

Prova scritta di **ANALISI I e GEOMETRIA**

SIE (Ing. Edile)

Fila A

12-aprile-2007

**GEOMETRIA**

1. (3 pt) Sia  $L : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  l'applicazione lineare rappresentata (nelle basi canoniche) dalla matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a & -1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

determinare al variare del parametro  $a$  la dimensione dell'immagine di  $L$ .

2. (4 pt) Dire per quali valori di  $a$  esiste una matrice  $2 \times 2$   $X$  tale che

$$\begin{pmatrix} a & -1 \\ 0 & a \end{pmatrix} X - X \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. (3 pt) Scrivere l'equazione della retta che congiunge il punto  $P = (-3, 0)$  col punto più lontano da  $P$  sulla circonferenza di equazione:  $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 4 = 0$ .

**ANALISI**

4. (3 pt) Dire, motivando la risposta, se la seguente affermazione è vera o falsa:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} 1/f(x) = +\infty$$

5. (4 pt) Determinare il dominio e l'immagine della funzione

$$f(x) = \frac{1}{1 - \sqrt{x-2}}$$

6. (6 pt) Studiare la funzione  $f(x) = |x-1|e^{-|x+1|}$ , tracciarne un grafico.

7. (3 pt) Determinare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \sqrt[n]{n}}$$

8. (4 pt) La somma di due numeri non negativi vale 10: dimostrare che la somma del cubo di uno di essi col quadrato dell'altro è sempre maggiore di 57.

9. (3 pt) Calcolare

$$\int_{-\infty}^1 3^{2x} dx$$

10. (3 pt) Calcolare il

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{x/3} - 3x^2)^{1/x}$$

**GEOMETRIA**

1. (3 pt) Sia  $L : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  l'applicazione lineare rappresentata (nelle basi canoniche) dalla matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & a & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

determinare al variare del parametro  $a$  la dimensione del nucleo di  $L$ .

2. (4 pt) Dire per quali valori di  $a$  esiste una matrice  $2 \times 2$   $X$  tale che

$$X \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1-a & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1-a & -1 \\ 0 & 1-a \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. (3 pt) Scrivere l'equazione della retta che congiunge il punto  $P = (0, -3)$  col punto più lontano da  $P$  sulla circonferenza di equazione:  $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 4 = 0$ .

**ANALISI**

4. (3 pt) Dire, motivando la risposta, se la seguente affermazione è vera o falsa:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} 1/f(x) = 0$$

5. (4 pt) Determinare il dominio e l'immagine della funzione

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+2}-1}$$

6. (6 pt) Studiare la funzione  $f(x) = |x+1|e^{-|x-1|}$ , tracciarne un grafico.

7. (3 pt) Determinare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{n^{3/2}}$$

8. (4 pt) La somma di due numeri vale 16: dimostrare che il prodotto del cubo di uno di essi con la quinta potenza dell'altro è sempre minore di  $2,2 \times 10^7$ .

9. (3 pt) Calcolare

$$\int_{-1}^{+\infty} 2^{-3x} dx$$

10. (3 pt) Calcolare il

$$\lim_{x \rightarrow 0} (e^{x/3} - 3x)^{1/x}$$

**GEOMETRIA**

1. (3 pt) Sia  $L : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  l'applicazione lineare rappresentata (nelle basi canoniche) dalla matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

determinare al variare del parametro  $a$  la dimensione dell'immagine di  $L$ .

2. (4 pt) Dire per quali valori di  $a$  esiste una matrice  $2 \times 2$   $X$  tale che

$$\begin{pmatrix} 2a+1 & -1 \\ 0 & 2a+1 \end{pmatrix} X - X \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2a+1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. (3 pt) Scrivere l'equazione della retta che congiunge il punto  $P = (3, 0)$  col punto più lontano da  $P$  sulla circonferenza di equazione:  $x^2 + y^2 + 4x - 2y + 4 = 0$ .

**ANALISI**

4. (3 pt) Dire, motivando la risposta, se la seguente affermazione è vera o falsa:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f^2(x) = +\infty$$

5. (4 pt) Determinare il dominio e l'immagine della funzione

$$f(x) = \frac{1}{2 - \sqrt{4 - x}}$$

6. (6 pt) Studiare la funzione  $f(x) = |x - 2|e^{-|x|}$ , tracciarne un grafico.

7. (3 pt) Determinare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1 + 1/n)^n}{n}$$

8. (4 pt) Il prodotto di due numeri vale 10: dimostrare che la somma del quadrato di uno di essi col reciproco del quadrato dell'altro è sempre maggiore di 5.

9. (3 pt) Calcolare

$$\int_{-\infty}^0 4^{x/2} dx$$

10. (3 pt) Calcolare il

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{4x} - 4x^4)^{1/x}$$

**GEOMETRIA**

1. (3 pt) Sia  $L : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  l'applicazione lineare rappresentata (nelle basi canoniche) dalla matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 3b & -3 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

determinare al variare del parametro  $b$  la dimensione del nucleo di  $L$ .

2. (4 pt) Dire per quali valori di  $b$  esiste una matrice  $2 \times 2$   $X$  tale che

$$X \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b & -1 \\ 0 & b \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. (3 pt) Scrivere l'equazione della retta che congiunge il punto  $P = (3, 0)$  col punto più lontano da  $P$  sulla circonferenza di equazione:  $x^2 + y^2 + 4x + 2y + 4 = 0$ .

**ANALISI**

4. (3 pt) Dire, motivando la risposta, se la seguente affermazione è vera o falsa:

$$\lim_{x \rightarrow 0} |f(x)| = +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$$

5. (4 pt) Determinare il dominio e l'immagine della funzione

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{4+x-2}}$$

6. (6 pt) Studiare la funzione  $f(x) = |x|e^{-|x-2|}$ , tracciarne un grafico.

7. (3 pt) Determinare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1 + 1/n)^n \sin(1/n^2)$$

8. (4 pt) Siano  $a$  e  $b$  due numeri nonnegativi tali che  $a^3 + b = 4/9$ : provare che la somma di  $a$  e  $b$  è sempre minore di 1.

9. (3 pt) Calcolare

$$\int_{-\infty}^1 3^{x/2} dx$$

10. (3 pt) Calcolare il

$$\lim_{x \rightarrow 0} (e^{4x} - 4x)^{1/x}$$

**GEOMETRIA**

1. (3 pt) Sia  $L : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  l'applicazione lineare rappresentata (nelle basi canoniche) dalla matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 3b & 3 \\ 4 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

determinare al variare del parametro  $b$  la dimensione dell'immagine di  $L$ .

2. (4 pt) Dire per quali valori di  $b$  esiste una matrice  $2 \times 2$   $X$  tale che

$$\begin{pmatrix} 1-b & -1 \\ 0 & 1-b \end{pmatrix} X - X \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1-b & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. (3 pt) Scrivere l'equazione della retta che congiunge il punto  $P = (0, 3)$  col punto più lontano da  $P$  sulla circonferenza di equazione:  $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 4 = 0$ .

**ANALISI**

4. (3 pt) Dire, motivando la risposta, se la seguente affermazione è vera o falsa:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f^3(x) = +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$$

5. (4 pt) Determinare il dominio e l'immagine della funzione

$$f(x) = \frac{1}{3 - \sqrt{x+3}}$$

6. (6 pt) Studiare la funzione  $f(x) = |2 + x|e^{-|x-2|}$ , tracciarne un grafico.

7. (3 pt) Determinare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(2 + 1/n)}{2n}$$

8. (4 pt) Siano  $a$  e  $b$  due numeri nonnegativi tali che  $a + b = 1$ : provare che  $a^2 b^4$  è sempre minore di  $1/35$ .

9. (3 pt) Calcolare

$$\int_0^{+\infty} 2^{-x/2} dx$$

10. (3 pt) Calcolare il

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{2x} - 4x^3)^{1/x}$$

Prova scritta di **ANALISI I e GEOMETRIA**

SIE (Ing. Edile)

Fila F

12-aprile-2007

**GEOMETRIA**

1. (3 pt) Sia  $L : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  l'applicazione lineare rappresentata (nelle basi canoniche) dalla matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ -1 & -b & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

determinare al variare del parametro  $b$  la dimensione del nucleo di  $L$ .

2. (4 pt) Dire per quali valori di  $b$  esiste una matrice  $2 \times 2$   $X$  tale che

$$X \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2b+1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2b+1 & -1 \\ 0 & 2b+1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. (3 pt) Scrivere l'equazione della retta che congiunge il punto  $P = (0, 3)$  col punto più lontano da  $P$  sulla circonferenza di equazione:  $x^2 + y^2 + 2x + 4y + 4 = 0$ .

**ANALISI**

4. (3 pt) Dire, motivando la risposta, se la seguente affermazione è vera o falsa:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{f(x)} = +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$$

5. (4 pt) Determinare il dominio e l'immagine della funzione

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-3} - 3}$$

6. (6 pt) Studiare la funzione  $f(x) = |2 - x|e^{-|x+2|}$ , tracciarne un grafico.

7. (3 pt) Determinare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(2 + \frac{1}{n}\right) \log\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$$

8. (4 pt) Siano  $a$  e  $b$  due numeri positivi tali che  $1/a + 1/b = 5$ : provare che la loro somma è sempre maggiore di  $7/10$ .

9. (3 pt) Calcolare

$$\int_{-\infty}^0 5^{x/3} dx$$

10. (3 pt) Calcolare il

$$\lim_{x \rightarrow 0} (e^{2x} - 4x)^{1/x}$$