ESTREMI VINCOLATI - MOLTIPLICATORI DI LAGRANGE

Problema.

Vogliamo determinare gli eventuali punti di massimo e minimo di una funzione $f = f(x,y,z)$ ristretta alla superficie $S := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : g(x,y,z) = 0\}$

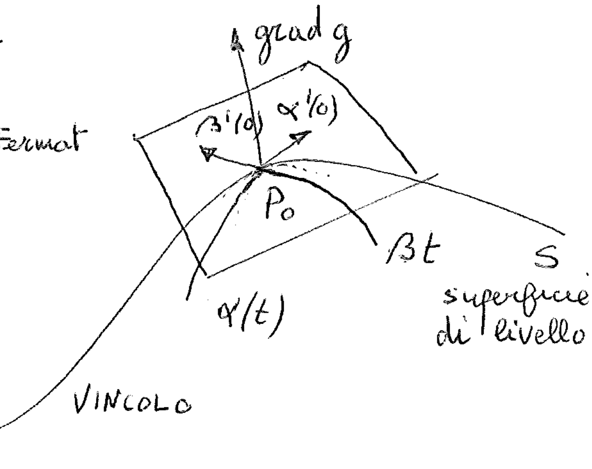
Teorema

Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ differenziabile. Sia $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ una funzione differenziabile e indichiamo con S la superficie consistente di tutti i punti $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tali che $g(x,y,z) = 0$ e $\operatorname{grad} g \neq 0$. Se $P_0 \in S$ è un punto di massimo (o di minimo) della $f|_S$ (f ristretta ad S), allora esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che

$$\operatorname{grad} f(P_0) = \lambda \operatorname{grad} g(P_0)$$

Dimostrazione

Siano $\alpha, \beta : [-1,1] \to S$ due curve derivabili e tali che $\alpha(0) = \beta(0) = P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ e $\alpha'(0), \beta'(0)$ linearmente indipendenti. Poiché P_0 è un punto di massimo, è chiaro che $f(\alpha(t)) = f \circ \alpha$ e $f(\beta(t)) = f \circ \beta$ hanno un punto di massimo in $t = 0$, perciò (per il T. di Fermat) anche $f(\alpha(t))$ e $f(\beta(t))$, come funzioni di una sola variabile, hanno derivata (rispetto alla sola variabile t) nulla $(f \circ \alpha)' = 0$ e $(f \circ \beta)' = 0$, ovvero ricordando la regola di derivazione di una funzione composta



$$(f \circ \alpha)' = \frac{\partial f}{\partial x}(P_0)\frac{d\alpha_1}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}(P_0)\frac{d\alpha_2}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}(P_0)\frac{d\alpha_3}{dt} = (\operatorname{grad} f(P_0), \alpha'(0)) = 0$$

$$(f \circ \beta)' = (\operatorname{grad} f(P_0), \beta'(0)) = 0$$

prodotto scalare

Se ne deduce che grad $f(P_0)$ è perpendicolare al piano tangente (che è individuato da $\alpha'(0), \beta'(0)$) in P_0 alla superficie di livello S. Perciò

$$\operatorname{grad} f(P_0) = \lambda \operatorname{grad} g(P_0) \qquad \blacksquare$$

λ è detto MOLTIPLICATORE DI LAGRANGE

Esempio

Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$; $(x,y,z) \longmapsto f(x,y,z) = xyz$.
Vogliamo determinare i massimi e i minimi della f sulla sfera (ristretta alla sfera, o vincolata alla sfera)

$$\phi : \; x^2+y^2+z^2 = 1 .$$

Se $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$; $(x,y,z) \longmapsto x^2+y^2+z^2-1$, allora $\phi \equiv S$, definita sopra (nel Teorema). Cerchiamo le soluzioni di

$$\operatorname{grad} f(P) = \lambda \operatorname{grad} g(P) , \quad \text{con} \quad P \in S.$$

Essendo

$$\operatorname{grad} f = \frac{\partial f}{\partial x}\underline{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\underline{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\underline{k} = (yz, xz, xy)$$

$$\operatorname{grad} g = (2x, 2y, 2z) \qquad (\operatorname{grad} g \neq 0 \text{ sulla sfera})$$

si ha il sistema

$$\begin{cases} yz = 2\lambda x \\ xz = 2\lambda y \\ xy = 2\lambda z \end{cases}$$

con (x,y,z) tali che $x^2+y^2+z^2-1=0$

Facili calcoli portano a concludere che $x^2 = y^2 = z^2$ per cui si devono considerare i seguenti punti

$$\left(\frac{1}{\sqrt3}, \frac{1}{\sqrt3}, \frac{1}{\sqrt3}\right), \quad \left(\frac{1}{\sqrt3}, -\frac{1}{\sqrt3}, \frac{1}{\sqrt3}\right), \quad \left(\frac{1}{\sqrt3}, \frac{1}{\sqrt3}, -\frac{1}{\sqrt3}\right)$$

$$\left(-\frac{1}{\sqrt3}, \frac{1}{\sqrt3}, \frac{1}{\sqrt3}\right), \quad \left(\frac{1}{\sqrt3}, -\frac{1}{\sqrt3}, \frac{1}{\sqrt3}\right), \quad \left(-\frac{1}{\sqrt3}, -\frac{1}{\sqrt3}, \frac{1}{\sqrt3}\right)$$

$$\left(-\frac{1}{\sqrt3}, \frac{1}{\sqrt3}, -\frac{1}{\sqrt3}\right), \quad \left(-\frac{1}{\sqrt3}, -\frac{1}{\sqrt3}, -\frac{1}{\sqrt3}\right).$$

Avendo $f(x,y,z) = -f(-x,-y,-z)$ è chiaro che se $P_0 \equiv (x_0, y_0, z_0)$ è di massimo $-P_0 = (-x_0, -y_0, -z_0)$ sarà di minimo. Si trova, calcolando il valore assunto nei punti trovati, che sono di massimo i punti con nessuna o con un numero pari di coordinate negative e di minimo quelli ad essi opposti.

<u>Nota</u>

Il teorema trovato contiene l'ipotesi che f e g siano differenziabili in ogni punto di S, ma basta la differenziabilità in un intorno di P_0. Comunque nella forma da noi enunciata fornisce i possibili punti di massimo e di minimo. In altri casi questo non si verifica ed i punti nei quali f e g non sono differenziabili vanno esaminati direttamente.
Il procedimento su esposto per la ricerca dei massimi e minimi condizionati si chiama METODO DEI MOLTIPLICATORI DI LAGRANGE ed i parametri λ sono detti MOLTIPLICATORI DI LAGRANGE.