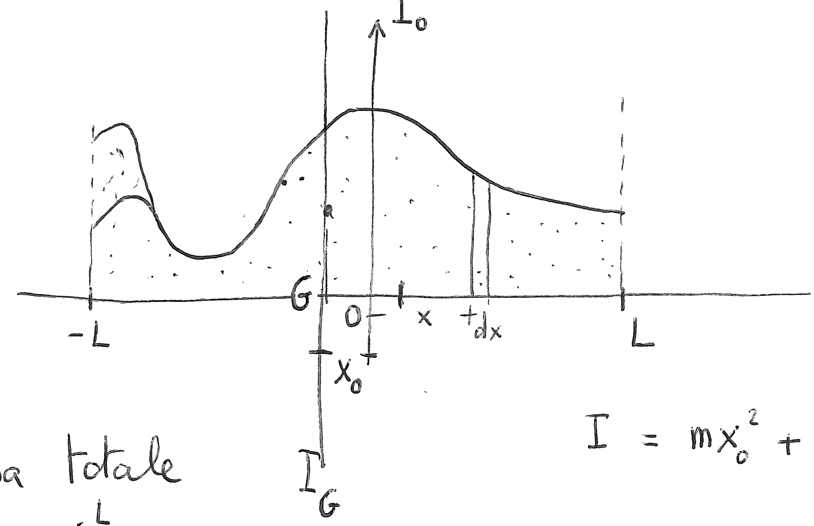
Commenti sul Momento d'Inerzia

Si consideri una densità di massa lineare $\rho = \rho(x)$, con $x \in [-L, L]$

L'elemento infinitesimo di massa è dato da



$$dm = \rho(x)\,dx$$

$$I = m x_0^2 + m \operatorname{Var} \rho$$

e quindi la massa totale

$$m = \int_{-L}^{L} \rho(x)\,dx$$

il centro di massa x_0 è definito da (con riferimento all'origine 0)

$$\int_{-L}^{L} \rho(x)\,dx \;\; x_0 = \int_{-L}^{L} \rho(x)\, x\,dx$$

Definiamo il momento d'inerzia rispetto all'asse $x = 0$

$$I_0 = \int_{-L}^{L} \rho(x)\, x^2\,dx$$

Possiamo calcolare

$$\int_{-L}^{L} \rho(x)\,(x - x_0)^2\,dx = \int_{-L}^{L} \rho(x)\, x^2\,dx + \int_{-L}^{L} \rho(x)\, x_0^2\,dx - 2\int_{-L}^{L} \rho(x)\; x\, x_0\,dx$$

$$= I_0 + m x_0^2 - 2 x_0 \int_{-L}^{L} \rho(x)\, x\,dx$$

$$= I_0 + m x_0^2 - 2 m x_0^2 = I_0 - m x_0^2$$

Se indichiamo con

$$I_G = \int_{-L}^{L} \rho(x)(x-x_0)^2\,dx$$

il momento d'inerzia baricentrale si ha

$$I_G = I_0 - m x_0^2$$

ovvero

$$I_0 = I_G + m x_0^2 = m x_0^2 + I_G$$

Ricordando che

$$\operatorname{var} \rho = \frac{1}{m}\int_{-L}^{L} \rho(x)(x-x_0)^2\,dx$$

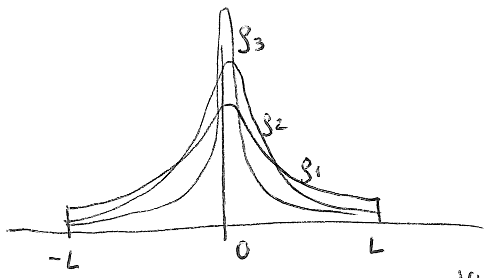
è la varianza della densità $\rho(x)$, si ha

$$I_0 = m x_0^2 + m \operatorname{var} \rho$$

ovvero

$$\frac{1}{m}\int_{-L}^{L} \rho(x) x^2\,dx = x_0^2 + \operatorname{var} \rho$$

Con riferimento alle densità di massa in figura



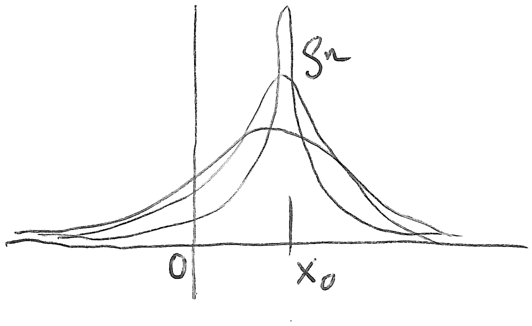
il momento d'inerzia rispetto al punto O delle distribuzioni di massa $\rho_1, \rho_2, \rho_3 \dots \rho_n \dots$ viene approssimato sempre meglio tramite la massa per x_0^2 via via che la distribuzione si concentra in P_0, l'errore che si commette è dato dalla varianza. Tale varianza tende a zero quando la distribuzione si concentra in G

Se si scrive

$$I_0 = m x_0^2 + I_G$$

I_G si può interpretare come correzione $(m \operatorname{var} \rho)$ di

$m x_0^2$. Tale correzione sarà più grande, se più sparpagliata è la massa intorno a G.
Nella figura sopra $O \equiv G$ e il momento I_G tende a zero per $n \to \infty$



$I_0 \to m x_0^2$

e la $\mathrm{Var}\, g_n \to 0$