrm{d}b\, \mathrm{d}c\, \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)+J_a\, a+J_b\, b+J_c\, c} = (2\pi)^{3/2} \mathrm{e}^{\frac{1}{2}(J_a^2+J_b^2+J_c^2)}$$

ne segue [7] che ogni vertice è rappresentato da un vertice cubico le cui proiezioni sono "colorate" con a, b, o c, e ogni lato può collegare a con a, b con b, c con c, ma non colori misti, perciò ogni lato del grafo risulta colorato con a, b, o c, e su ogni vertice convergono tre colori differenti. Un grafo così colorato si dice *Tait-colorazione*. Il problema di Tait-colorare un grafo è stato largamente investigato ed è collegato con il teorema dei 4 colori. Abbiamo perciò dimostrato che:

$$\frac{Z_{abc}(g)}{Z_{abc}(0)} = \sum_{Tait-colorazioni\ \mathcal{G}} \frac{(-1)^{\frac{V(\mathcal{G})}{2}}\, g^{V(\mathcal{G})}}{o(A(\mathcal{G}))}$$

il segno è dovuto all'unità immaginaria, si noti inoltre che poichè i grafi sono trivalenti hanno un numero pari di vertici. Un esempio di Tait-colorazione è dato in figura 2.17, grafi di questo tipo sono i nostri grafi $\mathcal{G}$ non indicizzati, si faccia attenzione a non confondere il colore dei lati con un indice. I grafi indicizzati $\mathcal{G}'$ sono quelli per cui i vertici portano anche un numero, un esempio è dato in figura 2.18. Per convincersi di questi risultati si può ripercorrere la dimostrazione del caso scalare, facendo attenzione che adesso

[7] Per maggiori dettagli vedi il paragrafo "Un modello 1-irriducibile e il teorema dei quattro colori".

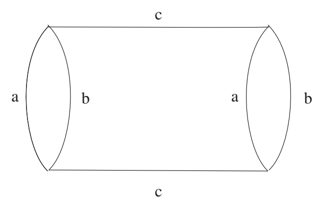


Figura 2.17: Esempio di Tait-colorazione.

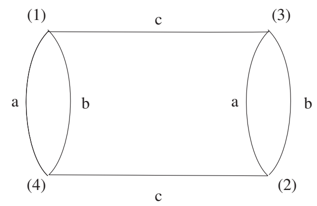


Figura 2.18: Esempio di Tait-colorazione indicizzata.

ogni vertice conta tre campi distinti a, b, c. Il gruppo di automorfismi dei grafi non indicizzati $\mathcal{G}$ si fonderà sull'opportuno concetto di automorfismo; lo diamo esplicitamente:

Def. (Isomorfismo di Tait-colorazioni). *Due Tait-colorazioni $\mathcal{G}_1$ e $\mathcal{G}_2$, sono isomorfe se esiste un'applicazione biunivoca che manda vertici in vertici, lati in lati dello stesso colore, e tale che gli estremi dell'immagine del lato sono l'immagine degli estremi del lato.*

In questo modo $o(A(\mathcal{G}))$ per il grafo di figura 2.17 vale 4 perchè vi sono due riflessioni possibili.

Questo per quanto riguarda lo sviluppo topologico. Veniamo adesso all'altro aspetto del problema, cioè il calcolo dell'integrale. Eseguendo due integrali gaussiani arriviamo facilmente a, [31]:

$$Z_{abc}(g) = 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}c \, \frac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}c^2}}{\sqrt{1+g^2\,c^2}} = 2\pi \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{y}} \, \frac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}y}}{\sqrt{1+g^2\,y}} = \frac{2\pi\,\mathrm{e}^{\frac{1}{4g^2}}}{|g|} K_0\left(\frac{1}{4g^2}\right)$$

Sviluppando in serie di g il primo integrale e integrando:

$$\frac{Z_{abc}(g)}{Z_{abc}(0)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n g^{2n} \frac{(2n!)^2}{(2^n\,n!)^3}$$

come si vede vi sono solo potenze pari di g in accordo con la nostra previsione topologica. Paragonando i risultati ottenuti:

$$\sum_{\substack{Tait-colorazioni\ \mathcal{G} \\ con\ 2n\ vertici}} \frac{1}{o(A(\mathcal{G}))} = \frac{(2n)!^2}{(2^n\, n!)^3}$$

Verifichiamo questa formula in alcuni semplici casi. Se $n = 1$ vi è una sola Tait-colorazione con 2 vertici e cioè quella di figura 2.19, poiché in questo caso $o(A(\mathcal{G})) = 2$ la formula è verificata. Se $n = 2$ vi sono 5 Tait-colorazioni

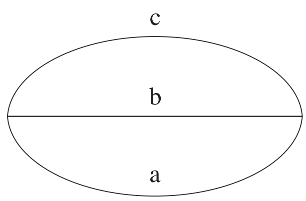


Figura 2.19: L'unica Tait-colorazione con 2 vertici.

possibili come illustrato in figura 2.20 e in effetti:

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{3}{4} = \frac{(4!)^2}{(2^2\, 2)^3}$$

Si noti che abbiamo contato anche i grafi sconnessi. Se vogliamo contare solo i grafi connessi ricordiamo che la nostra analisi sulla connessione ci assicura che:

$$\ln\left\{\frac{Z_{abc}(g)}{Z_{abc}(0)}\right\} = \sum_{\substack{Tait-colorazioni\ \mathcal{G} \\ connesse}} \frac{(-1)^{\frac{V(\mathcal{G})}{2}}\, g^{V(\mathcal{G})}}{o(A(\mathcal{G}))}$$

usando lo sviluppo, $\ln(1+x) = 1 + x - \frac{x^2}{2} + \ldots$, troviamo:

$$\ln\left\{\frac{Z_{abc}(g)}{Z_{abc}(0)}\right\} = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{g^{2k}}{2^{3k}} \left\{\sum_{i=1}(-1)^{i+1}(i-1)! \left[\sum_{\{a_j\}} \prod_j \frac{(2j)!^{2a_j}}{(j!)^{3a_j}\, a_j!}\right]\right\}$$

dove gli $\{a_j\}$ sono tutti gli insiemi di numeri interi positivi che soddisfano [31], le equazioni: $\sum_{j=1} a_j = i$; $\sum_{j=1} j a_j = k$. Ne ricaviamo:

$$\sum_{\substack{Tait-colorazioni\ \mathcal{G} \\ connesse\ con \\ 2k\ vertici}} \frac{1}{o(A(\mathcal{G}))} = \frac{1}{2^{3k}} \left\{\sum_{i=1}(-1)^{i+1}(i-1)! \left[\sum_{\{a_j\}} \prod_j \frac{(2j)!^{2a_j}}{(j!)^{3a_j}\, a_j!}\right]\right\}$$

che può essere messa a prova con gli esempi precedenti.

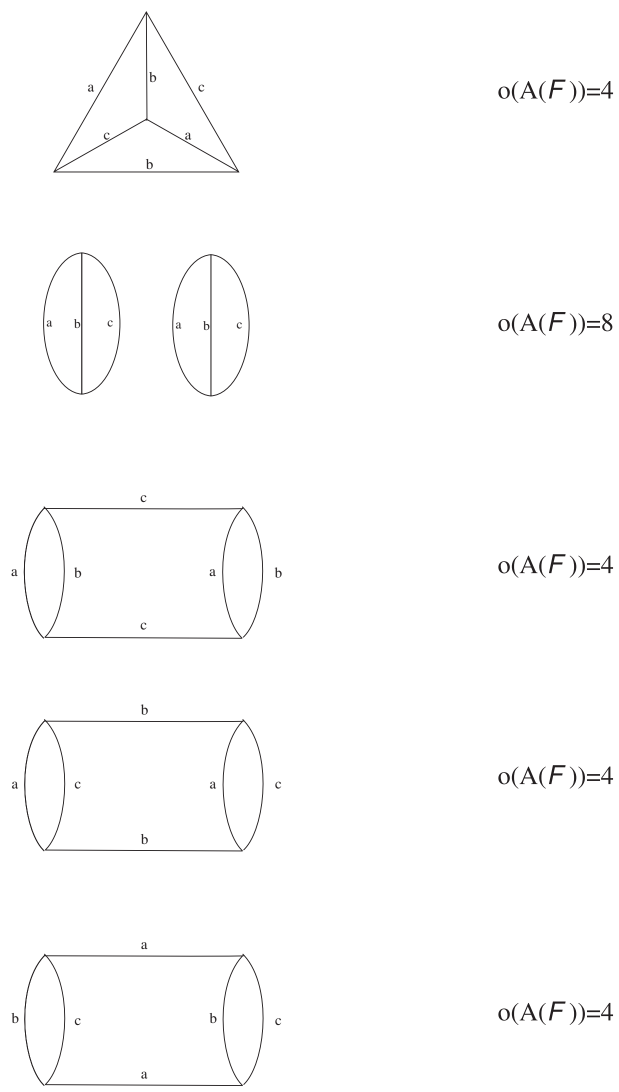


Figura 2.20: Tait-colorazioni con 4 vertici.

2.3.2 Il conteggio dei grafi

Torniamo al caso matriciale hermitiano, possiamo riscrivere $E(\mathbf{g})$ come somma sui grafi G':

$$E(\mathbf{g}) = \sum_{v_i} \prod_i \frac{g_i^{v_i}}{v_i!\, i^{v_i}} \sum_{\substack{G' \; connessi \\ con \; v_i \; vertici}} N^{\chi(G)}$$

A parte il fattore $\frac{1}{v_i!\, i^{v_i}}$ il coefficiente dello sviluppo nel termine $\prod_i g_i^{v_i} N^\chi$ è il numero di grafi G' connessi con v_i vertici e genere χ, per questo motivo si dice che $E(\mathbf{g})$ conta i grafi. Si tratta comunque di uno sviluppo poco significativo in quanto i grafi contati sono i G' e non i G. Alcuni autori sono interessati ai grafi planari e pertanto considerano soltanto lo sviluppo in $\mathbf{g}$ di:

$$e_2(\mathbf{g}) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N^2} E(\mathbf{g})$$

e in generale, considerando anche gli altri generi, $E(\mathbf{g})$ si riscrive:

$$E(\mathbf{g}) = \sum_\chi N^\chi e_\chi(\mathbf{g})$$

con:

$$e_\chi = \sum_{\substack{G \; connessi \\ con \; caratteristica \; \chi}} \frac{\prod_i g_i^{v_i(G)}}{o(A(G))} = \sum_{v_i} \prod_i \frac{g_i^{v_i}}{v_i!\, i^{v_i}} \begin{pmatrix} numero \; grafi \; G' \\ connessi \; con \; v_i \\ vertici \; e \; caratteristica \; \chi \end{pmatrix}$$

dove ricordiamo che per le superfici orientabili χ assume solo i valori tali che $\chi = 2 - 2h$, con h intero positivo o nullo detto *numero di Betti* (o genere), che intuitivamente corrisponde al numero di buchi della superficie. Formule analoghe valgono nel caso simmetrico dove però, essendo le superfici non necessariamente orientabili, χ assume i valori $\chi = 2 - 2h - j$ con j numero di crosscaps della superficie [24].

Alcuni autori usano come interazione $V(M) = \sum_i \frac{g_i}{N^{\frac{1}{2}-1}} \mathrm{tr}(M^i)$ (ad esempio [5], [2]) in tal caso le formule precedenti debbono modificarsi aggiungendo un fattore $\prod_i i^{v_i}$, ciò implica una formula meno estetica per lo sviluppo topologico.

L'attenzione della maggior parte degli autori verso lo sviluppo come somma sui G' piuttosto che sui G risiede nell'impulso dato dalla QCD planare ai matrix models. Questa teoria sviluppata da 't Hofft sfrutta il limite per grandi N del gruppo di simmetria $SU(N)$ della teoria di gauge che descrive l'interazione forte. Se supponiamo di poter eliminare le divergenze ultravioletta e infrarosse dei singoli diagrammi resta comunque da dimostrare la convergenza dell'intera serie. Come abbiamo visto il numero di contributi risulta proporzionale al numero dei grafi, per cui se supponiamo che ogni contributo sia simile, il problema è dimostrare la convergenza che ha come coefficienti il numero dei grafi G' del dato ordine, cioè qualcosa di simile alla serie scritta. In generale il numero di grafi va con l'ordine n come $c^n n!$ e la serie non converge, ma restringendosi ai grafi planari, il relativo numero va come c^n e la serie converge [1]. Gran parte delle referenze citate nella bibliografia derivano dall'impulso dato da questo programma e pertanto sono poco interessate allo sviluppo topologico, che come vedremo acquisirà un chiaro significato solo nella 2D-Gravity.

Capitolo 3

Modelli matriciali e 2D-Gravity

In questo breve capitolo investighiamo il legame tra i modelli matriciali e la 2D-gravity; risultati concreti, come la possibilità di calcolare gli indici critici, seguiranno dopo aver sviluppato il metodo dei polinomi ortogonali e alcune tecniche per l'eliminazione dei grafi 1-riducibili.

3.1 Grafi duali

In questa sezione affrontiamo l'aspetto matematico dei grafi duali, non sviluppato nel primo capitolo.

Abbiamo visto nel paragrafo 2.2.2 che ad ogni grafo di nastri orientato possiamo associare in modo canonico una superficie orientabile, allo stesso modo ad un grafo di nastri non orientato possiamo associare in modo canonico una superficie orientabile o non orientabile, a seconda del grafo. In questo capitolo ci limiteremo al caso delle matrici hermitiane, cioè a grafi di nastri orientati. Il grafo G non individua solo una superficie orientabile, ma una superficie orientabile suddivisa in regioni, viceversa ad ogni mappa disegnata su una superficie orientabile possiamo far corrispondere un grafo G, è sufficiente ingrassare lungo la superficie gli spigoli delle regioni. In questa sezione identificheremo i grafi G con le mappe su superfici orientabili.

Ad ogni grafo di nastri orientato G associamo la relativa superficie $M(G)$, quindi su questa superficie tracciamo un nuovo grafo $D(G)$ che diremo *duale* di G nel seguente modo: si prenda un punto su ogni regione della superficie $M(G)$, tali punti saranno i vertici di $D(G)$); si tracci poi una linea tra due punti relativi a facce adiacenti, cioè con uno spigolo in comune, in modo che la linea passi dal centro dello spigolo (questo per rendere chiaro il grafo $D(G)$). Il grafo così ottenuto sarà il nostro grafo D(G). La figura 3.1 mostra un esempio di duale. Ovviamente per costruzione il grafo $D(G)$ è immerso nella

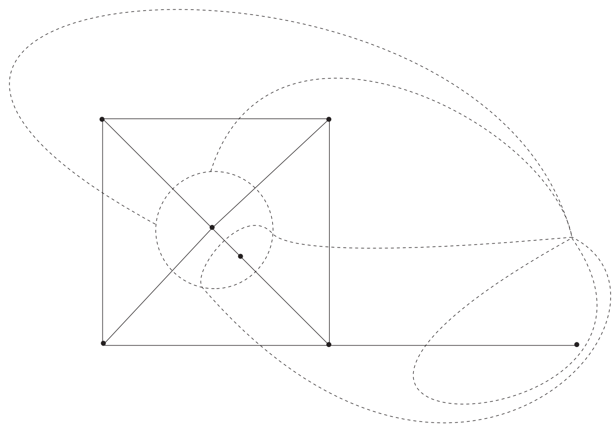


Figura 3.1: Grafo e grafo duale (linea tratteggiata).

superficie $M(G)$ e la suddivide in un insieme di regioni, inoltre se il grafo G è trivalente allora tali nuove regioni saranno triangolari, e in generale se il vertice di G ha valenza v la faccia associata in $D(G)$ avrà v spigoli. L'operazione di duale è essenzialmente una corrispondenza biunivoca tra due grafi che manda lati in lati, facce in vertici e vertici in facce; essa gode della proprietà che applicata due volte restituisce il grafo di partenza: $D(D(G)) = G$. Il lettore non deve dimenticare che per eseguire il duale è sempre necessario avere una superficie suddivisa in regioni, cioè una *mappa*; solo nel caso dei grafi di nastri questa superficie è definita in modo canonico e pertanto possiamo parlare di duale del grafo stesso. Qualora il grafo fosse normale (non di nastri), come è già stato osservato, l'immersione in una superficie non sarebbe univoca, potrebbe cioè dare luogo a differenti mappe e quindi a differenti duali, in tal caso allora il duale è un concetto che si applica solo alle mappe.

Nella definizione di duale bisogna notare anche che una regione di $M(G)$ può essere adiacente a se stessa, dal punto di vista del grafo G ciò avviene quando i due segmenti che formano lo spigolo appartengono alla stessa linea chiusa. Lati siffatti li chiameremo anche *autoadiacenze*. Certamente se un lato di G è un ponte allora è un'autoadiacenza, lo illustriamo nella figura 3.2 dove la linea tratteggiata rada indica un generico grafo, mentre quella più fitta indica il generico percorso della linea chiusa a cui appartengono i segmenti del lato. Il viceversa però non è necessariamente vero, si veda ad esempio l'ottavo grafo F nella tabella 2.8. Un' autoadiacenza è sicuramente un ponte qualora il grafo G sia planare, in tal caso infatti le due regioni ai lati dell'autoadiacenza sono la stessa regione; poichè la regione è connessa essa deve ricongiungersi con se stessa dalla parte di uno o dell'altro vertice, isolando così tutta una

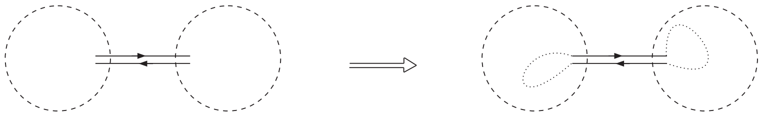


Figura 3.2: Ogni ponte è un' autoadiacenza.

parte del grafo che verrebbe sconnessa dal taglio del lato.

Un' autoadiacenza dà luogo quindi a un loop sul grafo duale $D(G)$; questa è solo una delle possibili corrispondenze tra strutture interne dei grafi e dei relativi duali. Se ad esempio supponiamo G planare allora abbiamo le seguenti corrispondenze:

Grafo		**Duale**
adiacenze multiple	$\longleftrightarrow$	*lati paralleli*
lati paralleli	$\longleftrightarrow$	*adiacenze multiple*
loop	$\longleftrightarrow$	*ponte*
ponte	$\longleftrightarrow$	*loop*

Le prime due corrispondenze valgono anche se il grafo G è non planare, dove per adiacenze multiple si intendono due regioni con più spigoli in comune. Le ultime due corrispondenze debbono invece essere modificate per i grafi non planari, sostituendo il termine *ponte* con *autoadiacenza*.

3.2 2D-Gravity

Un primo obbiettivo che può essere posto in relazione ad una gravità bidimensionale è il calcolo della relativa funzione di partizione e lo studio delle eventuali singolarità, compresi i relativi indici critici, al variare di alcuni parametri quali, ad esempio, la costante cosmologica. Questo studio è stato ampiamente portato avanti in due direzioni, quella continua detta teoria di Liouville e quella discreta delle triangolazioni dinamiche, inizialmente introdotte da Regge. Quest'ultimo approccio ha tratto vantaggio dalle tecniche dei modelli matriciali come questo capitolo intende mostrare [20]. In questo capitolo ci occuperemo di gravità non accoppiata con la materia, cioè di gravità pura. Il punto di partenza di entrambe le formulazioni è la funzione di partizione relativa all'azione gravitazionale: $-S(g_{\mu\nu}) = \int \mathrm{d}\Omega\{\frac{\rho}{4\pi}\sqrt{g}R - \mu\sqrt{g}\}$ dove μ fa le veci della costante cosmologica. La funzione di partizione si scrive:

$$Z = \sum_h \int \mathcal{D}g \, \mathrm{e}^{-\mu A + \rho\chi}$$

dove abbiamo usato $\int \mathrm{d}\Omega\sqrt{g} = A$ con A area della superficie e $\int \mathrm{d}\Omega\frac{1}{4\pi}\sqrt{g}R = 2 - 2h$ valido per varietà bidimensionali, e dove abbiamo sommato anche su tutte le topologie. $\mathcal{D}g$ rappresenta la misura per l'integrazione su tutte le metriche $g_{\mu\nu}$. Non ci addentriamo nel difficile compito di rendere traspa-

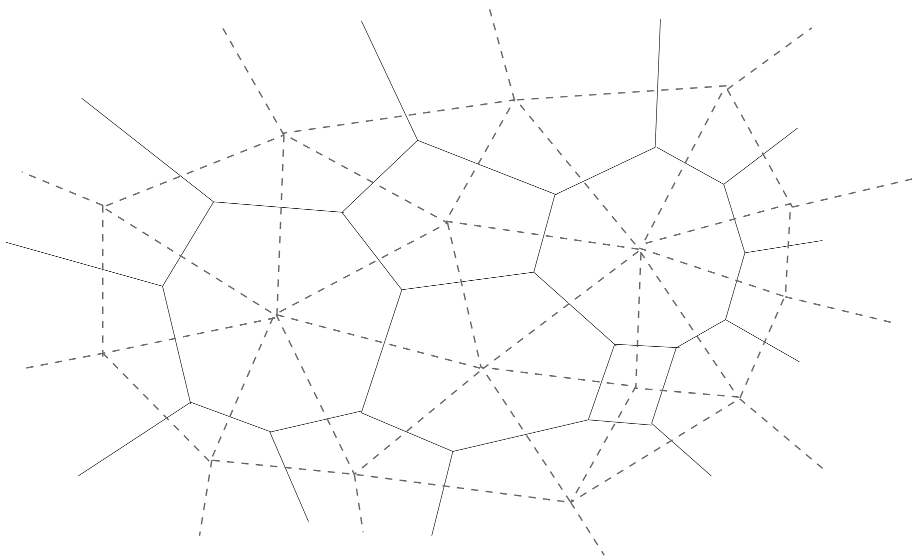


Figura 3.3: Grafo trivalente e la triangolazione duale.

renti questi concetti giacché non ne faremo uso, ci basta mostrare in modo intuitivo che questa espressione può essere riespressa come un integrale sulle matrici hermitiane. Anzitutto immaginiamo che ogni superficie considerata nell'integrazione sia costituita da triangoli equilateri di area 1, sia cioè una *triangolazione*. In un vertice la curvatura sarà nulla se i triangoli che vi convergono sono sei, negativa se i triangoli sono più di sei, e positiva se sono meno di sei. Supporremo di poter considerare siffatte triangolazioni piuttosto che superfici continue; tale ipotesi ci consente di sostituire:

$$\sum_h \int \mathcal{D}g \longrightarrow \sum_{triangolazioni}$$

Il lettore potrebbe protestare contro queste libertà formali; in effetti quanto segue dovrebbe essere considerato come metodo totalmente alternativo di scrivere la funzione di partizione, in sostanza come teoria fisica a sé stante, tuttavia è un fatto che finora gli indici critici calcolati con le due teorie, quella continua e quella discreta, coincidono e pertanto è sensato confidare nel passaggio poc'anzi mostrato.

Il corrispettivo discreto del volume infinitesimale $\sqrt{g}\mathrm{d}\Omega$ è $\sigma_i = N_i/3$ dove i indica un vertice della triangolazione e N_i il numero di triangoli che vi convergono. In questo modo l'area si scrive $A = \sum_i \sigma_i = \sum_i N_i/3$, infatti ogni triangolo ha tre vertici e viene contato tre volte con un contributo 1/3 ogni volta, per un valore totale uguale alla propria area. Il corrispettivo discreto della curvatura di Ricci è $R_i = 2\pi(6 - N_i)/N_i$, infatti con questa definizione:

$$\int \mathrm{d}\Omega\sqrt{g}R \to \sum_i 4\pi(1 - N_i/6) = 4\pi(1 - \frac{1}{2}F) = 4\pi(V - I + F) = 4\pi\chi$$

Per ottenere questa relazione abbiamo usato $3F = 2I$, essa segue considerando che ogni faccia ha tre lati ognuno dei quali viene contato due volte perchè è adiacente a due facce. Si noti che in realtà l'affermazione che ogni lato è adiacente a due facce non è vera nel caso in cui la triangolazione abbia un' autoadiacenza, dobbiamo pertanto specificare meglio che cosa intendiamo per triangolazione. In quanto esposto comunque i triangoli non giocano un ruolo cruciale e potrebbero essere sostituiti da poligoni generici; la maggior parte degli autori li ha sostituiti con quadrilateri in quanto questi ultimi semplificano, come vedremo, molti calcoli. Veniamo al legame della 2D-Gravity con i modelli matriciali; consideriamo la seguente espressione [1] per Z:

$$I_H(0)\,\mathrm{e}^Z = \int \mathrm{d}A_H\, \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\mathrm{tr}A^2 + \frac{g}{3\sqrt{N}}\mathrm{tr}A^3}$$

dove il parametro g è una costante di accoppiamento che non va confusa con la metrica. In questo modo Z si scriverà anche:

$$Z = \sum_{G\ connessi} \frac{g^{V(G)} N^{\chi(G)}}{o(A(G))}$$

e qui entrano in scena i duali che sono in corrispondenza biunivoca con i grafi G. Poichè i grafi G sono trivalenti i duali saranno triangolazioni che indicheremo con la lettera T. La funzione di partizione si scrive pertanto:

$$Z = \sum_{\substack{triangolazioni\ T\\ connesse}} \frac{g^{F(T)} N^{\chi(T)}}{o(A(D(T)))}$$

[1] Il problema di dare un senso a questo integrale per g reale è stato affrontato in [2], [14], la strategia è notare che lo scambio tra la sommatoria dello sviluppo in serie e l'integrazione non è legittimo. Lo sviluppo in serie può comunque essere scritto e se ne può calcolare il relativo raggio di convergenza prendendo quindi direttamente lo sviluppo topologico come definizione della funzione di partizione. Ovviamente questi problemi non si pongono se l'interazione è pari.

$F(T) = A$ perchè supponiamo che ogni triangolo abbia area 1, inoltre, introducendo μ tale che $g = \mathrm{e}^{-\mu}$, e ρ tale che $N = \mathrm{e}^{\rho}$, Z si riscrive nella forma voluta:

$$Z = \sum_{\substack{triangolazioni\ T \\ connesse}} \frac{\mathrm{e}^{-\mu A + \rho\chi}}{o(A(D(T)))}$$

A parte un fattore di simmetria otteniamo proprio la funzione di partizione in forma discreta. Relativamente al fattore di simmetria possono essere fatte alcune osservazioni. Da una parte la teoria formulata mostra molte lacune, infatti il passaggio dal continuo al discreto non ha una dimostrazione e pertanto non possono essere scartate a priori piccole correzioni al modello; dall'altra notiamo che il fattore di simmetria è del tutto irrilevante quando andiamo su triangolazioni con un gran numero di triangoli, nel senso che, man mano che il numero di triangoli cresce, diminuisce il rapporto tra il numero di triangolazioni che hanno fattore di simmetria diverso da uno e triangolazioni che hanno fattore di simmetria uguale a uno. Ciò è intuitivo in quanto basterà un triangolo messo fuori posto per eliminare la simmetria di una qualunque triangolazione [25]. Infine alcuni autori [12] giudicano la presenza di tale fattore come fisicamente necessaria e significativa.

3.3 Triangolazioni

Abbiamo visto che le cosiddette triangolazioni su cui sommiamo non sono altro che i duali dei grafi di Feynman G dello sviluppo topologico, il problema è adesso rendere tali duali quanto più vicini al concetto di triangolazione, cioè di approssimazione con i triangoli di una superficie. Anzitutto richiediamo che le facce dei duali abbiano tre lati, altrimenti non potremmo parlare di triangolazione. Essendo il grafo G cubico, per soddisfare la richiesta i lati uscenti da un vertice debbono essere tutti distinti e pertanto G non deve avere loop. Adesso richiediamo che i vertici di tali triangoli siano in posizioni distinte, infatti possiamo pensare a regioni con tre lati uno dei quali è un loop, esso verrà interpretato come triangolo ripiegato su se stesso in modo da porre in coincidenza due vertici. Non possiamo accettare strutture di questo tipo perché, a guardar bene, la dimostrazione di $A = \sum_i \sigma_i$ usa l'ipotesi che i vertici di ciascun triangolo siano distinti. Si tratta allora di eliminare i loop nella triangolazione e quindi il G duale non deve avere autoadiacenze e perciò, in particolare, deve essere 1-irriducibile. Con queste condizioni la nostra triangolazione comincia ad assumere un aspetto piacevole, anche se è possibile imporne altre. Ad esempio si noti che non abbiamo vietato i particolari grafi di figura 3.4, cioè due triangoli possono avere due lati in comune in modo da formare una specie di punta che fa chiamare questa struttura *hedgehog* (riccio). Tipicamente, in letteratura, essa non viene esclusa, certa-

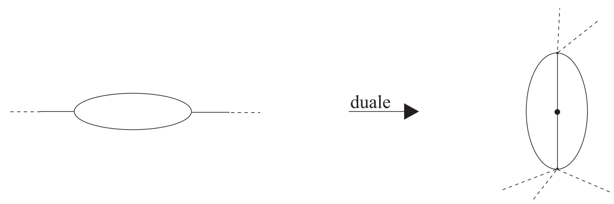


Figura 3.4: Hedgehog.

mente se richiedessimo dei G 2-irriducibili essa scomparirebbe, ma i calcoli crescerebbero in complessità. Nel seguito ci occuperemo comunque del problema di eliminare anche strutture come seagull o hedgehog; cominciamo a studiarne l'aspetto topologico.

Chiameremo *doppio-ponte* una coppia di lati la cui rimozione disconnette il grafo, ma in cui nessuno dei due lati, preso singolarmente, è un'autoadiacenza (e quindi tanto meno un ponte). E' facile vedere che un doppio-ponte è necessariamente un'adiacenza multipla, infatti i due lati appartengono a due facce (linee chiuse) con i due lati come spigoli comuni. L'implicazione è mostrata graficamente in figura 3.5.

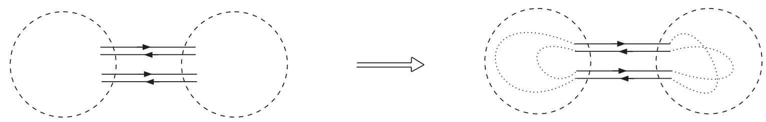


Figura 3.5: Ogni doppio-ponte è un'adiacenza multipla.

3.4 Criticità

Come abbiamo visto la funzione di partizione Z della 2D-Gravity è, da un punto di vista matematico, la funzione generatrice E dei grafi connessi. Useremo perciò anche questa lettera per indicare la funzione di partizione, che riscriveremo, con la solita notazione, come sviluppo per grandi N:

$$E(N, g) = \sum_{\chi} N^{\chi} e_{\chi}(g)$$

Altre quantità di interesse nello studio della 2D-Gravity sono la suscettività di stringa [2], [1]:

$$\chi' = \frac{\partial^2 e_2}{\partial \mu^2}$$

che prende il nome dalla teoria delle *stringhe non critiche*, non considerata in questo lavoro, e il relativo indice critico γ: $\chi' \sim (\mu - \mu_c)^{-\gamma}$. L'area per le superfici planari è un'altra quantità di interesse:

$$< A_2 >= \frac{\partial \ln e_2}{\partial \mu}$$

I punti di criticità sono molto importanti per il passaggio al continuo, se $e_2(\mu)$ diverge come $e_2 \sim (\mu - \mu_c)^{2-\gamma}$ allora $< A_2 > \sim (\mu - \mu_c)^{-1}$, cioè in prossimità del valore critico μ_c l'area tende a infinito. Possiamo immaginare di riscalare l'area di ogni triangolo a zero, in modo tale che alla criticità abbiamo delle superfici di area finita costituite da infiniti triangoli infinitesimi, ovvero realizziamo il limite continuo. Naturalmente lo stesso vale per le altre topologie.

Attraverso la teoria del continuo, [20], è possibile dimostrare che l'andamento verso la criticità di ciascun termine e_χ è:

$$e_\chi \sim f_\chi (\mu - \mu_c)^{(2-\gamma)\chi/2}$$

Verso la criticità i contributi di alcune topologie [3] alla funzione di partizione diverrebbero trascurabili, per evitarlo usiamo il cosiddetto *duble scaling limit* mandando contemporaneamente N a infinito, in modo che la quantità $\kappa^{-1} = N(\mu - \mu_c)^{(2-\gamma)/2}$ resti costante e lo sviluppo topologico divenga:

$$E(\kappa) = \kappa^{-2} f_2 + f_0 + \kappa^2 f_{-2} + \ldots = \sum_h \kappa^{2h-2} f_{2-2h}$$

In questo modo il limite continuo si realizza su tutte le topologie.

[2] Abbiamo aggiunto un apostrofo per non confonderla con la caratteristica di Eulero.

[3] Quelle con $|h|$ piccolo, perchè come vedremo, 5.3.1, $\gamma = -1/2$

Capitolo 4

Irriducibilità

In questo capitolo svilupperemo alcune nuove tecniche [1] per l'eliminazione dei diagrammi 1 e 2-irriducibili. Lo studio dell'irriducibilità ci porterà anche alla costruzione di un modello matriciale legato al problema dei quattro colori.

4.1 1-irriducibilità

La tecnica standard per ottenere una funzione generatrice di grafi 1-irriducibili consiste nel passaggio dalla funzione di partizione, alla sua trasformata di Legendre. Questo calcolo è molto complicato e ci sembra impraticabile, del resto anche se fosse fattibile non risolverebbe i nostri problemi, infatti per la discussione fatta nel paragrafo 3.3 vogliamo che i grafi G generati dalla funzione di partizione non abbiano loop né autoadiacenze. L'eliminazione dei ponti sarebbe pertanto insufficiente a meno di non limitarci al caso planare [2]. In una teoria ϕ^3 i grafi G sono trivalenti ed i loop compaiono solo sotto forma di tadpole, la presenza di un tadpole in un grafo lo rende automaticamente 1-riducibile per cui ci è sufficiente la 1-irriducibilità per l'eliminazione contemporanea di loop e ponti [3]. In questa sezione mostriamo come eliminare definitivamente i grafi con autoadiacenze e risolvere quindi il problema di generare "buone" triangolazioni, almeno per grafi trivalenti. La tecnica si applica a qualunque teoria anche con combinazioni di vertici, ovviamen-

[1] Alcuni autori, vedi [2], hanno sviluppato tecniche simili a quelle presentate qui; questi tuttavia non forniscono soluzioni al caso, da noi investigato, in cui i grafi non abbiano linee esterne.

[2] Il nostro metodo non risolverà questo problema, infatti esso è valido solo nel caso planare.

[3] Più difficile sono le teorie con vertici di valenza superiore, ad esempio ϕ^4; queste questioni sono spesso trascurate forse perchè si confida nell'indipendenza del modello dal vertice.

te però il problema di generare buone triangolazioni non è del tutto risolto per teorie con vertici di valenza maggiore di tre, infatti l'eliminazione delle autoadiacenze non assicura l'eliminazione di strutture quali i seagull.

4.1.1 Eliminazione delle autoadiacenze: caso hermitiano

Il metodo di eliminazione delle autoadiacenze nel caso hermitiano consiste nel sostituire all'integrazione sulle matrici hermitiane quella sulle matrici hermitiane a traccia nulla; come vedremo questo metodo funziona solo per i grafi planari. Ricordiamo che in questa teoria il propagatore vale:

$$\Delta_{HT} = \delta^{i_1}_{j_2}\delta^{j_1}_{i_2} - \frac{1}{N}\delta^{j_1}_{i_1}\delta^{j_2}_{i_2}$$

Poiché vogliamo conservare la convenzione secondo cui ad ogni segmento corrisponde una delta, in modo che ad ogni faccia corrisponda un fattore N, rappresentiamo il passaggio dal grafo $\mathcal{G}'$ al grafo G' come in figura 4.1 dove gli indici sono omessi. Analogamente a quanto accadeva nel caso simmetrico, ogni grafo $\mathcal{G}'$ si suddivide in 2^I grafi G' a seconda di quale coppia di delta è stata scelta per ogni lato. Come si vede la seconda coppia di delta, non

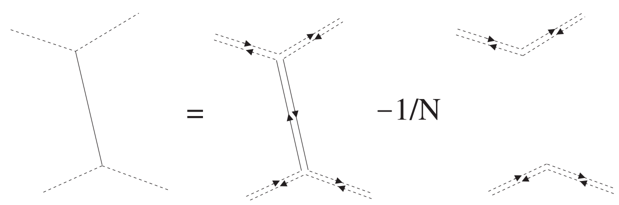


Figura 4.1: Rappresentazione del propagatore per le matrici hermitiane a traccia nulla.

ancora incontrata finora, ha l'effetto di tagliare il lato.

Introduciamo alcune convenzioni che ci consentiranno l'uso di equazioni in forma grafica. Con una singola linea indicheremo sempre un lato di $\mathcal{G}'$, con una doppia linea un lato di G', con una linea tratteggiata rada indicheremo un generico grafo, con una linea tratteggiata fitta il generico bordo di una faccia in G'. I lati non esplicitati del grafo (quelli interni alla linea tratteggiata rada) devono essere intesi come già sdoppiati, i lati esplicitati potranno anche essere non sdoppiati. Qualora il grafo compaia in un'equazione indicherà il relativo contributo del grafo G', cioè il prodotto di tanti fattori N quante sono le facce, più eventuali fattori che derivano dal propagatore; solo per i lati esplicitati tali fattori non sono compresi nel grafo ma verranno scritti eventualmente fuori. Con queste definizioni e dal conteggio delle facce ricaviamo alcune equazioni grafiche quali fig. 4.2, 4.3. Mediante

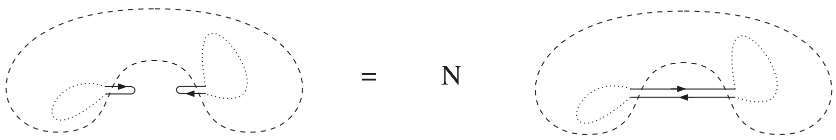


Figura 4.2: Autoadiacenza: identità grafica.

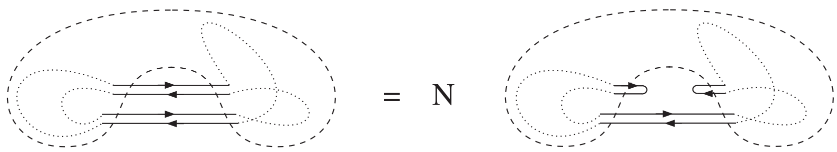


Figura 4.3: Adiacenze multiple: identità grafica.

l'uso dell'equazione di figura 4.2 possiamo dimostrare subito che nello sviluppo perturbativo della parte planare della funzione di partizione integrata sulle matrici hermitiane a traccia nulla non ci sono autoadiacenze e quindi ponti. La deduzione è data in figura 4.4. Consideriamo un grafo $\mathcal{G}'$, il suo

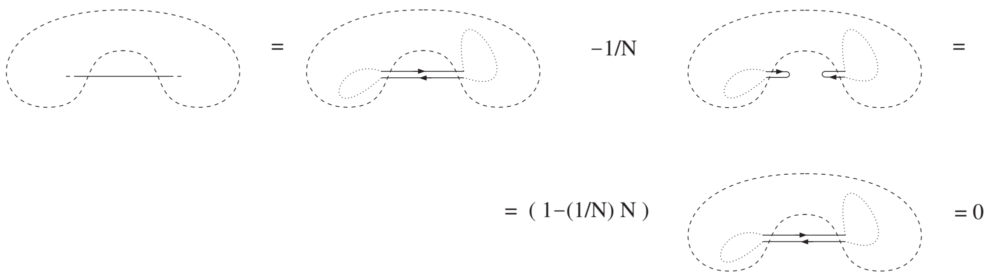


Figura 4.4: Eliminazione delle autoadiacenze.

contributo sarà la somma di tanti grafi G' ottenuti sdoppiando i lati. Supponiamo di aver sdoppiato tutti i lati di $\mathcal{G}'$, eccetto quello disegnato in figura. Supponiamo anche che questa operazione, qualora si scelga la prima coppia di delta, renda il lato evidenziato una doppia adiacenza, allora i contributi che si ottengono facendo lo due scelte possibili per questo lato coincidono tranne che per il segno. A tal fine si noti che l'$1/N$ del propagatore è semplificato dal numero più alto delle facce. Questo è quanto succede se il lato evidenziato è un'autoadiacenza, se invece non è un'autoadiacenza [4], il grafo G' ottenuto tagliando il lato (seconda coppia di delta) è $1/N^2$ volte più piccolo di quello che si ottiene scegliendo la prima coppia di delta. Tale fattore compare perché c'è una faccia in meno e un contributo $1/N$ dal propagatore, inoltre esso va a contribuire certamente ad una funzione e_χ con topologia non planare; quindi se prima, integrando sulle matrici hermitiane:

$$e_2 = \sum_{\substack{G \\ planari,\ connessi}} \frac{1}{o(A(G))}$$

adesso integrando sulle matrici hermitiane a traccia nulla:

$$e_2 = \sum_{\substack{G\ planari,\ connessi, \\ senza\ autoadiacenze}} \frac{1}{o(A(G))}$$

In questa trattazione non ci siamo mai ristretti ad alcun tipo di vertice.

In realtà la dimostrazione data necessita di una rifinitura: numeriamo i lati di $\mathcal{G}'$ e cominciamo dal primo lato ad applicare il ragionamento esposto sopra, mostriamo così che tutti i grafi in cui il primo lato è una autoadiacenza non contribuiscono perchè si semplificano con quelli in cui lo stesso lato è tagliato. Passiamo ora al secondo lato, qualunque sia il grafo considerato esso non deve avere il primo lato come autoadiacenza perchè quei termini sono già stati eliminati. Supponiamo ora che tutti i lati siano scelti, eccetto il secondo, in modo che, scegliendo per quest'ultimo la prima coppia di delta, esso divenga un'autoadiacenza. Questa scelta dei lati è tale che il primo lato non è un'autoadiacenza perchè grafi simili sono già stati eliminati; ma ora per usare il ragionamento su scritto dobbiamo avere a disposizione il grafo in cui il secondo lato è tagliato, e questo è possibile solo se il taglio del secondo lato non porta il primo lato dal non essere un'autoadiacenza all'esserlo, infatti se così fosse il termine non sarebbe disponibile e la dimostrazione fallirebbe. Fortunatamente il taglio di un lato che è esso stesso una autoadiacenza non aggiunge autoadiacenze. E' utile per il caso simmetrico, notare che neppure il twistare il lato ha questo effetto. Avendo mostrato che il procedimento si applica anche per il secondo lato, il lettore può procedere per induzione fino a eliminare le autoadiacenze in tutti i lati, dimostrando così le precedenti affermazioni.

[4]Questa osservazione mostra che i grafi eliminati sono tutti e soli quelli con autoadiacenze.

4.1.2 Eliminazione delle autoadiacenze: caso simmetrico

Lo scopo di questo paragrafo è il medesimo del precedente: mostrare che, passando dall'integrazione sulle matrici simmetriche a quelle simmetriche a traccia nulla, la funzione generatrice dei grafi planari genera solo grafi planari senza autoadiacenze. Ricordiamo che nella teoria simmetrica a traccia nulla il propagatore è:

$$\Delta_{ST} = \delta^{i_1}_{j_2}\delta^{j_1}_{i_2} + \delta^{i_1}_{i_2}\delta^{j_1}_{j_2} - \frac{2}{N}\delta^{j_1}_{i_1}\delta^{j_2}_{i_2}$$

che graficamente ha la rappresentazione di figura 4.5. La prima coppia di

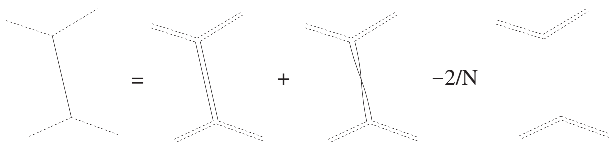


Figura 4.5: Rappresentazione del propagatore per le matrici simmetriche a traccia nulla.

delta è relativa al lato diritto, la seconda al lato twistato, la terza al taglio. Valgono le stesse convenzioni usate in precedenza per la rappresentazione dei contributi dei grafi, solo che ora le linee in evidenza non saranno orientate. Le equazioni delle figure 4.2, 4.3, valgono anche in questo caso e ad esse si aggiungono le figure 4.6 e 4.7. La dimostrazione grafica dell'eliminazione

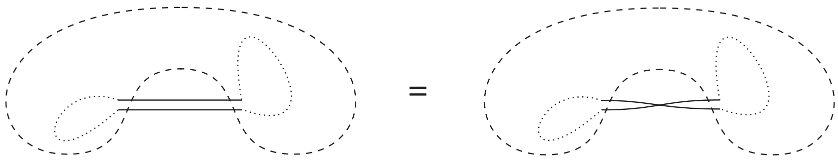


Figura 4.6: Autoadiacenza: identità grafica, caso twistato.

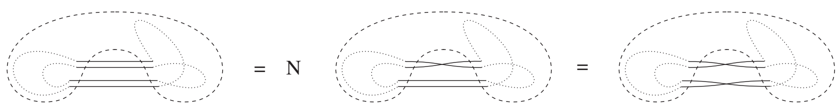


Figura 4.7: Adiacenza multipla: identità grafica, caso twistato.

delle autoadiacenze procede in modo analogo al caso hermitiano, solo adesso vi è un termine in più con il lato twistato, che il fattore 2 del propagatore consente comunque di semplificare. I grafi con il taglio vengono ancora una volta usati solo per eliminare le autoadiacenze e compaiono solo in e_χ per $\chi \leq 0$. Come risultato il passaggio all'integrazione sulle matrici simmetriche a traccia nulla consente di eliminare tutti e soli i grafi con le autoadiacenze da e_2 e e_1:

$$e_\chi = \sum_{\substack{G(\chi),\ connessi, \\ senza\ autoadiacenze}} \frac{1}{o(A(G))} \qquad per\ \chi = 1, 2$$

4.2 Eliminazione di autoadiacenze e adiacenze multiple

Studiando i casi precedenti è emerso che le proprietà di assenza delle autoadiacenze dipendono dalla forma del propagatore usato, in questo paragrafo cerchiamo quale debba essere la forma del propagatore affinchè lo sviluppo topologico della parte planare non comprenda:

- Grafi con autoadiacenze.
- Grafi con adiacenze multiple.

o una sola delle condizioni precedenti. Supponiamo di avere una teoria con propagatore:

$$\Delta = \delta^{i_1}_{j_2}\delta^{j_1}_{i_2} - \beta\, \delta^{i_1}_{i_2}\delta^{j_1}_{j_2} - \frac{\alpha}{N}\, \delta^{j_1}_{i_1}\delta^{j_2}_{i_2}$$

La rappresentazione grafica del propagatore è data in figura 4.8. Usando

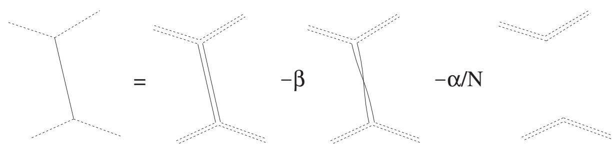


Figura 4.8: Rappresentazione grafica del generico propagatore.

le equazioni grafiche dei paragrafi precedenti otteniamo le equazioni di figura 4.9 e 4.10, nella prima si è supposto che tutti i lati non evidenziati siano già stati sdoppiati in modo che scegliendo la prima coppia di delta per il lato evidenziato esso diventi un'autoadiacenza; nel secondo si suppone che, scegliendo la prima coppia di delta per entrambi i lati, divengano i due spigoli di un'adiacenza multipla. Il ragionamento che accompagna queste figure è lo stesso del caso hermitiano precedente; vi mostriamo che, fissati tutti i lati non evidenziati, non vi possono essere contributi in cui quelli evidenziati sono autoadiacenze (nella prima figura) o adiacenze multiple (nella seconda figura), perchè in tal caso i termini derivanti da tutte le scelte possibili per questi lati si semplificherebbero [5]. Le richieste di eliminazione delle autoa-

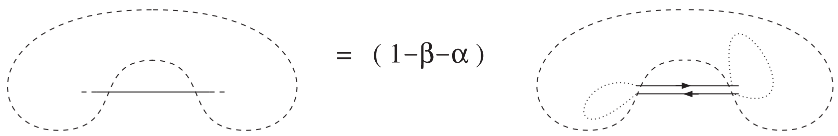


Figura 4.9: Eliminazione delle autoadiacenze: caso generale.

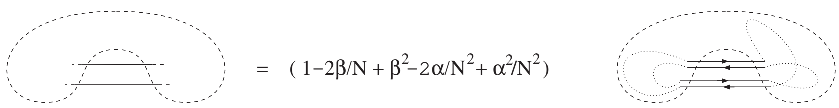


Figura 4.10: Eliminazione delle adiacenze multiple: caso generale.

diacenze e delle adiacenze multiple si traducono rispettivamente nelle due seguenti equazioni:

$$1-\alpha-\beta=0$$

$$1-\frac{2\beta}{N}+\beta^2-\frac{2\alpha}{N^2}+\frac{\alpha^2}{N^2}=0$$

Supponendo di aver scelto α e β in modo tale da soddisfare la prima equazione, dobbiamo mostrare che i termini in α servono soltanto a eliminare le autoadiacenze, e quindi che i grafi contenenti tagli non contano nello sviluppo di e_2 e e_1. Ciò è mostrato in figura 4.11 dove il lato evidenziato è supposto non essere un'autoadiacenza; l'equazione che ne risulta ha termini in α proporzionali a N^{-2} che non possono pertanto entrare in e_2 e e_1. Se α e β soddisfano la prima equazione vale perciò:

$$e_\chi=\sum_{\substack{G(\chi),\ connessi,\\ senza\ autoadiacenze}}\frac{1}{o(A(G))}\qquad per\ \chi=1,2$$

Resta da mostrare che, se α e β soddisfano la seconda equazione, i tagli non

[5] In effetti la dimostrazione del caso delle adiacenze multiple dovrebbe essere accompagnata da rifiniture analoghe a quelle esposte nel paragrafo 4.1.1; l'autore non vi è riuscito e pertanto manca una dimostrazione rigorosa.

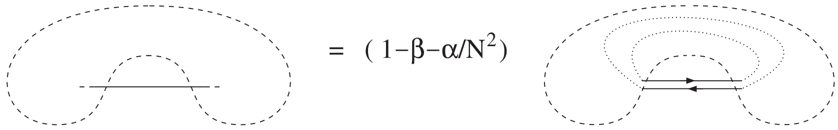


Figura 4.11: Contributo del lato se non è una autoadiacenza.

compaiono nei grafi G dello sviluppo di e_2 e e_1; infatti i grafi con tagli servono a eliminare l'adiacenza multipla qualora i due lati la costituiscano, ma se non la formano, come in figura 4.12, allora i termini in α sono proporzionali a N^{-2} e non possono entrare in e_2 o e_1. Scegliendo α e β in modo da soddisfare

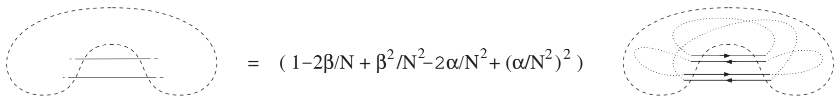


Figura 4.12: Contributo dei due lati se non sono una adiacenza multipla..

entrambe le equazioni eliminiamo sia le autoadiacenze, che le adiacenze multiple e come conseguenza otteniamo che i grafi G dello sviluppo topologico di e_2 e e_1 sono 1 e 2-irriducibili. La soluzione del sistema di equazioni è:

$$\begin{array}{llcl} \beta_\pm = & \frac{N \pm \mathrm{i}\sqrt{N^4-N^2-1}}{N^2+1} & \xrightarrow{N\to\infty} & \beta_\pm = \pm\mathrm{i} \\ \alpha_\pm = & 1-\beta_\pm & \xrightarrow{N\to\infty} & \alpha_\pm = 1\mp\mathrm{i} \end{array}$$

Se il propagatore ha i valori limite su scritti per α e β allora autoadiacenze e adiacenze multiple scompariranno non per qualunque valore di N, ma solo con il limite $N \to \infty$. Nel paragrafo seguente mostriamo come costruire una teoria con un propagatore con gli α e β voluti.

4.2.1 Integrale gaussiano per la teoria 1,2-irriducibile

Calcoliamo ($\mathrm{Re}(a+b)>0, \quad \mathrm{Re}(a-b)>0$):

$$I_{a,b} = \int \mathrm{d}A_{HT}\, \mathrm{e}^{-\frac{1}{4}\{a\mathrm{tr}A^2 + b\mathrm{tr}(A\,A^T)\} + \mathrm{tr}(AJ)}$$

con J matrice complessa qualunque. Si noti che l'integrando non è invariante sotto trasformazioni unitarie, ne segue che i relativi diagrammi non avranno linee orientate perchè il propagatore comprenderà anche i twist. Ogni matrice hermitiana si scrive $A = A_S + \mathrm{i}A_A$ con:

$$\begin{aligned} A_S &= \frac{A + A^T}{2} \\ A_A &= \frac{A - A^T}{2\mathrm{i}} \end{aligned}$$

dove A_S è una matrice simmetrica e A_A una matrice antisimmetrica. Inoltre:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}A_H &= \mathrm{d}A_S\, \mathrm{d}A_A \\ \mathrm{d}A_{HT} &= \mathrm{d}A_{ST}\, \mathrm{d}A_A \end{aligned}$$

e:

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}A^2 &= \mathrm{tr}A_S^2 - \mathrm{tr}A_A^2 \\ \mathrm{tr}(AA^T) &= \mathrm{tr}A_S^2 + \mathrm{tr}A_A^2 \\ \mathrm{tr}(AJ) &= \mathrm{tr}(A_S J) + \mathrm{tr}(A_A \mathrm{i}J) \end{aligned}$$

Sfruttando gli integrali gaussiani del caso simmetrico a traccia nulla e antisimmetrico:

$$I_{a,b}(J) = \frac{I_{ST}\left(\frac{J}{\sqrt{a+b}}\right)\, I_A\left(\frac{\mathrm{i}J}{\sqrt{a-b}}\right)}{(a+b)^{\frac{N^2+N-2}{4}}(a-b)^{\frac{N^2-N}{4}}}$$

$$I_{a,b} = f(a,b)\, \mathrm{e}^{\frac{a}{a^2-b^2}\mathrm{tr}J^2 + -\frac{b}{a^2-b^2}\mathrm{tr}(JJ^T) - \frac{(\mathrm{tr}J)^2}{N(a+b)}}$$

dove $f(a,b)$ non dipende da J. Per avere il propagatore:

$$\Delta = k\left\{\delta^{i_1}_{j_2}\delta^{j_1}_{i_2} - \beta\,\delta^{i_1}_{i_2}\delta^{j_1}_{j_2} - \frac{\alpha}{N}\,\delta^{j_1}_{i_1}\delta^{j_2}_{i_2}\right\}$$

con i desiderati α e β soggetti al solo vincolo, $1-\beta-\alpha=0$, e k costante qualunque, basta scegliere:

$$\begin{aligned} a &= \frac{2}{k(1-\beta^2)} \\ b &= \frac{2\beta}{k(1-\beta^2)} \end{aligned}$$

Se per α e β prendiamo i valori limite calcolati nel paragrafo precedente, e scegliamo $k = 1$ otteniamo:

$$\begin{aligned} a &= 1 \\ b &= \mathrm{i} \end{aligned}$$

che soddisfano alla disuguaglianza per la convergenza.

Non manca però l'esigenza di perfezionare la teoria 2-irriducibile siffatta, dalla dimostrazione della 2-irriducibilità, alla trattazione dello sviluppo topologico. Bisogna notare che la formula per lo sviluppo topologico per questa funzione di partizione è molto più difficile da ricavare di quella del caso simmetrico o antisimmetrico, a causa del peggiore comportamento nel ribaltamento dei vertici. In pratica risulta difficoltoso il calcolo della funzione moltiplicativa $f(G)$ del paragrafo 2.3.

4.3 Un modello 1-irriducibile e il teorema dei quattro colori

Abbiamo visto come affrontare il problema della 1-irriducibilità in modo generale facendo uso delle matrici a traccia nulla. Vogliamo qui considerare una soluzione alternativa [6] che raggiunge la 1-irriducibilità nel caso specifico di una teoria ϕ^3. E' evidente che in teorie con vertici cubici la comparsa dei tadpoles è dovuta, usando l'azione canonica $S(A) = \frac{1}{2}\mathrm{tr}A^2 - \frac{g}{3}\mathrm{tr}A^3$, ai seguenti fatti:

- Il termine libero $\frac{1}{2}\mathrm{tr}A^2$ implica che nello sviluppo in grafi i lati derivano dall'accoppiamento di una matrice A con una matrice A.
- L'interazione $-\frac{g}{3}\mathrm{tr}A^3$ determina il vertice cubico dove ad ogni lato uscente possiamo pensare associata una matrice A che verrà in seguito accoppiata.

Ne segue la possibilità di accoppiare matrici uscenti dallo stesso vertice in modo da formare i tadpoles.

Per eliminare i tadpoles usiamo un vertice in cui al posto di tre identiche matrici sostituiamo tre distinte matrici A, B, C; inoltre modifichiamo anche la parte libera in modo che ogni lato sia associato ad accoppiamenti $A - A$, $B - B$, $C - C$, ma non a accoppiamenti misti, in modo tale che le proiezioni uscenti da uno stesso vertice non possano unirsi tra loro perché relative a

[6] Abbiamo trattato questa teoria, nel caso scalare, nel primo capitolo.

matrici differenti.

L'integrale gaussiano. Il nostro integrale gaussiano è:

$$I_{ABC}(J_A, J_B, J_C) = \int \mathrm{d}A\,\mathrm{d}B\,\mathrm{d}C\,\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\mathrm{tr}(A^2+B^2+C^2)+\mathrm{tr}(AJ_A+BJ_B+CJ_C)}$$

dove A, B, C, sono matrici hermitiane e J_A, J_B, J_C, sono matrici complesse qualunque. Usando i risultati noti per le matrici hermitiane troviamo:

$$I_{ABC}(J_A, J_B, J_C) = \pi^{\frac{3}{2}N^2} 2^{\frac{3}{2}N}\,\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\mathrm{tr}(J_A^2+J_B^2+J_C^2)}$$

Propagatore.

$$< A^{i_1}_{j_1} A^{i_2}_{j_2} >=< B^{i_1}_{j_1} B^{i_2}_{j_2} >=< C^{i_1}_{j_1} C^{i_2}_{j_2} >= \delta^{i_1}_{j_1}\delta^{j_2}_{i_1}$$

mentre gli accoppiamenti misti sono nulli.

4.3.1 La funzione generatrice di Tait-colorazioni

La funzione generatrice del nostro modello è:

$$Z_{ABC}(J_A, J_B, J_C) = \int \mathrm{d}A\,\mathrm{d}B\,\mathrm{d}C\,\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\mathrm{tr}(A^2+B^2+C^2)+\frac{g}{\sqrt{N}}\{\mathrm{tr}(ABC)+\mathrm{tr}(ACB)\}}$$

Sviluppo topologico. Vediamo come sono fatti i grafi dello sviluppo topologico. La rappresentazione dei lati è sempre quella di una doppia linea orientata perché usiamo ancora le matrici hermitiane, tuttavia questa volta i lati saranno colorati in dipendenza dell'accoppiamento a cui si riferiscono, vedi figura 4.13, dove A, B, e C sono intesi come colori del lato. Per quanto

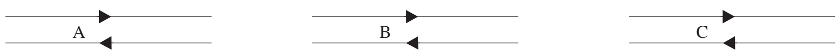


Figura 4.13: Rappresentazione dei lati nella teoria delle Tait-colorazioni.

riguarda i vertici l'interazione comprende due termini. Al primo $\frac{g}{\sqrt{N}}\mathrm{tr}(ABC)$ associamo il vertice di figura 4.14. Al secondo $\frac{g}{\sqrt{N}}\mathrm{tr}(ACB)$ associamo il vertice di figura 4.15. Il generico grafo che contribuirà nello sviluppo perturbativo sarà un un grafo di nastri cubico, orientabile, e tale che i sui lati possono essere colorati con tre colori in modo che su ogni vertice non convergano due colori uguali. Se un grafo può essere colorato in questo modo si chiama Tait-colorabile, ed ogni colorazione non isomorfa si chiama Tait-colorazione. Il concetto di isomorfismo è quello comunemente applicato per

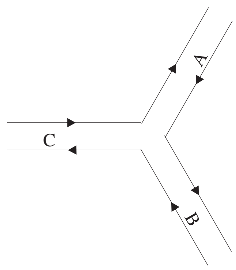


Figura 4.14: Il primo vertice colorato.

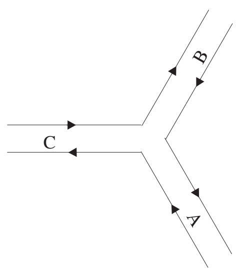


Figura 4.15: Il secondo vertice colorato.

i grafi di nastri solo che in più richiediamo che i lati vadano in lati dello stesso colore. Indicheremo con T la generica Tait-colorazione, mentre con G indicheremo il soggiacente grafo di nastri non colorato. La formula per lo sviluppo topologico si scrive infine:

$$\frac{Z_{ABC}(g)}{Z_{ABC}(0)} = \sum_{Tait-colorazioni\ T} \frac{g^{V(T)} N^{\chi(T)}}{o(A(T))}$$

1-irriducibilità. Vogliamo mostrare che questa teoria, nata per eliminare i tadpoles, gode di una proprietà più forte: la 1-irriducibilità. Sia per assurdo e un ponte di T, evidenziato in figura 2.16, sia inoltre T_1 il sottografo tratteggiato alla destra di e; esso non comprende e ma comprende il suo vertice destro. Supponiamo che e sia colorato A e sia v_1 il numero di vertici di T_1, e I_{A1},I_{B1} i lati di T_1 colorati con A e B. Considerando che ogni vertice di T_1 genera un lato per ogni colore (eccetto l'estremità destra di e che non genera A perchè e non appartiene a T_1) ognuno dei quali ha due estremità distinte, abbiamo:

$$\begin{aligned} 2I_{B1} &= v_1 \\ 2I_{A1} &= v_1 - 1 \end{aligned}$$

da cui segue che v_1 è sia pari che dispari, perciò non può esistere una Tait-colorazione con un ponte. Questa dimostrazione è indipendente dal fatto che la teoria si scalare o matriciale.

Il legame con il teorema dei quattro colori. Per i nostri fini questa teoria può esserci utile come descrizione alternativa della gravità solo se è in grado di generare almeno tutti i grafi planari. A tal fine dobbiamo dimostrare che ogni grafo planare, cubico, senza ponti, è Tait-colorabile. Questo problema fu introdotto per la prima volta da Tait e va sotto suo nome:

Congettura di Tait. *Ogni grafo planare, cubico, senza ponti, è Tait-colorabile.*

In seguito dimostrò che questa congettura è equivalente alla congettura ben più famosa:

Congettura dei quattro colori. *Ogni mappa planare può essere colorata con quattro colori in modo che non vi siano due regioni adiacenti con lo stesso colore.*

che è stata dimostrata da Appel e Haken nel '76. La dimostrazione di Tait è abbastanza semplice, [24], consiste nel mostrare che ad ogni grafo cubico planare senza ponti corrisponde una mappa i cui lati costituiscono il grafo stesso, e nel mostrare come si possa passare da una colorazione della mappa ad una Tait-colorazione del grafo e viceversa.

Dato un grafo G ogni sua Tait-colorazione contribuisce in modo diverso allo sviluppo topologico perchè ognuna avrà un differente ordine del gruppo di automorfismi. Tuttavia, se i grafi hanno molti vertici, è già stato mostrato che il loro ordine del gruppo di automorfismi può essere approssimato a 1; in tal caso se $e_2(g) = \sum_v g^v \, e_{2v}$ allora per grandi v:

$$e_{2v} = \sum_{\substack{G \text{ connessi, planari,} \\ 1-\text{irriducibili con } v \text{ vertici}}} P(L(G), 3)$$

dove $P(L(G), 3)$ è il numero di Tait-colorazioni del grafo G, espresso mediante l'uso del polinomio cromatico associato al grafo $L(G)$. In generale, anche per valori piccoli di v, nell'equazione precedente il primo membro è più piccolo del secondo membro. Il grafo $L(G)$ associato a G si ottiene prendendo come vertici i lati di G e connettendo due di questi "vertici" se i corrispondenti lati in G si incontrano in uno o due punti. Il lettore interessato può trovare informazioni sui polinomi cromatici in [24], [27], essi sono molto studiati e il calcolo del limite inferiore di una loro somma, come suggerito dall'equazione su scritta, sarebbe di per sé interessante. Dal punto di vista della gravità la precedente approssimazione si realizza nei pressi del punto critico, dove il passaggio al continuo implica la maggiore importanza dei grafi con grande numero di vertici; in quel limite abbiamo:

$$e_2(g) == \sum_{\substack{G \text{ connessi, planari,} \\ 1-\text{irriducibili}}} g^{V(G)} P(L(G), 3)$$

Questa espressione coincide con quella della gravità vista nel terzo capitolo, eccetto che per il fattore sulle Tait-colorazioni. Ad ogni modo avevamo già discusso come sulla natura di tale fattore potessero esservi divergenze, non è escluso pertanto che, limitandosi alla somma sulle superfici planari, una teoria colorata come quella esposta possa avere un certo interesse nello studio della 2D-Gravity.

4.3.2 Integrazione della funzione di partizione.

La prima integrazione in dA può essere svolta come un normale integrale gaussiano, ottenendo:

$$Z_{ABC}(g) = \pi^{N^2/2} 2^{N/2} \int \mathrm{d}B\, \mathrm{d}C\, \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\mathrm{tr}(B^2+C^2)+\frac{g^2}{N}\{\mathrm{tr}(BCBC)+\mathrm{tr}(B^2C^2)\}}$$

Vediamo che il nostro modello si riduce ad un modello a due matrici con interazione quartica. I grafi che si ottengono dal suo sviluppo perturbativo sono quelli che derivano dalle Tait-colorazioni per contrazione dei lati relativi all'accoppiamento $A - A$.

Diagonalizzando B, $U^{-1}BU = \lambda$, con il cambio di variabili abbiamo:

$$Z_{ABC}(g) = \pi^{N^2/2} 2^{N/2} k_H \int \mathrm{d}\lambda\, \Delta^2(\lambda) \int \mathrm{d}C\, \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\mathrm{tr}(\lambda^2+C^2)+\frac{g^2}{N}\{\mathrm{tr}(\lambda C\lambda C)+\mathrm{tr}(\lambda^2C^2)\}}$$

dove abbiamo sfruttato l'invarianza per trasformazioni unitarie di dC. A questo punto notiamo che valgono le seguenti identità:

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}(\lambda^2 C^2) &= \sum_{i=1}^{N} \lambda_i^2 \sum_{j}^{N} \{(\mathrm{Re}C_{ij})^2 + (\mathrm{Im}C_{ij})^2\} \\
\mathrm{tr}(\lambda C \lambda C) &= \sum_{i,j}^{N} \lambda_i \lambda_j \{(\mathrm{Re}C_{ij})^2 + (\mathrm{Im}C_{ij})^2\} \\
\mathrm{tr}(\lambda^2 C^2 + \lambda C \lambda C) &= \sum_{i<j}^{N} (\lambda_i + \lambda_j)^2 \{(\mathrm{Re}C_{ij})^2 + (\mathrm{Im}C_{ij})^2\} + \sum_{i=1}^{N} 2\lambda_i^2 C_{ii}^2
\end{aligned}$$

L'integrale nelle variabili ReC_{ij}, ImC_{ij}, è gaussiano e può essere svolto sostituendovi il valore di k_H. Troviamo infine:

$$\frac{Z_{ABC}(g)}{Z_{ABC}(0)} = \frac{(2\pi)^{-\frac{N}{2}}}{\prod_{j=1}^{N} j!} \int \mathrm{d}\lambda \, \frac{\Delta^2(\lambda)\, \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\mathrm{tr}\lambda^2}}{\prod_{i<j}\{1 - \frac{g^2}{N}(\lambda_i + \lambda_j)^2\} \prod_i \sqrt{1 - \frac{4g^2}{N}\lambda_i^2}}$$

qui la radice è calcolata nel ramo con $\sqrt{1} = 1$. Siamo riusciti a ridurre l'integrale da $3N^2$ a N variabili, si noti che per motivi di convergenza abbiamo supposto g immaginaria. Questo integrale è molto difficile perchè sul piano complesso presenta sia tagli che singolarità, e non può essere risolto con il metodo dei polinomi ortogonali perché l'argomento non si fattorizza negli autovalori; quanto abbiamo esposto può essere considerato come un primo passo verso la sua risoluzione, magari perturbativamente in g.

4.4 Approfondimento della 1-irriducibilità

Abbiamo visto nel paragrafo 4.1.1 come utilizzare l'integrazione sulle matrici a traccia nulla per eliminare le autoadiacenze. In questa sezione vogliamo ritrovare lo stesso risultato percorrendo una via leggermente differente; il nuovo approccio renderà il calcolo della funzione generatrice dei grafi connessi, planari, senza ponti più semplice, in quanto consentirà l'utilizzo del metodo dei polinomi ortogonali esposto nel capitolo seguente. Cominciamo con il considerare l'integrale gaussiano:

$$I(J, \bar{\alpha}) = \int = \mathrm{d}A_H \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\bar{\alpha}\mathrm{tr}A - \frac{1}{2}\mathrm{tr}A^2 + \mathrm{tr}(JA)} = \pi^{N^2/2} 2^{N/2} \mathrm{e}^{-\frac{N}{2}\bar{\alpha}^2} \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\mathrm{tr}J^2 + \mathrm{i}\,\bar{\alpha}\mathrm{tr}J}$$

Come si vede, la parte libera contiene un termine lineare in tr$J$, ciò implica che una qualunque funzione di partizione con questa parte libera non può avere lo stesso sviluppo topologico considerato nel primo capitolo, perché adesso non è più necessario, nell'accoppiamento delle derivate, che ogni derivata sia "eliminata" da un'altra. Questa volta una derivata può "autoeliminarsi" portando giù, anzichè il termine quadratico, il termine lineare in tr$J$. In tal caso $\frac{\partial}{\partial J^i_j}$ porta giù un fattore i$\bar{\alpha}\delta^j_i$; graficamente l'effetto è quello di consentire la chiusura di una proiezione su se stessa come mostrato in figura 4.16.

I grafi G' possono avere proiezioni unite da un lato, oppure chiuse, i grafi G si ottengono dai G' per eliminazione degli indici; bisogna fare attenzione che la definizione di automorfismo risulta differente rispetto al comune caso hermitiano, dobbiamo sempre aggiungere che le proiezioni chiuse vadano in proiezioni chiuse. La nostra funzione di partizione è:

$$Z(\mathbf{g}, \alpha) = \int \mathrm{d}A_H \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\alpha\sqrt{N}\,\mathrm{tr}A - \frac{1}{2}\mathrm{tr}A^2 + \sum_{i=3}^{k} \frac{g_i}{iN^{\frac{i}{2}-1}}\,\mathrm{tr}A^i}$$

dove abbiamo introdotto la variabile $\alpha = \bar{\alpha}/\sqrt{N}$. Lo sviluppo topologico diventa:

$$\frac{Z(\mathbf{g},\alpha)}{Z(\mathbf{0},\alpha)} = \sum_{G'} \frac{N^{\chi(G)} \prod_{i=3}^{k} g_i^{V_i(G)}}{o(P_p(G))} (\mathrm{i}\alpha)^{c(G)} = \sum_{G} \frac{N^{\chi(G)} \prod_{i=3}^{k} g_i^{V_i(G)}}{o(A(G))} (\mathrm{i}\alpha)^{c(G)}$$

dove, $o(P_p(G)) = \prod_i V_i!\, i^{V_i}$, e, $c(G)$, è il numero di proiezioni chiuse di G mentre $\chi(G)$ è la caratteristica di Eulero [7] di G. Il gruppo di automorfismi $A(G)$ va infine calcolato tenendo conto, come detto, che ogni proiezione chiusa deve andare in una proiezione chiusa.

4.4.1 La seconda via

Ricaviamo il noto risultato che l'integrazione sulle matrici a traccia nulla elimina le autoadiacenze. Possiamo riscrivere la funzione di partizione per la

[7] Il modo più veloce per dimostrare la presenza di questo fattore è ancora una volta la sostituzione $A \to \sqrt{N}A$.

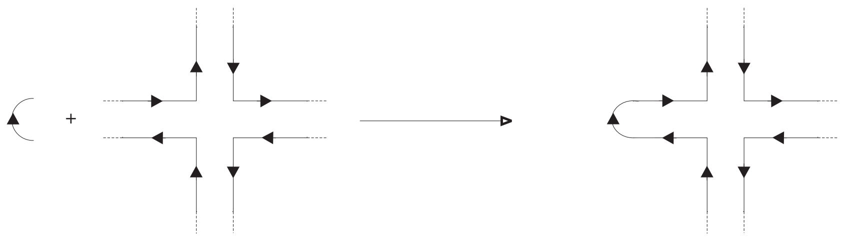


Figura 4.16: Chiusura di una proiezione del vertice.

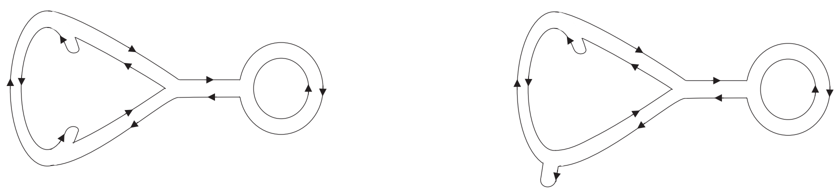


Figura 4.17: Grafi non isomorfi con $\chi = 2$.

teoria a traccia nulla nella forma:

$$
\begin{aligned}
\frac{Z_{HT}(\mathbf{g})}{Z_{HT}(\mathbf{0})} &= \frac{1}{I_{HT}(0)} \int \frac{\mathrm{d}\bar{\alpha}}{2\pi} Z(\mathbf{g}, \bar{\alpha}/\sqrt{N}) \\
&= \sqrt{N} \int \frac{\mathrm{d}\bar{\alpha}}{\sqrt{2\pi}}\, \mathrm{e}^{-\frac{N}{2}\bar{\alpha}^2} \sum_{G'} \frac{N^{\chi(G)} \prod_{i=3}^{k} g_i^{V_i(G)}}{o(P_p(G))} \left(\frac{\mathrm{i}\alpha}{\sqrt{N}}\right)^{c(G)} \\
&= \sqrt{N} \int \frac{\mathrm{d}\bar{\alpha}}{\sqrt{2\pi}}\, \mathrm{e}^{-\frac{N}{2}\bar{\alpha}^2} \sum_{G} \frac{N^{\chi(G)} \prod_{i=3}^{k} g_i^{V_i(G)}}{o(A(G))} \left(\frac{\mathrm{i}\alpha}{\sqrt{N}}\right)^{c(G)}
\end{aligned}
$$

Qui l'integrale gaussiano in $\bar{\alpha}$ può essere facilmente eseguito ottenendo un'interessante formula per lo sviluppo topologico nel caso di matrice hermitiana a traccia nulla:

$$
\begin{aligned}
\frac{Z_{HT}(\mathbf{g})}{Z_{HT}(\mathbf{0})} &= \sum_{\substack{G' \ con \ c(G) \\ pari:\ c(G)=2t(G)}} \frac{N^{\chi(G)} \prod_{i=3}^{k} g_i^{V_i(G)}}{o(P_p(G))} \left(\frac{-1}{N^2}\right)^{t(G)} \frac{(2t(G))!}{2^{t(G)} t(G)!} \\
&= \sum_{\substack{G \ con \ c(G) \\ pari:\ c(G)=2t(G)}} \frac{N^{\chi(G)} \prod_{i=3}^{k} g_i^{V_i(G)}}{o(A(G))} \left(\frac{-1}{N^2}\right)^{t(G)} \frac{(2t(G))!}{2^{t(G)} t(G)!}
\end{aligned}
$$

Tuttavia queste equazioni sono ancora oscure, ciò è dovuto al fatto che mentre nel paragrafo 4.1.1 sommavamo i contributi dei grafi a partire dall'*alto*, cioè ogni grafo contribuiva anche per tutti i grafi che si ottenevano da esso in tutti i modi possibili tagliandone i lati, adesso il procedimento di somma è ribaltato. Qui sommiamo dal *basso*, cioè la somma è su tutti i grafi che si ottengono a seguito di tagli, e ognuno contribuisce anche per tutti i grafi che tagliati danno quel grafo. Per ricavare la comune espressione è sufficiente calcolare il precedente integrale in $\bar{\alpha}$ graficamente, cioè con la somma sugli accoppiamenti delle $\bar{\alpha}$. I grafi G' che danno un contributo non nullo hanno un numero pari di proiezioni ognuna delle quali porta una fattore $\bar{\alpha}$, e i contributi all'integrale, sotto forma di accoppamenti di $\bar{\alpha}$, possono essere immaginati attaccati a tali estremità, ogni termine individua perciò un grafo integro che tagliato fornisce il nostro grafo G'. In questo modo riconosciamo nelle espressioni precedenti la stessa usata nel paragrafo 4.1.1.

4.4.2 Compatibilità con il metodo dei polinomi ortogonali

Nel seguente capitolo esporremo come, attraverso il metodo dei polinomi ortogonali sia possibile calcolare:

$$e_2(\mathbf{g},\alpha) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N^2} \ln \frac{Z(\mathbf{g},\alpha)}{Z(\mathbf{0},\alpha)}$$

Vogliamo ricavare la funzione generatrice per i grafi planari, connessi, senza ponti, usando $e_2(\mathbf{g},\alpha)$; anzitutto notiamo che:

$$\mathrm{e}^{N^2 e_2(\mathbf{g},\alpha)} = \sum_{G\ planari} \frac{N^{\chi(G)} \prod_{i=3}^{k} g_i^{V_i(G)}}{o(A(G))} (\mathrm{i}\alpha)^{c(G)}$$

Adesso osserviamo che integrando in $\mathrm{d}\bar{\alpha}$ possiamo applicare i ragionamenti della sezione precedente riportando la somma dall'*alto*, inoltre si noti che i contributi derivanti dai tagli di un grafo planare sono sempre planari perchè i grafi restano planari a seguito del taglio. Infine la funzione generatrice cercata si scrive:

$$e_{2T}(\mathbf{g}) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N^2} \ln \int \frac{N\,\mathrm{d}\alpha}{\sqrt{2\pi}}\, \mathrm{e}^{-\frac{N^2}{2}\alpha^2 + N^2 e_2(\mathbf{g},\alpha)}$$

Qui e_{2T} sta per la funzione generatrice dei grafi connessi, planari, senza autoadiacenze. L'integrale a secondo membro può essere calcolato con metodi di sella sfruttando i grandi valori di N. Infine lo sviluppo topologico di $e_{2T}(\mathbf{g})$ si scrive:

$$e_{2T}(\mathbf{g}) = \sum_{\substack{G\ planari,\\ connessi,\ senza\ ponti}} \frac{\prod_{i=3}^{k} g_i^{V_i(G)}}{o(A(G))}$$

Dove ricordiamo che nel caso planare l'assenza di autoadiacenze è equivalente all'assenza di ponti.

Capitolo 5

Il metodo dei polinomi ortogonali

Abbiamo visto come calcolare la generica funzione di partizione attraverso lo sviluppo perturbativo; in questo capitolo ci occuperemo del calcolo esplicito dell'integrale mediante l'uso delle tecniche standard dell'integrazione e di un particolare metodo noto come *metodo dei polinomi ortogonali*.

5.1 Il metodo dei polinomi ortogonali

Il metodo dei polinomi ortogonali consente il calcolo della funzione $e_2(\mathbf{g},\alpha)$ nel caso hermitiano con un vertice qualunque [1], motivi legati alla buona definizione della funzione di partizione impongono però che se il potenziale ha più tipi di vertici, quello di valenza più alta sia pari con costante di accoppiamento avente parte reale positiva. La novità nella nostra trattazione consiste nello sviluppare il metodo dei polinomi ortogonali anche per potenziali con termini dispari, e nel considerare un termine lineare in $\mathrm{tr}M$ per applicare i nostri risultati sulla 1-irriducibilità. Introduciamo:

$$\begin{aligned} S(M) &= -\mathrm{i}\alpha\sqrt{N}M + \frac{1}{2}M^2 - V(M) \\ V(M) &= \sum_{j=3}^{k} \frac{g_j}{jN^{\frac{j}{2}-1}}M^j \qquad \textit{con } k \textit{ pari e } \mathrm{Re}(g_k) > 0 \end{aligned}$$

Useremo anche le variabili $\bar{g}_i = \frac{g_i}{N^{\frac{i}{2}-1}}$, e, $\bar{\alpha} = \frac{\alpha}{\sqrt{N}}$. La nostra funzione di partizione è:

$$Z_N(\mathbf{g},\alpha) = \int \mathrm{d}M\,\mathrm{e}^{-\mathrm{tr}S(M)} = k_H \int \mathrm{d}\lambda\,\Delta^2(\lambda)\mathrm{e}^{-\sum_i S(\lambda_i)}$$

[1]Alcuni autori hanno calcolato anche le funzioni e_0 e e_{-2} per vertici quartici, [3], [5]

Come si vede l'argomento dell'integrale è il prodotto del determinante di Vandermonde quadrato per una funzione fattorizzabile negli autovalori, questo è ciò che rende il metodo dei polinomi ortogonali applicabile. Una volta ottenuta la funzione $e_2(\mathbf{g}, \alpha)$ potremo porre $\alpha = 0$ ricavando la funzione generatrice dei soli grafi planari connessi, oppure eseguire, sfruttando i nostri risultati sulla 1-irriducibilità, il calcolo di:

$$e_{2T}(\mathbf{g}) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N^2} \ln \int \frac{N\,\mathrm{d}\alpha}{\sqrt{2\pi}}\, \mathrm{e}^{N^2(-\frac{1}{2}\alpha^2 + e_2(\mathbf{g},\alpha))}$$

Qui e_{2T} sta per la funzione generatrice dei grafi connessi, planari, senza autoadiacenze. Introduciamo la misura $\mathrm{d}\mu(\lambda) = \mathrm{d}\lambda\, \mathrm{e}^{-S(\lambda)}$ dove qui λ è una sola variabile, e i polinomi ortogonali $P_n(\lambda)$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\mu(\lambda)\, P_n(\lambda) P_m(\lambda) = h_n \delta_{nm}$$

dove $P_n(\lambda)$ è normalizzato dalla condizione che il coefficiente del termine di ordine più alto sia uguale all'unità:

$$P_n(\lambda) = \lambda^n + \dots$$

L'esistenza dei $P_n(\lambda)$ è assicurata in modo costruttivo procedendo all'ortogonalizzazione di Gram-Schmidt dei monomi: 1, λ, λ^2, ... Un'analisi più dettagliata di questo procedimento mostra che i polinomi P_j hanno parità definita $(-1)^j$ se l'azione $S(\lambda)$ è pari. Ogni polinomio di grado n si può senz'altro scrivere come combinazione lineare dei polinomi ortogonali P_j con $j \leq n$. Una osservazione molto importante relativamente al determinante di Vandermonde è:

$$\Delta = \det \parallel \lambda_i^{j-1} \parallel = \det \parallel P_{j-1}(\lambda_i) \parallel = \sum_{\sigma} (-1)^{p(\sigma)} \prod_{i}^{N} P_{\sigma(i)-1}(\lambda_i)$$

La seconda uguaglianza segue ricordando che aggiungere a una colonna una combinazione lineare delle altre colonne non cambia il determinante della matrice, inoltre $(-1)^{p(\sigma)}$ rappresenta il segno della permutazione σ. Possiamo sfruttare l'accoppiamento [2] dei polinomi ortogonali derivanti dal Δ^2 per ottenere la funzione di partizione in termini della norma dei polinomi

[2] Qui si usa la presenza del determinante di Vandermonde al quadrato, per questo il metodo non funziona nel caso simmetrico.

ortogonali:

$$\begin{aligned}
Z_N(\mathbf{g},\alpha) &= k_H \sum_{\sigma_1,\ \sigma_2} (-1)^{p(\sigma_1)}(-1)^{p(\sigma_2)} \prod_i^N \int \mathrm{d}\mu(\lambda_i)\, P_{\sigma 1(i)-1}(\lambda_i) P_{\sigma 2(i)-1}(\lambda_i) \\
&= k_H \sum_{\sigma_1,\ \sigma_2} (-1)^{p(\sigma_1)}(-1)^{p(\sigma_2)} \delta_{\sigma_1 \sigma_2} \prod_i h_{\sigma_1(i)-1} = k_H N!\, h_0 h_1 \ldots h_{N-1}
\end{aligned}$$

Vogliamo riscrivere questa espressione in una forma alternativa. Mediante il procedimento di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt otteniamo:

$$\lambda P_n(\lambda) = P_{n+1}(\lambda) + A_n P(\lambda) + R_n P_{n-1}(\lambda)$$

non vi sono polinomi di grado inferiore a $n-1$ perchè moltiplicati per λ non possono raggiungere il grado n. Nel caso in cui $S(\lambda)$ è pari A_n si annulla. Diremo l'equazione precedente *equazione di gradino* perchè una sua ripetuta applicazione consente di calcolare $\lambda^i P_n(\lambda)$ usando un'analogia con tutte le possibili scale lunghe i passi; questo metodo verrà esposto nel paragrafo seguente. Poiché:

$$\begin{aligned}
h_{n+1} &= \int \mathrm{d}\mu(\lambda)\, P_{n+1} \lambda P_n(\lambda) = \\
&= \int \mathrm{d}\mu(\lambda)\, [P_{n+2}(\lambda) + A_{n+1} P_{n+1}(\lambda) + R_{n+1} P_n(\lambda)] P_n(\lambda) = R_{n+1} h_n
\end{aligned}$$

La funzione di partizione si riscrive:

$$Z_N(\mathbf{g},\alpha) = k_H N!\, h_0^N R_1^{N-1} \ldots R_{N-2}^2 R_{N-1}$$

dove $h_0 = \int \mathrm{d}\mu(\lambda)$. Prima di passare al limite per grandi N, dobbiamo calcolare:

$$E_N(\mathbf{g},\alpha) = \frac{1}{N^2} \ln \frac{Z_N(\mathbf{g},\alpha)}{Z_N(\mathbf{0},\alpha)} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \left(1 - \frac{n}{N}\right) \ln \frac{R_n(\mathbf{g},\alpha)}{R_n(\mathbf{0},\alpha)} + \frac{1}{N} \ln \frac{h_0(\mathbf{g},\alpha)}{h_0(\mathbf{0},\alpha)}$$

Dimostriamo che il secondo addendo è trascurabile calcolandolo con gli stessi metodi perturbativi sviluppati nella sezione 4.4. Otteniamo:

$$\ln \frac{h_0(\mathbf{g},\alpha)}{h_0(\mathbf{0},\alpha)} = \sum_{G \ connessi} \frac{N^{\chi(G)-F} \prod_i g_i^{V_i}}{o(A(G))} (\mathrm{i}\,\alpha)^{c(G)}$$

Si noti che il fattore N^{-F} segue poiché l'integrazione non è su una matrice, ma sulla unica variabile λ, pertanto la traccia delle delta dà un fattore 1 e non un fattore N. Se $\alpha = 0$ contribuiscono solo i grafi senza chiusure, in tal caso poichè $\chi(G) - F = -\sum_{i=3} V_i(\frac{i}{2} - 1) \leq -1$, abbiamo:

$$\frac{1}{N} \ln \frac{h_0(\mathbf{g}, \alpha)}{h_0(\mathbf{0}, \alpha)} = O(N^{-2})$$

ed è trascurabile come volevamo dimostrare. Se $\alpha \neq 0$, il secondo addendo risulta trascurabile quando consideriamo la successiva integrazione in $\mathrm{d}\alpha$. In tal caso ogni coppia $\alpha - \alpha$ contribuisce di un fattore $1/N^2$ e pertanto, fin dall'inizio, possiamo stimare il contributo in potenze di N di ciascun grafo sostituendo ad α un $1/N$. In questo modo è facile rendersi conto che, chiamando:

$$\begin{aligned} b_N(\mathbf{g}, \alpha) &= \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \left(1 - \frac{n}{N}\right) \ln \frac{R_n(\mathbf{g}, \alpha)}{R_n(\mathbf{0}, \alpha)} \\ b(\mathbf{g}, \alpha) &= \lim_{N \to \infty} b_N(\mathbf{g}, \alpha) \end{aligned}$$

la funzione generatrice dei grafi connessi, planari, senza autoadiacenze è:

$$e_{2T}(\mathbf{g}) = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N^2} \ln \int \frac{N\,\mathrm{d}\alpha}{\sqrt{2\pi}} \, \mathrm{e}^{N^2(-\frac{1}{2}\alpha^2 + b(\mathbf{g}, \alpha))} = b(\mathbf{g}, \alpha_0) - \frac{\alpha_0^2}{2}$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo calcolato il limite approssimando l'argomento ad una gaussiana (metodo di steepest descents [3]), e α_0 è determinato dall'equazione:

$$\alpha_0 = \frac{\partial b}{\partial \alpha}(\mathbf{g}, \alpha_0)$$

In ogni caso, poiché $e_2(\mathbf{g}, 0) = b(\mathbf{g}, 0)$, il calcolo di $b(\mathbf{g}, \alpha)$ è quanto resta per la risoluzione, sia del caso connesso planare, che del caso connesso, planare, senza autoadiacenze.

5.2 Il numero di cammini

Nel seguito avremo bisogno delle quantità β_n^i definite da:

$$h_n \beta_n^i = \int \mathrm{d}\mu(\lambda) \, P_n(\lambda) \lambda^i P_{n-1}(\lambda)$$

[3] In effetti poiché in generale l'argomento dell'integrale è complesso, l'integrazione non avviene sull'asse reale e queste formule debbono essere prese con la dovuta cautela; il metodo da utilizzare, in tutti i suoi dettagli, è chiaramente esposto in [26].

Dedicheremo il paragrafo al calcolo di questo integrale. Il metodo consiste nel focalizzare l'attenzione su $P_{n-1}\lambda$. Per calcolare λP_{n-1} è sufficiente applicare l'equazione di gradino: se scegliamo il termine in P_n diremo di essere saliti, a seguito di un passo, di un gradino; se scegliamo il termine in P_{n-1} restiamo allo stesso livello; se scegliamo il termine in P_{n-2} siamo scesi di un gradino. A questo punto riapplichiamo lo stesso procedimento dal punto in cui siamo arrivati e infine integriamo. Affinché l'integrale sia non nullo, solo le scale con i passi che infine terminano un gradino sopra quello iniziale (al livello n) contano. Vogliamo calcolare il contributo di ogni scala. Anzitutto l'integrazione finale fornisce un fattore h_n qualunque sia il percorso seguito, inoltre fissata una data scala, per l'equazione di gradino, ogni volta che facciamo un passo in alto prendiamo un fattore 1, ogni volta che restiamo nello stesso livello j prendiamo un fattore A_j, e ogni volta che scendiamo un gradino , dal livello j al livello $j-1$, prendiamo un fattore R_j. La figura 5.1 mostra un esempio di calcolo di β^i utilizzando questo metodo. Poichè ogni

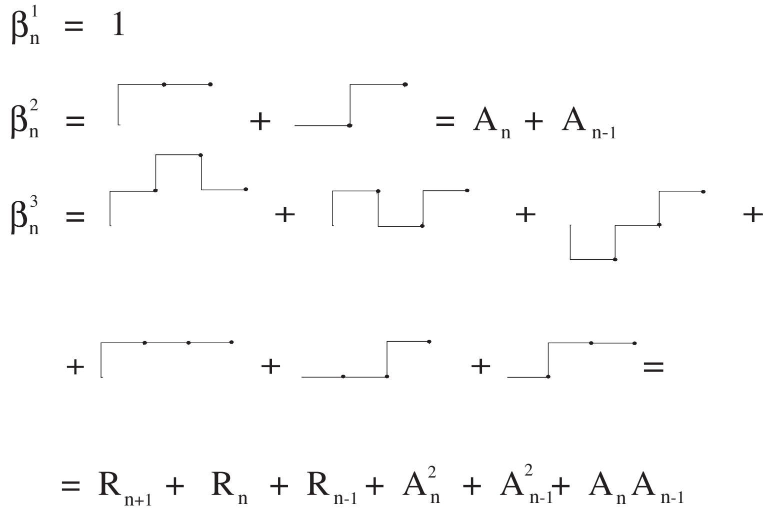


Figura 5.1: Calcolo di β^i_n usando le scale.

variabile A_j, R_j, dipende dal livello in cui ci si trova sarebbe molto ardua un'espressione esplicita per β^i_n; fortunatamente, come vedremo nel seguito, una ragionevole approssimazione ci consentirà di trascurare le differenze fra i valori assunti da queste quantità in scalini differenti. Ci interesserà pertanto l'espressione di β^i_n supponendo che ogni passo allo stesso livello porti una variabile A e ogni passo in basso una variabile B. Quante sono le scale di i passi il cui effetto finale è quello di salire di un solo gradino? Siano j i passi di tipo A (stazionari), allora gli altri $i-j$ passi sono divisi in p passi verso l'alto e $p-1$ passi verso il basso, quindi $i = j + 2p - 1$. Se non consideriamo i passi di tipo A vi sono $\binom{2p-1}{p}$ scale di $2p-1$ passi il cui effetto è di salire di un solo livello. Adesso all'interno di queste scale devo disporre i j piani di tipo A: vi sono $2p$ posti dove disporre questi piani, e fissata la scala vi sono $\binom{2p+j-1}{j}$ possibilità. Infine il numero di scale di i passi il cui effetto è quello di salire di un solo livello è:

$$\sum_{p=1}^{\leq \frac{i+1}{2}} \frac{i!}{(i-2p+1)!p!(p-1)!}$$

E β^i si scrive, nell'approssimazione suddetta:

$$\tilde{\beta}^i = \sum_{p=1}^{\leq \frac{i+1}{2}} \frac{i!}{(i-2p+1)!p!(p-1)!} A^{i-2p+1} R^{p-1}$$

Dove la tilde ricorda l'approssimazione. I valori più piccoli sono:

$$\begin{aligned} \tilde{\beta}^1 &= 1 \\ \tilde{\beta}^2 &= 2A \\ \tilde{\beta}^3 &= 3A^2 + 3R \\ \tilde{\beta}^4 &= 4A^3 + 12AR \end{aligned}$$

In modo analogo definiamo:

$$h_{n+1}\gamma_n^i = \int \mathrm{d}\mu(\lambda)\, P_{n+1}(\lambda)\lambda^i P_{n-1}(\lambda)$$

Con le stesse tecniche ed approssimazioni usate per β_n^i troviamo:

$$\tilde{\gamma}^i = \sum_{p=2}^{\leq \frac{i}{2}+1} \frac{i!}{(i-2p+2)!p!(p-2)!} A^{i-2p+2} R^{p-2}$$

I valori più piccoli sono:

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}^2 &= 1 \\ \tilde{\gamma}^3 &= 3A \\ \tilde{\gamma}^4 &= 3A^2 + 4R \end{aligned}$$

5.3 Il limite continuo

Consideriamo la seguente identità:

$$\begin{aligned}
nh_n &= \int \mathrm{d}\mu(\lambda)\, \lambda P_n'(\lambda) P_n(\lambda) \\
&= \int \mathrm{d}\mu(\lambda)\, P_n'(\lambda)\, [P_{n+1}(\lambda) + R_n P_{n-1}(\lambda) + A_n P_n(\lambda)] \\
&= R_n \int \mathrm{d}\lambda\, \mathrm{e}^{-S(\lambda)} P_n'(\lambda) P_{n-1}(\lambda) \\
&= R_n \int \mathrm{d}\lambda\, \mathrm{e}^{-S(\lambda)} S'(\lambda) P_n(\lambda) P_{n-1}(\lambda) \\
&= h_n R_n (1 - \sum_{i=3}^{k} \bar{g}_i \beta_n^{i-1})
\end{aligned}$$

Dove nella penultima uguaglianza abbiamo integrato per parti, e nell'ultima abbiamo usato la definizione di β_n^i. Abbiamo trovato la *prima equazione discreta*:

$$n = R_n (1 - \sum_{i=3}^{k} \bar{g}_i \beta_n^{i-1})$$

Da questa equazione deduciamo il caso particolare: $R_n(\mathbf{0}, \alpha) = n$. Vogliamo trovare una seconda equazione che colleghi i coefficienti A_n e R_n e che magari coinvolga anche la variabile α. Notiamo che:

$$\begin{aligned}
\int \mathrm{d}\lambda\, \mathrm{e}^{-S(\lambda)} \lambda P_n(\lambda) P_{n+1}'(\lambda) &= \int \mathrm{d}\lambda\, \mathrm{e}^{-S(\lambda)} P_n(\lambda) \lambda S'(\lambda) P_{n+1}(\lambda) \\
&= h_{n+1} (-\mathrm{i}\alpha\sqrt{N} + A_n + A_{n+1} - \sum_{i=3}^{k} \bar{g}_i \beta_{n+1}^i)
\end{aligned}$$

D'altra parte:

$$\begin{aligned}
\int \mathrm{d}\lambda\, \mathrm{e}^{-S(\lambda)} \lambda P_n(\lambda) P_{n+1}'(\lambda) &= nA_n h_n + R_n \int \mathrm{d}\lambda\, \mathrm{e}^{-S(\lambda)} P_{n-1}(\lambda) P_{n+1}'(\lambda) \\
&= nA_n h_n + R_n \int \mathrm{d}\lambda\, \mathrm{e}^{-S(\lambda)} P_{n-1}(\lambda) S'(\lambda) P_{n+1}(\lambda) \\
&= nA_n h_n - h_{n+1} R_n \sum_{i=3}^{k} \bar{g}_i \gamma_n^{i-1}
\end{aligned}$$

Ne ricaviamo la *seconda equazione discreta*:

$$R_{n+1}(-\mathrm{i}\alpha\sqrt{N} + A_n + A_{n+1} - \sum_{i=3}^{k} \bar{g}_i \beta_{n+1}^i) = nA_n - R_{n+1} R_n \sum_{i=3}^{k} \bar{g}_i \gamma_n^{i-1}$$

Per calcolare i coefficienti A_n e R_n sfruttiamo il cosiddetto limite continuo, [5], in pratica usiamo le corrispondenze:

$$\begin{aligned} \frac{n}{N} &\longleftrightarrow x \\ \frac{R_n}{N} &\longleftrightarrow R(x) \\ \frac{A_n}{\sqrt{N}} &\longleftrightarrow A(x) \end{aligned}$$

per ricavare, tenendo conto dei fattori N portati da $\bar{g}_i$ e dei valori di $\tilde{\beta}^i$ e $\tilde{\gamma}^i$, le due *equazioni continue*:

$$\begin{aligned} x &= R(x)\Big(1-\sum_{i=3}^{k} g_i\,\tilde{\beta}^{i-1}(x)\Big) \\ \mathrm{i}\alpha\,R(x) &= 2A(x)R(x) - xA(x) + R(x)\sum_{i=3}^{k} g_i\,\Big(R(x)\tilde{\gamma}^{i-1}(x) - \tilde{\beta}^{i}(x)\Big) \end{aligned}$$

Dove $\tilde{\beta}^i(x)$ e $\tilde{\gamma}^i(x)$ si esprimono in termini di $A(x)$ e $R(x)$ secondo le formule espresse nel paragrafo precedente. E' facile rendersi conto che la soluzione delle equazioni continue e di quelle discrete sono legate da:

$$\begin{aligned} \frac{R_n}{N} &= R\left(\frac{n}{N}\right) + O\left(N^{-2}\right) \\ \frac{A_n}{\sqrt{N}} &= A\left(\frac{n}{N}\right) + O\left(N^{-2}\right) \end{aligned}$$

A noi non interessa la soluzione discreta, infatti ricordando che $R_n(\mathbf{0},\alpha) = n$, abbiamo:

$$\frac{R_n(\mathbf{g},\alpha)}{R_n(\mathbf{0},\alpha)} = \frac{R_n(\mathbf{g},\alpha)}{N}\left(\frac{n}{N}\right)^{-1}$$

E la funzione $b(\mathbf{g},\alpha)$ può scriversi per $N \to \infty$:

$$b(\mathbf{g},\alpha) = \int_0^1 \mathrm{d}x\,(1-x)\ln\left(\frac{R(x)}{x}\right)$$

Abbiamo perciò ridotto il nostro problema all'eliminazione della funzione $A(x)$ dal sistema delle equazioni continue, onde ricavare $R(x)$ e quindi ottenere $b(\mathbf{g},\alpha)$ per integrazione.

5.3.1 La soluzione per potenziali pari

Se il potenziale ha vertici di valenza pari allora, come abbiamo mostrato precedentemente, i grafi associati sono 1-irriducibili. Poiché nel caso planare le autoadiacenze sono automaticamente ponti possiamo evitare di integrare in α e porre fin dall'inizio $\alpha = 0$, in tal caso l'azione risulta pari e quindi $A(x) = 0$. In questa circostanza, [5], per ricavare $R(x)$ è sufficiente la prima equazione continua, che assume la forma:

$$x = R\left(1 - \sum_{p=2}^{k/2} g_{2p} \binom{2p-1}{p} R^{p-1}\right)$$

Invece di ricavare $R(x)$ modifichiamo l'integrale con un cambio di variabili, anzitutto introduciamo la funzione:

$$w(R) = R\left(1 - \sum_{p=2}^{k/2} g_{2p} \binom{2p-1}{p} R^{p-1}\right)$$

e sia a la soluzione, regolare in $\mathbf{g} = 0$, di:

$$w(a) = 1,$$

Passando nell'integrale dalla variabile x alla variabile R tale che $x = w(R)$, l'integrale diventa:

$$e_2(\mathbf{g}) = \int_0^a \mathrm{d}R\, w'(R)\,[w(R) - 1]\, \ln\left(\frac{w(R)}{R}\right)$$

Introduciamo la funzione:

$$\bar{w}(R) = \frac{w(R)}{R} = 1 - \sum_{p=2}^{k/2} g_{2p} \binom{2p-1}{p} R^{p-1}$$

e integrando per parti arriviamo all'espressione:

$$e_2(\mathbf{g}) = \frac{1}{2}\ln a + \frac{1}{2}\int_0^a \mathrm{d}R\, R\, \bar{w}'(2 - R\,\bar{w})$$

Come semplice esempio consideriamo un potenziale con solo il vertice quartico, in tale caso $\bar{w}(R) = 1 - 3g_4 R$, e a è la radice regolare in $g_4 = 0$ di:

$$3g_4 a^2 - a + 1 = 0$$

ovvero:

$$a = \frac{1-\sqrt{1-12g_4}}{6g_4} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (3g_4)^k \, 2\frac{(2k-1)!}{(k+1)!(k-1)!}$$

L'integrazione fornisce infine:

$$e_2(g_4) = \frac{1}{2}\ln a + \frac{1}{24}(a-1)(a-9)$$

Se supponiamo g_4 negativa tale che $0 < -12g_4 \leq 1$, possiamo sfruttare la seguente identità:

$$\frac{1}{2}\ln a = -\frac{1}{2}\mathrm{csch}^{-1}(\sqrt{-12g_4}) - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\sqrt{-12g_4}}{2}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k)!}{2^{2k+2}\,(k!)^2\,k}(12g_4)^k$$

per determinare lo sviluppo in serie:

$$e_2(g_4) = \sum_{k=1}^{\infty} (3g_4)^k \, \frac{(2k-1)!}{k!\,(k+2)!}$$

Ricordando la formula per lo sviluppo topologico otteniamo l'interessante equazione:

$$\sum_{\substack{G \textit{ planari, connessi,} \\ \textit{tetravalenti,} \\ \textit{con } k \textit{ vertici}}} \frac{1}{o(A(G))} = 3^k \, \frac{(2k-1)!}{k!\,(k+2)!}$$

che possiamo verificare per $k = 1$ e $k = 2$ con i dati della figura 2.8.

Veniamo al significato fisico di questi risultati. Il raggio di convergenza della serie è $|g_{4c}| = 1/12$, e poteva essere dedotto notando che si tratta del valore per cui le precedenti radici perdono l'analiticità. $g_{4c} = -1/12$ corrisponde al nostro punto critico; si noti che il valore negativo indica che l'integrale converge anche per valori negativi di g_4, risultato, questo, matematicamente controintuitivo ma di grande significato fisico. Si tratta, prendendo valori sempre più negativi di g_4, di dare sempre più importanza, per il calcolo della funzione di partizione, alla parte quartica, ovvero ai grafi con sempre più vertici, che finiscono con l'essere predominanti proprio in corrispondenza di g_{4c}, al cui valore possiamo dire, avviene il passaggio al continuo.

Dall'espressione in serie possiamo ricavare l'esponente critico della suscettibilità di stringa, infatti l'andamento asintotico del coefficiente è:

$$3^k \, \frac{(2k-1)!}{k!\,(k+2)!} \sim \frac{\mathrm{e}^3\,12^k}{2\sqrt{\pi}} k^{-\frac{7}{2}}$$

Questo andamento $\sim k^{-\frac{7}{2}}$ è lo stesso dello sviluppo di $(g_4 - g_{4c})^{\frac{5}{2}}$, ne segue che per, $g_4 \to g_{4c}$:

$$e_2(g_4) \sim (g_4 - g_{4c})^{\frac{5}{2}}$$

e l'indice critico di suscettibilità di stringa [4] è, $\gamma = -1/2$.

5.3.2 La soluzione per il vertice cubico

Come sarà chiaro al lettore la nostra soluzione [5] per il vertice cubico consiste prima nell'uso di un'interazione comprendente sia il vertice cubico che quello quartico, onde evitare problemi di convergenza, quindi , una volta svolti tutti i calcoli, nel porre $g_4 = 0$ o nell'eseguire il relativo limite qualora fosse necessario. Ovviamente possiamo già porre $g_4 = 0$ se i calcoli che seguiranno saranno ben definiti, questo è quanto faremo scrivendo direttamente le equazioni continue per il solo vertice cubico:

$$\begin{aligned}\frac{x}{R} &= 1 - 2g_3 A \\ \mathrm{i}\alpha &= A - g_3 A^2 - 2g_3 R\end{aligned}$$

da cui possiamo ricavare A, regolare in $g_3 = 0$:

$$A = \frac{1 - \sqrt{1 - 4\mathrm{i}\alpha g_3 - 8g_3^2 R}}{2g_3}$$

$R(x)$ si deduce da:

$$\frac{x}{R} = \sqrt{1 - 4\mathrm{i}\alpha g_3 - 8g_3^2 R}$$

Introduciamo le costanti $c = \sqrt{1 - 4\mathrm{i}\alpha g_3}$ e $g = \frac{g_3}{c^{\frac{3}{2}}}$, e la nuova variabile σ:

$$1 + 2\sigma = \frac{1}{c}\sqrt{c^2 - 8g_3^2 R}$$

Il legame tra la variabile σ e la variabile x diventa:

$$2g^2 x + \sigma(1+\sigma)(1+2\sigma) = 0$$

La nostra funzione $b(g_3, \alpha)$ si scrive, passando dalla variabile di integrazione x alla variabile σ, e integrando per parti:

[4] E' facile vedere che l'indice critico non cambia, sia che si consideri la variabile g, sia che si consideri la variabile μ : $g = \mathrm{e}^{-\mu}$.

[5] Il problema con vertice cubico è stato risolto per la prima volta da Brézin et al., [2], usando metodi di sella.

$$\begin{aligned} b(g_3,\alpha) &= \int_0^1 \mathrm{d}x\,(1-x)\ln\left(\frac{R(x)}{x}\right) = -\frac{1}{2}\ln c - \int_0^{\sigma_1}\mathrm{d}\sigma\,\frac{\big(x(\sigma)-1\big)^2}{1+2\sigma} \\ &= -\frac{1}{2}\ln c - \frac{1}{2}\ln(1+2\sigma_1) + \frac{\sigma_1(2+6\sigma_1+3\sigma_1^2)}{3(1+\sigma_1)(1+2\sigma_1)^2} \end{aligned}$$

dove σ_1 è la soluzione regolare in $g_3 = 0$ di:

$$2g^2 + \sigma(1+\sigma)(1+2\sigma) = 0$$

Essa può essere espressa come sviluppo in serie di g_3 usando il teorema di Lagrange, [25], ottenendo:

$$\sigma_1 = -\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{8g_3^2}{c^3}\right)^k \frac{\Gamma\big(\frac{1}{2}(3k-1)\big)}{k!\,\Gamma\big(\frac{1}{2}(k+1)\big)}$$

Le nostre equazioni coincidono, a meno di fattori moltiplicativi derivanti dalle differenti definizioni, con quelle riportate in Brézin et al.; questi autori sono riusciti a calcolare anche lo sviluppo della funzione di partizione che nel nostro caso diventa [6]:

$$b(g_3,\alpha) = -\frac{1}{2}\ln c + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{8g_3^2}{c^3}\right)^k \frac{\Gamma(3k/2)}{(k+2)!\,\Gamma(k/2+1)}$$

Se $\alpha = 0$, $c = 1$ e la precedente espressione coincide con $e_2(g_3)$:

$$e_2(g_3) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}(8g_3^2)^k \frac{\Gamma(3k/2)}{(k+2)!\,\Gamma(k/2+1)}$$

e ricordando lo sviluppo topologico di $e_2(g_3)$ troviamo l'interessante formula:

$$\sum_{\substack{G\ \textit{planari, connessi,}\\ \textit{trivalenti,}\\ \textit{con } 2k\ \textit{vertici}}} \frac{1}{o(A(G))} = 8^k\frac{1}{2}\,\frac{\Gamma(3k/2)}{(k+2)!\ \Gamma(k/2+1)}$$

Questa formula può essere verificata per $k = 1$ e $k = 2$ con i dati della tabella 2.7. Il coefficiente di g_3^2 vale asintoticamente:

$$8^k\frac{1}{2}\,\frac{\Gamma(3k/2)}{(k+2)!\ \Gamma(k/2+1)} \sim \frac{\mathrm{e}^3}{\sqrt{6\pi}}(12\sqrt{3})^k k^{-\frac{7}{2}}$$

[6]Non abbiamo verificato la validità di questo sviluppo in serie che riprendiamo da Brézin et al., con le opportune modifiche adatte al nostro caso.

Il raggio di convergenza della serie è $|g_{3c}|^2 = 1/12\sqrt{3}$ e $-|g_{3c}|$ è il punto critico. Per l'andamento asintotico $k^{-\frac{7}{2}}$ concludiamo che anche in questo caso l'indice critico della suscettibilità di stringa resta $\gamma = -\frac{1}{2}$, ciò può essere interpretato come conferma dell'indipendenza della funzione di partizione, nel limite continuo, dalla poligonalizzazione della superficie.

Capitolo 6

Il modello di Ising

In questo breve capitolo esponiamo la soluzione del modello di Ising in un reticolo planare casuale. La teoria si fonda sulla possibilità di integrare un particolare modello matriciale a due matrici, questa soluzione è stata trovata per la prima volta da Itzykson e Zuber [4], ed in seguito la relativa dimostrazione è stata perfezionata da Mehta [6]; ne rivedremo gli aspetti essenziali nel primo e secondo paragrafo.

Questo modello matriciale è stato in seguito interpretato fisicamente da Kazakov [1] [8, 9] come il modello di Ising in un reticolo planare bidimensionale casuale; esporremo questa interpretazione nel primo paragrafo e le relative conseguenze nel terzo paragrafo.

6.1 Sviluppo topologico

Consideriamo il modello matriciale definito dalla funzione di partizione:

$$Z(g,c) = \int \mathrm{d}A\,\mathrm{d}B\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\operatorname{tr}(A^2+B^2)+c\operatorname{tr}(AB)-\frac{g}{4N}\operatorname{tr}(A^4+B^4)}$$

dove A e B sono matrici hermitiane $n \times n$. Come parte libera scegliamo i primi tre termini ad esponente, l'integrale gaussiano è allora:

$$\begin{aligned} I(J_A, J_B, c) &= \int \mathrm{d}A\,\mathrm{d}B\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\operatorname{tr}(A^2+B^2)+c\operatorname{tr}(AB)+\operatorname{tr}(J_A A+J_B B)} \\ &= \frac{\pi^{N^2} 2^N}{(1-c^2)^{N^2/2}}\,\mathrm{e}^{\frac{1}{2(1-c^2)}\operatorname{tr}(J_A^2+J_B^2)+\frac{c}{1-c^2}\operatorname{tr}(J_A J_B)} \end{aligned}$$

[1] Contrariamente a quanto accade per gli articoli di Mehta, dobbiamo mettere in guardia il lettore dall'ingente numero di errori negli articoli di Kazakov.

I propagatori sono:

$$
\begin{aligned}
< A^{i_1}_{j_1} A^{i_2}_{j_2} > &= \frac{1}{1-c^2}\,\delta^{i_1}_{j_2}\delta^{i_2}_{j_1} \\
< B^{i_1}_{j_1} B^{i_2}_{j_2} > &= \frac{1}{1-c^2}\,\delta^{i_1}_{j_2}\delta^{i_2}_{j_1} \\
< A^{i_1}_{j_1} B^{i_2}_{j_2} > &= \frac{c}{1-c^2}\,\delta^{i_1}_{j_2}\delta^{i_2}_{j_1}
\end{aligned}
$$

Si noti che per la presenza del termine misto adesso sono possibili accoppiamenti tra matrici differenti. Dalla forma dell'interazione deduciamo inoltre che ogni vertice è associato ad una sola matrice A o B, e che i grafi di nastri indicizzati G saranno grafi di nastri tetravalenti in cui ogni vertice è *colorato* con A o B, vedi figura 6.1. Vi potranno essere lati sia tra vertici dello stesso colore che tra vertici di colori differenti, nel primo caso ogni lato porta un fattore $\frac{1}{1-c^2}$ mentre nel secondo porta un fattore $\frac{c}{1-c^2}$. La formula per lo sviluppo topologico si scrive nel caso connesso:

$$
E(g,c) = \ln \frac{Z(g,c)}{Z(0,c)} = \sum_n \frac{(-g)^n}{(1-c^2)^{2n}} \sum_{\substack{G\ connessi \\ con\ n\ vertici}} \frac{N^\chi\, c^{I_{AB}}}{o(A(G))}
$$

dove n è il numero totale di vertici, e dove abbiamo usato $I = 2n$ in quanto i grafi sono tetravalenti. I_{AB} indica il numero di lati tra vertici differenti. Per i nostri scopi, poichè ci interessa sempre il caso con grande numero di vertici, supporremo sempre $o(A(G)) = 1$.

Consideriamo adesso un reticolo planare tetravalente, in ogni vertice immaginiamo uno spin con due possibili valori *up* e *down*; supponiamo che vi sia interazione solo tra gli spin collegati secondo la prescrizione del reticolo, e sia $E_{\uparrow\uparrow}$ l'energia di interazione tra spin paralleli e $E_{\uparrow\downarrow}$ l'energia di interazione tra spin antiparalleli. Supporremo $E_{\uparrow\downarrow} > E_{\uparrow\uparrow}$. E' evidente che se interpretiamo il colore di un vertice con la presenza di uno spin up o down a seconda che il colore sia A o B e se definiamo g e c nel modo seguente:

$$
\begin{aligned}
\frac{(-g)^{\frac{1}{2}}}{1-c^2} &= \mathrm{e}^{-\beta E_{\uparrow\uparrow}} \\
\frac{(-g)^{\frac{1}{2}} c}{1-c^2} &= \mathrm{e}^{-\beta E_{\uparrow\downarrow}}
\end{aligned}
$$

Allora la funzione $E(g,c)$ rappresenta la funzione di partizione per il modello di Ising in un reticolo tetravalente casuale, e in particolare:

$$
e_2(g,c) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N^2} E(g,c)
$$

è la funzione di partizione per il modello di Ising in un reticolo tetravalente, bidimensionale, planare, casuale. Si noti che dal punto di vista della 2D-Gravity la funzione $E(g, c)$ è esattamente la funzione di partizione della gravità accoppiata ad un sistema di spin, infatti comprende, sia la somma sulle superfici casuali, che la somma su tutte le possibili configurazioni di spin.

La formula $c = \mathrm{e}^{-\beta(E_{\uparrow\downarrow} - E_{\uparrow\uparrow})}$ ci dice che c fa le veci della temperatura: se $T \to \infty$ allora $c \to 1$, se $T \to 0$ allora $c \to 0$. La variabile g invece è legata all'energia necessaria per aggiungere un vertice al reticolo: $-g = \mathrm{e}^{\mu}$ con μ potenziale chimico.

6.2 L'integrazione

Scopo di questo paragrafo è la determinazione della funzione $e_2(g, c)$, riporteremo i risultati ottenuti da Mehta rimandando il lettore al suo chiaro articolo per i dettagli. Le formule che seguiranno devono considerarsi adattate al nostro caso, visto che la definizione di Kazakov e Mehta della funzione di partizione differisce dalla nostra.

Anzitutto Metha dimostra la seguente formula di Itzykson e Zuber facen-

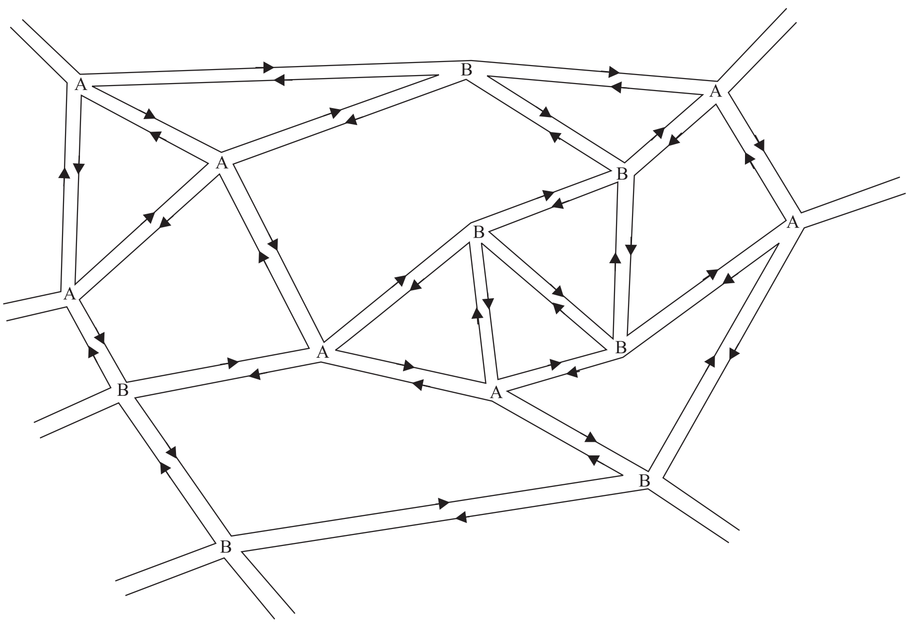


Figura 6.1: Grafo con vertici colorati G

do uso della teoria dell'equazione di diffusione:

$$\int \mathrm{d}A\,\mathrm{d}B\,\mathrm{e}^{-V(A)-V(B)+c\mathrm{tr}(AB)} = cost. \int \mathrm{d}\lambda_A\,\mathrm{d}\lambda_B\,\Delta(\lambda_A)\Delta(\lambda_B)\,\mathrm{e}^{-V(\lambda_A)-V(\lambda_B)+c\sum_i \lambda_{Ai}\lambda_{Bi}}$$

dove λ_A e λ_B sono diagonali e dove la forma esplicita della costante non ci interessa in quanto viene semplificata dal rapporto con $Z(0,c)$. Questa formula applicata alla nostra funzione di partizione fornisce:

$$Z(g,c) = cost. \int \mathrm{d}\lambda_A\,\mathrm{d}\lambda_B\,\Delta(\lambda_A)\Delta(\lambda_B)\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\mathrm{tr}(\lambda_A^2+\lambda_B^2)-\frac{g}{4N}\mathrm{tr}(\lambda_A^4+\lambda_B^4)+c\sum_i \lambda_{Ai}\lambda_{Bi}}$$

A questo punto introduciamo la misura:

$$\mathrm{d}\mu(x,y) = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)-\frac{g}{4N}(x^4+y^4)+cxy}$$

E definiamo i polinomi ortogonali P_j tali che:

$$\int \mathrm{d}\mu(x,y)\,P_i(x)P_j(y) = h_i\delta_j^i$$

Tenendo conto della parità dei polinomi giungiamo all'equazione di gradino:

$$xP_i(x) = P_{i+1}(x) + R_iP_{i-1}(x) + S_iP_{i-3}(x)$$

dove l'assenza di ulteriori termini può essere dimostrata per integrazione per parti. Con queste definizioni, integrando opportune espressioni in modi differenti, giungiamo alle tre equazioni discrete:

$$\begin{aligned}
cR_ih_{i-1} &= h_i\left\{1+\frac{2g}{N}(R_{i-1}+R_i+R_{i+1})\right\}\\
ch_i &= h_{i-1}\left\{-\frac{i}{2}+R_i\left[1+\frac{2g}{N}(R_{i-1}+R_i+R_{i+1})\right]+\frac{2g}{N}(S_i+S_{i+1}+S_{i+2})\right\}\\
\frac{2g}{N}h_i &= cS_ih_{i-3}
\end{aligned}$$

alle quali aggiungiamo la definizione del nuovo coefficiente: $f_i = \frac{h_i}{h_{i-1}}$. Per grandi N possiamo passare al limite continuo attraverso le seguenti corrispondenze:

$$\begin{aligned}
x &= \frac{i}{N}\\
f_i &\sim Nf(x)\\
R_i &\sim NR(x)\\
S_i &\sim N^2S(x)
\end{aligned}$$

Ne deriviamo tre equazioni continue da cui possiamo ricavare la seguente equazione nella sola funzione $f(x)$:

$$f(x)\left\{[1-\frac{6g}{c}f(x)]^{-2}-c^2\right\}+12g^2f^3(x)=\frac{1}{2}cx$$

che per $g=0$ ha soluzione: $f_0(x)=\frac{c}{2}x(1-c^2)^{-1}$. Nel limite continuo possiamo infine esprimere $e_2(g,c)$ come:

$$e_2(g,c)=\int_0^1 \mathrm{d}x\,(1-x)\,\ln\frac{f(x)}{f_0(x)}$$

6.3 Criticità

Kazakov suggerisce la sostituzione $z=\frac{2g}{c}f$, con la quale la nuova variabile z soddisfa l'equazione:

$$gx=g(z)=\frac{z}{(3z-1)^2}-c^2z+3c^2z^3$$

dove abbiamo definito la funzione $g(z)$. $z(g)$ sarà il valore assunto da z, regolare in $g=0$, quando $x=1$. Si noti che a noi interessa il ramo tale che $z(0)=0$; la funzione $z(g)$ si ottiene allora invertendo la funzione $g(z)$ nel tratto $z\in(p,1/3)$ dove $p<0$ è il primo zero di $g'(z)$ quando z viaggia da 0 a $-\infty$. Oltre questo valore non si ha più la univocità di $z(g)$, ovvero, dal punto di vista della superficie di Riemann su cui è definita $z(g)$, in $g(p)$ abbiamo un taglio. La figura 6.2 riporta la funzione $g(z)$ nel dominio di interesse $z\in(p,1/3)$.

Integrando per parti:

$$\begin{aligned}\int_0^1 \mathrm{d}x(1-x)\ln\frac{f(x)}{f_0(x)} &= \left(x-\frac{x^2}{2}\right)\ln\ln\frac{f(x)}{f_0(x)}\bigg|_0^1+\int_0^1\mathrm{d}x\,\left(\frac{x^2}{2}-x\right)\left(\frac{f'}{f}-\frac{f_0'}{f_0}\right)\\ &=\frac{1}{2}\ln\frac{f(1)}{f_0(1)}-\frac{1}{g}\int_0^1\mathrm{d}x\,(gx)\frac{f'}{f}+\frac{1}{2g^2}\int_0^1\mathrm{d}x\,(gx)^2\frac{f'}{f}+\frac{1}{2}\ln(1-c^2)+\frac{3}{4}\end{aligned}$$

Integrando rispetto a z anzichè rispetto a x, e considerando la dipendenza rispetto a z anziché rispetto a g, otteniamo:

$$\begin{aligned}\int_0^1\mathrm{d}x\,(1-x)\ln\frac{f(x)}{f_0(x)} &= \frac{1}{2}\ln\frac{z}{g(z)}-\frac{1}{g(z)}\int_0^z\mathrm{d}y\,\frac{g(y)}{y}+\frac{1}{2g(z)^2}\int_0^z\mathrm{d}y\,\frac{g(y)^2}{y}+\\ &\quad+\frac{1}{2}\ln(1-c^2)+\frac{3}{4}\end{aligned}$$

e infine:

$$\begin{aligned} e_2(g(z),c) &= \bar{e}_2(z,c) = \frac{z}{g(z)} + \frac{z^2}{2g(z)^2}\left[\frac{1}{2}\frac{z-1}{(3z-1)^3} + c^2\frac{z+1}{3z-1} + \frac{c^4}{2}(3z^4-3z^2+1)\right] + \\ &+ \frac{z}{g(z)}\left[\frac{1}{3z-1} + c^2(1-z^2)\right] + \frac{1}{2}\ln(1-c^2) + \frac{3}{4} \end{aligned}$$

Per avere $e_2(g,c)$ è sufficiente sostituire in questa espressione $z(g)$. Dalla relazione:

$$\frac{\partial}{\partial g}e_2(g,c) = \frac{\partial}{\partial z}\bar{e}_2(z,c)\,\frac{1}{g'(z)}$$

vediamo che le singolarità di $e_2(g,c)$ sono i punti in cui $g'(z)=0$, ovvero:

$$\begin{aligned} z_0 &= -\frac{1}{3} \\ z_{1,\,2} &= \frac{1}{3}\left(1 \mp \frac{1}{\sqrt{c}}\right) \\ z_{3,\,4} &= \frac{1}{3}\left(1 \mp \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{c}}\right) \end{aligned}$$

Il raggio di convergenza della funzione $e_2(g,c) = \bar{e}_(z(g),c)$ dipende da quello della funzione $z(g)$, per determinarlo dobbiamo vedere quale delle su

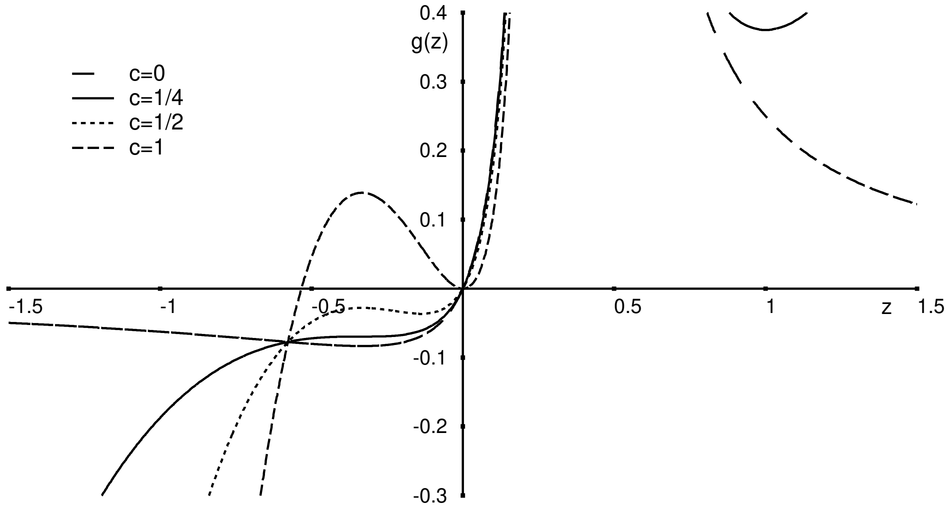


Figura 6.2: La funzione $g(z)$ per alcuni valori di c.

scritte singolarità è la più vicina a $g = z = 0$, dove sappiamo che la funzione $z(g)$ è analitica. I candidati sono z_0 e z_1 per i quali g assume i valori:

$$
\begin{aligned}
g_0 &= \frac{2}{9}c^2 - \frac{1}{12} \\
g_1 &= -\frac{2}{9}\sqrt{c}\,(\sqrt{c}-1)^2\,(\sqrt{c}+2)
\end{aligned}
$$

Se $0 < c \leq 1/4$, muovendo z da 0 a $-\infty$, la prima singolarità che incontriamo è z_0 e quindi il raggio di convergenza è g_0. Se invece $1/4 \leq c < 1$ allora la prima singolarità che incontriamo è z_1 e il raggio di convergenza è g_1. Alla temperatura critica $c = 1/4$ si ha l'uguaglianza $g_0(1/4) = g_1(1/4)$. Definendo:

$$e_n(c) = \sum_{\substack{g\ connessi \\ planari}} \frac{c^{I_{AB}}}{o(A(G))}$$

possiamo riscrivere:

$$e_2(g,c) = \sum_n \frac{(-g)^n}{(1-c^2)^2} e_n(c)$$

e, sfruttando i risultati sui raggi di convergenza, il limite per grandi n di $e_n(c)$ diventa:

$$e_n(c) \sim n^{-b}\left[-\frac{g(c)}{(1-c^2)^2}\right]^{-n} \qquad 0 < c < 1$$

dove $g(c)$ è la funzione definita da:

$$g(c) = \begin{cases} g_0(c) & se\ 0 < c \leq 1/4 \\ g_1(c) & se\ 1/4 \leq c < 1 \end{cases}$$

La derivata n-esima della nostra funzione di partizione $e_2(g,c)$ rispetto alla variabile c è continua alla temperatura critica $c = 1/4$ solo se lo sono le prime n derivate di $g(c)$. E' facile vedere che la derivata prima e seconda di $g(c)$ sono continue mentre la terza è discontinua, ciò corrisponde ad una transizione del terzo ordine per il modello di Ising in un reticolo planare casuale.

Quando la temperatura sale oltre la temperatura critica la distribuzione degli spin si fa progressivamente disordinata, mentre quando scende fino a 0 si ha un completo allineamento. Possiamo vederlo in dettaglio studiando l'andamento di $e_n(c)$:

$$e_n(c) \sim \begin{cases} n^{-b}\,12^n & per\ c \to 0 \\ n^{-b}\,24^n & per\ c \to 1 \end{cases}$$

Per $c \to 0$ vediamo che l'andamento di $e_n(c)$ è lo stesso del modello con vertice quartico ad una sola matrice. Un altro modo per dedurre questo risultato è notare che i fattori $c^{I_{AB}}$ in $e_n(c)$ eliminano i grafi con vertici misti qualora si passi al limite $c \to 0$. La presenza di un solo tipo di matrice per ogni grafo realizza, secondo la nostra interpretazione, l'allineamento di tutti gli spin.

La presenza, nel caso $c \to 1$, dell' ulteriore fattore 2^n corrisponde alla somma su configurazioni completamente disordinate.

Bibliografia

[1] J. Koplik, A. Neveu, S. Nussinov, *Some Aspects of the Planar Perturbation Series*, Nucl. Phys. **B123** (1977), 109

[2] E. Brézin, C. Itzykson, G. Parisi, J.B. Zuber, *Planar Diagrams*, Commun. Math. Phys. **59** (1978), 35

[3] D. Bessis, *A New Method in the Combinatorics of the Topological Expansion*, Commun. Math. Phys. **69** (1979), 147

[4] C. Itzykson, J.B. Zuber, *The Planar Approximation. II*, J. Math. Phys. **21** (1980), 411

[5] D. Bessis, C. Itzykson, J.B. Zuber, *Quantum Field Theory Techniques in Graphical Enumeration*, Adv. Appl. Math. **1** (1980), 109

[6] M.L. Metha, *A Method of Integration over Matrix Variables*, Commun. Math. Phys. **79** (1981), 327

[7] F. David, *Planar Diagrams, Two-Dimensional Lattice Gravity and Surface Models*, Nucl. Phys. **B297** (1985), 45

[8] V.A. Kazakov, *Exact Solution of the Ising Model on a Random Two-Dimensional Lattice*, Pis'ma JETP Lett. **44** (1986), 133

[9] D.V. Boulatov, V.A. Kazakov, *The Ising Model on a Random Planar Lattice: The Structure of the Phase Transition and the Exact Critical Exponents*, Phys. Lett. **B186** (1986), 379

[10] V.A. Kazakov, *Exactly Solvable Models of 2D-Quantum Gravity on the Lattice*, E. Brézin and J. Zinn-Justin, eds. Les Houches, Session XLIX, (1988), 371

[11] S.R. Das, A.D. Dhar, A.M. Sengupta, S.R. Wadia *New Critical Behavior in d=0 Large-N Matrix Models*, Mod. Phys. Lett. **A5** (1990), 1041

[12] L. Alvarez-Gaumé, *Random Surfaces, Statistical Mechanics and String Theory*, Helv. Phys. Acta **64** (1991), 359

[13] A.V. Kazakov, M. Staudacher, T. Wynter, *Exact Solution of Discrete Two-Dimensional R^2 Gravity*, Nucl. Phys. **B471** (1996), 309

[14] G. 't Hooft, *Counting Planar Diagrams with Various Restrictions*, Nucl. Phys. **B538** (1998), 389

[15] V.A. Kazakov, P. Zinn-Justin, *Two-Matrix Model with ABAB Interaction*, preprint LPTENS-98/27

[16] E. Looijenga, *Intersection Theory on Deligne-Mumford Compactifications*, Séminaire BOURBAKI, 45ème année, 1992-93, n. 768, Mars 1993

[17] M. Kontsevich, *Feynman Diagrams and Low-Dimensional Topology*, ?

[18] J. Zinn-Justin, *Quantum Field Theory and Critical Phenomena*, Oxford, Claredon Press

[19] M.L. Metha, *Random Matrices*, New York, Academic Press 1967

[20] P. Ginsparg, G. Moore, *Lectures on 2D Gravity and 2D String Theory*, preprint hep-th/9304011 (1993)

[21] E. Abdalla, M.C.B. Abdalla, D. Dalmazi, A. Zadra, *2D-Gravity in Non-Critical Strings*, Berlin, Springer-Verlag 1994

[22] N. Nakanishi, *Graph Theory and Feynman Integrals*, New York, Gordon and Breach 1971

[23] O. Ore, *The Four-Color Problem*, New York, Academic Press 1967

[24] T.L. Saaty, P.L. Kainen, *The Four-Color Problem*, New York, McGraw-Hill 1977

[25] F. Harary, E.M. Palmer, *Graphical Enumeration*, New York, Academic Press 1973

[26] A. Erdélyi, *Asymptotic Expansions*, New York, Dover Publications 1956

[27] Cerasoli, Eugeni, Protasi, *Elementi di Matematica Discreta*, Bologna, Zanichelli 1988

[28] I.N. Herstein, *Algebra*, Editori Riuniti 1982

[29] S. Lang, *Algebra*, Addison-Wesley Publishing Company 1984

[30] L.D. Landau, E.M. Lifšits, *Meccanica Quantistica, Teoria non Relativistica*, Editori Riuniti 1976

[31] I.S. Gradshteyn, I.M. Ryzhik, *Tables of Integrals, Series, and Products*, New York, Academic Press 1980

[32] S. Kobayashi, K. Nomizu, *Foundations of Differential Geometry vol. I*, New York, Interscience Publishers 1963