IL METODO degli AUTOVALORI e AUTOVETTORI per trovare le SOLUZIONE di un sistema lineare del 1° ordine

Si consideri il sistema

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = A\underline{x} \qquad (1)$$

dove $\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_n \end{pmatrix}$ e $A = \{a_{ij}\}$.

Cerchiamo n soluzioni linearmente indipendenti $\underline{x}_1(t)$, $\underline{x}_2(t)$ e $\underline{x}_n(t)$.

Proviamo la soluzione

$$\underline{x}(t) = e^{\lambda t}\underline{v}$$

dove $\underline{v}$ e' un vettore costante e λ un opportuno parametro.

Sostituiamo in (1)

$$\dot{x}(t) = \lambda e^{\lambda t}\underline{v} \qquad \lambda e^{\lambda t}\underline{v} = A e^{\lambda t}\underline{v}$$

$$\lambda\underline{v} = A\underline{v}$$

Così, $\underline{x}(t) = e^{\lambda t}\underline{v}$ è soluzione di (1) se e solo se λ è vale che

$$A\underline{v} = \lambda\underline{v}.$$

Si tratta quindi di ricercare gli AUTOVETTORI di A, per cui occorre imporre

$$\det(A - \lambda I) = 0, \qquad (2)$$

La ricerca di soluzioni diverse da zero di (2), dà gli n AUTOVALORI

$$\lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_n.$$

Senza entrare nei particolari, esistono AL PIU' n autovalori distinti, a cui corrispondono al più n autovettori

$$(\underline{v}^1, \underline{v}^2 \ldots \underline{v}^n)$$

che costituiscono uno SPAZIO di dimensione n.

Per ogni autovettore $\underline{v}^i$ di A con autovalore λ_i si ha una soluzione

$$\underline{x}^i(t) = e^{\lambda_i t}\,\underline{v}^i \qquad (3)$$

SUPPONIAMO che A abbia n autovettori linearmente indipendenti $(\underline{v}^1, \underline{v}^2 \dots \underline{v}^n)$ con autovalori $(\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_n)$ (non necessariamente distinti). Allora si hanno n soluzioni del tipo (3) e, in questo caso, ogni soluzione di (1) e' della forma

$$\underline{x}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t}\underline{v}^1 + c_2 e^{\lambda_2 t}\underline{v}^2 + \dots + c_n e^{\lambda_n t}\underline{v}^n. \qquad (4)$$

Questa è chiamata SOLUZIONE GENERALI di (1)

Le condizioni iniziali di (1) serviranno a determinare le n costanti $(c_1, c_2 \dots c_n)$ in (4).

Quella che abbiamo illustrato è la situazione più semplice: n autovettori distinti

Rimandiamo per ulteriori sviluppi al corso di equazioni differenziali. Limitiamoci a due casi

1. λ e' un autovalore COMPLESSO $\lambda = \alpha + i\beta$ con autovettore $\underline{v} = \underline{v}^1 + i\underline{v}^2$, allora

$$\underline{x}(t) = e^{\lambda t}\,\underline{v}$$

e' una soluzione complessa di $\dot{x} = Ax$, che dà luogo a due soluzioni REALI

Infatti

$$\underline{x}(t) = e^{(\alpha+i\beta)t}(\underline{v}^1 + i\underline{v}^2) =$$

$$= e^{\alpha t}(\cos\beta t + i\,\mathrm{sen}\,\beta t)(\underline{v}^1 + i\underline{v}^2) =$$

$$= e^{\alpha t}\left[\underline{v}^1\cos\beta t - \underline{v}^2\,\mathrm{sen}\,\beta t\right] + i\,e^{\alpha t}\left[\underline{v}^1\,\mathrm{sen}\,\beta t + \underline{v}^2\cos\beta t\right].$$

ottenendo 2 soluzioni $\underline{y}(t)$ e $\underline{z}(t)$ linearmente indipendenti

2. La matrice $n \times n$ A ha solo $k < n$ autovettori linearmente indipendenti.
Si hanno solo k soluzioni del tipo $e^{\lambda_j t}$ con k soluzioni linearmente indipendenti. Si tratta ora di trovare ulteriori $n-k$ soluzioni linearmente indipendenti.
Per trovare le soluzioni ulteriori, prendiamo un autovalore λ di A e troviamo tutti i vettori $\underline{v}$ per cui

$$(A - \lambda I)^2 \underline{v} = 0$$

con $(A - \lambda I)\underline{v} = 0$
Per ogni tale vettore $\underline{v}$

$$e^{At}\underline{v} = e^{\lambda t} e^{(A-\lambda I)t}\underline{v} = e^{\lambda t}\left[\underline{v} + t(A - \lambda I)\underline{v}\right]$$

è una ulteriore soluzione di $\dot{x} = Ax$. Questa procedura va ripetuto per ogni λ di A

3. Se non si hanno ancora n soluzioni linearmente indipendenti si dovranno trovare i vettori $\underline{v}$ per cui $(A - \lambda I)^3 \underline{v} = 0$ e $(A - \lambda I)^2 \underline{v} \neq 0$.
Per ulteriori dettagli si rimanda al corso di equazioni differenziali

ESEMPIO

Consideriamo il sistema

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

corrispondente all'equ. diff. $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$, con condizione iniziale

$$\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$$

Ricerchiamo gli autovalori di $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix}$.

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -\omega^2 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \omega^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} \lambda_1 = -i\omega \\ \lambda_2 = i\omega. \end{array}$$

A cui corrispondono gli autovettori

$$\begin{pmatrix} i\omega & 1 \\ -\omega^2 & i\omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega v_{11} i + v_{12} \\ -\omega^2 v_{11} + \omega v_{12} i \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -i\omega \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -i\omega & 1 \\ -\omega^2 & -i\omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{21} \\ v_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\omega v_{21} i + v_{22} \\ -\omega^2 v_{21} - i\omega v_{22} \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{v_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ i\omega \end{pmatrix}$$

(non mi preoccupo di normalizzarli).

Pertanto la soluzione generale è

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = c_1 e^{-i\omega t} \begin{pmatrix} 1 \\ -i\omega \end{pmatrix} + c_2 e^{i\omega t} \begin{pmatrix} 1 \\ i\omega \end{pmatrix}$$

ovvero

$$\begin{cases} x(t) = c_1 e^{-i\omega t} + c_2 e^{i\omega t} \\ y(t) = -c_1 i\omega e^{-i\omega t} + c_2 i\omega e^{i\omega t} \end{cases}$$

Tornando alle soluzioni reali

$$\begin{cases} x(t) = c_1 \cos\omega t + c_2 \sin\omega t \\ y(t) = -c_1 \omega \sin\omega t + c_2 \omega \cos\omega t \end{cases} \quad \blacksquare$$