Sommario lezioni di geometria

C. Franchetti

November 12, 2006

1 Geometria analitica nel piano

1.1 Distanza di due punti

Siano $P_1 = (x_1, y_1), P_2 = (x_2, y_2)$ due punti del piano, se $d(P_1, P_2)$ indica la loro distanza, applicando il teorema di Pitagora si ha subito che

$$d^2(P_1, P_2) = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$$

1.2 Equazione di una retta

Siano $P_1 = (x_1, y_1), P_2 = (x_2, y_2)$ due punti distinti del piano (questo accade se e solo se $(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 > 0$); perché un punto generico $P = (x, y)$ sia sulla retta individuata dai punti P_1, P_2 occorre che (usiamo similitudine di triangoli)

$$\frac{y - y_1}{y - y_2} = \frac{x - x_1}{x - x_2}$$

e questa uguaglianza è equivalente a

$$(y_2 - y_1)x + (x_1 - x_2)y + (y_1 x_2 - x_1 y_2) = 0\,.$$

I punti P_1, P_2 soddisfano l'equazione di sopra che appunto viene detta equazione della retta per due punti (distinti).
Mostriamo ora che viceversa il luogo dei punti (x, y) del piano che soddisfano un'equazione del tipo

$$(1) \qquad ax + by + c = 0 \ \text{ con } \ (a^2 + b^2) > 0$$

è una retta. Siano $P_i = (x_i, y_i),\ i = 1, 2, 3$ tre punti le cui coordinate soddisfano la (1), allora si ha $ax_i + by_i + c = 0$, da cui, supponendo per esempio $a \neq 0$, si ottiene

$$(x_1 - x_2) = (b/a)(y_2 - y_1) \quad (x_1 - x_3) = (b/a)(y_3 - y_1)$$

da questa si ha subito

$$\frac{y_1 - y_2}{y_1 - y_3} = \frac{x_1 - x_2}{x_1 - x_3}$$

e quindi i tre punti stanno su una stessa retta.
Quando si ha che $a = 0$ (e quindi $b \neq 0$) [$b = 0$ (e quindi $a \neq 0$)] la (1) diventa risp.

$$(2) \qquad y = h \quad [x = k] \qquad (h = -(c/b))\ [k = -(c/a)]$$

e la (2) è l'equazione della generica retta parallela all'asse delle x [delle y].
Da quanto visto segue che ogni retta che non sia parallela all'asse delle y si può scrivere nella forma

$$(3) \qquad y = mx + p$$

detta equazione **normale** della retta. I coefficienti p e m hanno un semplice significato geometrico. La retta (3) passa per il punto $(0, p)$ per cui p rappresenta l'ordinata del punto in cui la retta interseca l'asse delle y. Se $P_i = (x_i, y_i),\ i = 1, 2$ sono due punti qualsiasi le cui coordinate soddisfano la (3), allora si ha $(y_i - mx_i) = p$ per cui $(y_1 - mx_1) = (y_2 - mx_2)$ e quindi il rapporto $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ vale m per ogni coppia di punti della retta (3). Con un po' di trigonometria concludiamo che m, detto **coefficiente angolare** della retta (3), è uguale alla tangente trigonometrica dell'angolo che la retta fa con l'asse delle x (se $m = 0$ la retta (3) risulta parallela all'asse delle x e si può considerare che faccia un angolo nullo con l'asse delle x). In parole povere m misura la pendenza della retta.

1.3 Equazione di un fascio

Sia $P = (a, b)$ un punto qualsiasi del piano. Ogni retta passante per P e che non sia parallela all'asse delle y si può sempre scrivere nella forma

$$(4) \qquad y - b = m(x - a)\ ,$$

la (4) è l'equazione del **fascio** delle rette uscenti dal punto P, il parametro del fascio m, come sappiamo, è il coefficiente angolare. In realtà nel fascio di rette per P c'è anche la parallela all'asse delle y che non si ottiene dalla (4) per nessun valore del parametro m, (ci vorrebbe un valore infinito, una retta verticale forma con l'asse delle x un angolo di $\pi/2$ e la tangente non è definita in $\pi/2$).

1.4 Parallelismo e ortogonalità

Siano r e s due rette di equazioni

$$(5) \qquad r: \ ax + by + c = 0 \qquad s: \ a'x + b'y + c' = 0$$

vogliamo determinare sotto quali condizioni sui coefficienti risultano parallele, ortogonali.

Parallelismo: perché due rette siano parallele occorre e basta che abbiano lo stesso coefficiente angolare. Se $b = 0$ $[b' = 0]$ la retta r $[s]$ è parallela all'asse delle y e quindi tale dovrà essere anche l'altra retta s $[r]$ e quindi anche $b' = 0$ $[b = 0]$. Se b e b' sono entrambi non nulli allora scrivendo le rette in forma normale si vede che i coefficienti angolari sono rispettivamente $-(a/b)$ per r e $-(a'/b')$ per s. I coefficienti angolari risulteranno uguali se e solo se $ab' = a'b$ (condizione soddisfatta anche dalle parallele all'asse y). In conclusione le rette r e s sono parallele se e solo se

$$ab' = a'b$$

Se in particolare abbiamo

$$r: \ y = mx + p \qquad s: \ y = m'x + p'$$

ovviamente r e s sono parallele se e solo se $m = m'$.

Si può arrivare alla condizione di parallelismo in un altro modo. Consideriamo il sistema

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$$

le cui soluzioni ci danno l'insieme A dei punti comuni alle rette r ed s. Sono possibili tre casi:

i) A contiene un solo punto; si dice che le due rette sono **incidenti**.

ii)$A = \emptyset$; le due rette sono **parallele** (e distinte).

iii)A contiene infiniti punti; le due rette sono **coincidenti** (si possono ugualmente considerare parallele).

Dalla teoria dei sistemi lineari sappiamo che il primo caso si ha se e solo se $(ab' - a'b) \neq 0$. Il terzo caso si ha quando l'equazione di una delle due rette si ottiene dall'altra moltiplicandola per una costante diversa da zero.

Ortogonalità: due rette sono ortogonali se e solo se gli angoli che formano con l'asse delle x differiscono di $\pi/2$; dalla trigonometria sappiamo che $\tan(\pi/2 + \alpha) = -1/\tan\alpha$ e quindi le rette (5) sono ortogonali se e solo se

$$aa' + bb' = 0, \ \text{ ovvero se e solo se } \ mm' + 1 = 0\,.$$

1.5 Distanza di un punto da una retta

Siano $P = (u, v)$ e $r : ax + by + c = 0$ un punto e una retta nel piano. La distanza $d(P, r)$ di P da r è data dalla lunghezza del segmento che unisce P al punto Q intersezione della perpendicolare per P alla retta r. Ecco la formula che dà la distanza

$$d(P, r) = \frac{|au + bv + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

La verifichiamo ora in un caso concreto: siano $P = (1, 2)$, $r : 2x - y + 1 = 0$. L'equazione del fascio per P è: $(y - 2) = m(x - 1)$; poiché il coefficiente angolare della retta r vale 2, la retta s del fascio ortogonale a r sarà quella per cui $2m + 1 = 0$, ossia $s : (y - 2) = -(1/2)(x - 1)$. Le coordinate del punto Q comune alle rette r e s risolvono il sistema

$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 2x - y = -1 \end{cases}$$

Si trova $Q = (3/5, 11/5)$, pertanto $d^2(P, r) = d^2(P, Q) = (1 - 3/5)^2 + (2 - 11/5)^2 = 1/5$.

1.6 Cenni sulle coniche

Una **circonferenza** Γ è il luogo dei punti del piano aventi la stessa distanza $r > 0$ da un punto dato C (detto **centro**), r è il **raggio** di Γ.
Se $C = (a, b)$ l'equazione della circonferenza di centro C e raggio r è evidentemente

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

Una **ellisse** è il luogo dei punti del piano per i quali è costante la somma delle distanze da due punti dati detti **fuochi**.
Per determinare l'equazione dell'ellisse prendiamo l'asse delle x passante per i fuochi e l'origine nel punto medio del segmento avente i fuochi per estremi. I fuochi abbiano coordinate $(-c, o), (c, 0)$ e la somma delle distanze valga $2a$ con $a > |c| > 0$. Dovrà essere

$$\sqrt{(x + c)^2 + y^2} + \sqrt{(x - c)^2 + y^2} = 2a$$

da cui sviluppando i calcoli e semplificando

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

dividendo per $a^2(a^2 - c^2)$ e ponendo $b^2 = (a^2 - c^2)$ si ottiene infine

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

che è l'equazione canonica dell'ellisse. I parametri a e b rappresentano la lunghezza dei semiassi dell'ellisse.
Una **iperbole** è il luogo dei punti del piano per i quali è costante la differenza delle distanze da due punti dati detti **fuochi**.
L'equazione dell'iperbole si ottiene prendendo il sistema di riferimento come nel caso dell'ellisse; con calcoli simili si arriva all'equazione canonica

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Una **parabola** è il luogo dei punti del piano equidistanti da un punto dato detto fuoco e da una retta data detta direttrice.
Per determinare l'equazione della parabola scegliamo il riferimento in modo che la direttrice abbia equazione $x = -p/2$ e il fuoco coordinate $(p/2, 0)$ con $p > 0$. Dovrà essere

$$|x + p/2| = \sqrt{y^2 + (x - p/2)^2}$$

con facili calcoli si ottiene l'equazione canonica della parabola

$$y^2 = 2px$$

2 Matrici

2.1 Prime definizioni

Una **matrice** (a elementi reali) $m \times n$ (con m, n interi positivi) è un insieme di mn numeri reali disposti in un quadro rettangolare

$$\begin{pmatrix} a & b & . & . & c \\ d & . & . & . & e \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ f & g & . & . & h \end{pmatrix}$$

contenente m righe e n colonne. L'elemento che sta nella riga i-ma e nella colonna j-ma si denota con a_{ij} e dunque i è l'indice di riga e j è l'indice di colonna. Dunque una generica matrice $m \times n$ si scriverà

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & a_{2n} \\ . & . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & . & . & a_{mn} \end{pmatrix}$$

tale matrice verrà anche indicata con $A = (a_{ij})$ dove $i = 1,..,m$ e $j = 1,..,n$. Se $m = n$ la matrice si dice **quadrata** (di ordine n). Le matrici $m \times n$ si possono sommare: se $A = (a_{ij}), B = (b_{ij})$ allora $A + B = C = (c_{ij})$ con $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$; la somma di matrici è commutativa, associativa e possiede elemento neutro, cioè la matrice $O = (0)$ (tutti gli elementi sono nulli). Si può anche moltiplicare una matrice A per un numero reale (uno scalare) c ponendo $cA = (ca_{ij})$.

2.2 Moltiplicazione di matrici

Non è del tutto ovvia la definizione di prodotto (righe per colonne) di matrici. Se $A = (a_{ij})$ è una matrice $m \times n$ e $B = (b_{ij})$ è una matrice $p \times q$, la matrice prodotto $C = (c_{ij}) = AB$ di ordine $m \times q$ è definita, **solo se** $n = p$ dalla formula

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + ... + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} \quad \text{dove} \quad i = 1, 2, .., m \text{ e } j = 1, 2, .., q$$

Osserviamo subito che se è definito il prodotto AB in generale non sarà definito il prodotto BA. Consideriamo ora l'insieme $\mathcal{A}$ delle matrici **quadrate** di ordine n. Si chiama matrice **identità** in $\mathcal{A}$ la matrice $I = (\delta_{ij})$ dove $\delta_{ij} = 1$ se $i = j$, $\delta_{ij} = 0$ se $i \neq j$: gli elementi di I sono tutti nulli tranne quelli della diagonale principale (da sinistra a destra). La matrice I è l'elemento neutro del prodotto in A, cioè $AI = IA = A$ per ogni $A \in \mathcal{A}$. Il prodotto non è commutativo come mostra il seguente esempio

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \quad AB = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} \quad BA = \begin{pmatrix} -2 & -5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Vale la proprietà distributiva, cioè $A(B + C) = AB + AC$.

2.3 Determinanti

Vogliamo definire il concetto fondamentale di **determinante** (det) di una matrice quadrata A di ordine n.
Se $n = 1$ allora $A = (a)$, porremo $\det(A) = a$.

Se $n = 2$ allora $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, porremo $\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.
Sia ora data una matrice di ordine n $A = (a_{ij})$, chiamiamo A_{ij} la matrice (di ordine $n-1$) che si ottiene dalla matrice A sopprimendo la i-ma riga e la j-ma colonna.
Definizione. Il determinante della matrice A è definito dalla formula

$$(*) \qquad \det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij})\,.$$

Occorre qualche commento a questa definizione:
(i) La formula $(*)$ riduce il calcolo del determinante di una matrice di ordine n a quello di n determinanti di matrici di ordine $n-1$ e (verifica semplice) è coerente con le definizioni date per i casi $n = 1$ e $n = 2$; pertanto con la formula $(*)$ si può calcolare (in linea di principio) il determinante di una matrice di qualsiasi ordine.
(ii) Si osservi che il risultato della sommatoria in $(*)$ apparentemente dipende da i (si dice infatti che la $(*)$ sviluppa il determinante secondo la riga i-ma), in effetti si dimostra che il risultato non dipende dalla riga scelta: cioè comunque si scelga $1 \le k \le n$ si ha (sviluppo per la riga k-ma):

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{k+j} a_{kj} \det(A_{kj})\,;$$

ma si può anche sviluppare per colonne, cioè si ha anche comunque si scelga $1 \le j \le n$ (sviluppo per la colonna j-ma):

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij})\,.$$

(iii) Si dice che nella matrice A un elemento a_{ij} è di posto pari (dispari) se la somma dei suoi indici è pari (dispari). L'espressione $\alpha_{ij} = (-1)^{i+j}\det(Aij)$ si chiama **complemento algebrico** dell'elemento a_{ij} e quindi la $(*)$ si può anche scrivere

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\alpha_{ij}\,.$$

Si può accennare all'importanza del determinante col seguente esempio: consideriamo l'equazione in matrici 2×2

$$AX = I \quad \text{ovvero} \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

facendo il prodotto righe per colonne si ottengono i due sistemi nelle incognite rispett. x_{11}, x_{21} e x_{12}, x_{22}

$$\begin{cases} a_{11}x_{11} + a_{12}x_{21} = 1 \\ a_{21}x_{11} + a_{22}x_{21} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a_{11}x_{12} + a_{12}x_{22} = 0 \\ a_{21}x_{12} + a_{22}x_{22} = 1 \end{cases}$$

si vede con facili calcoli che i sistemi risultano compatibili e con una sola soluzione se e solo se $(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) \neq 0$ cioè se e solo se $\det(A) \neq 0$. Questo fatto vale in generale: una matrice quadrata di ordine n qualsiasi A si dice **non singolare** se $\det(A) \neq 0$, in tal caso l'equazione in matrici $AX = I$ ha una e una sola soluzione per X che si chiama **matrice inversa** di A e si indica con A^{-1}.

3 Cenni di geometria analitica nello spazio

3.1 La retta

Siano P_1 e P_2 due punti distinti. Consideriamo i punti dello spazio $P_i = (x_i, y_i, z_i)$ anche come vettori. Il **segmento** di estremi P_1, P_2 è l'insieme

$$[P_1, P_2] = \{(1-t)P_1 + tP_2 \ \ , t \in [0, 1]\}$$

si osservi che per $t = 0$ si ha il punto P_1 e per $t = 1$ il punto P_2.
L'**equazione parametrica della retta** per i punti P_1 e P_2 si ottiene dalla formula di sopra facendo variare t in tutto R. Scrivendo le componenti del vettore si ottengono le equazioni parametriche esplicite della retta:

$$\begin{cases} x(t) = (x_2 - x_1)t + x_1 \\ y(t) = (y_2 - y_1)t + y_1 \\ z(t) = (z_2 - z_1)t + z_1 \end{cases}$$

La rappresentazione cartesiana di questa retta si ottiene eliminando nelle equazioni di sopra il parametro t (supponiamo che le coordinate dei due punti P_i siano tutte distinte):

$$\begin{cases} \frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} \\ \frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1} \end{cases}$$

Le equazioni di questo sistema sono equazioni di un piano: dunque una retta si rappresenta come **intersezione** di due piani.

3.2 Il piano

Ogni piano di R^3 si può rappresentare come luogo dei punti $P = (x, y, z)$ che soddisfano un'equazione del tipo

$$ax + by + cz + d = 0 \ \text{ , con } \ a^2 + b^2 + c^2 > 0 \ ,$$

se $c \neq 0$ l'equazione è lineare non omogenea, se $c = 0$ è (propriamente) lineare.
L'equazione del piano passante per tre punti non allineati $P_i = (x_i, y_i, z_i)$ si può scrivere

$$\det \begin{pmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{pmatrix} = 0$$

3.3 Rette e piani: posizioni reciproche

Dati nello spazio una retta r e un piano π, può accadere che
i) r e π hanno esattamente un punto in comune (la retta è incidente al piano)
ii) r e π non hanno punti in comune (la retta è parallela al piano)
iii) tutti i punti di r stanno su π (la retta giace sul piano).
L'equazioni parametriche di r siano

$$(*) \qquad \begin{cases} x = x_0 + \alpha t \\ y = y_0 + \beta t \\ z = z_0 + \gamma t \end{cases}$$

e l'equazione di π sia

$$(**) \qquad ax + by + cz + d = 0 \ .$$

Sostituendo le (*) nella (**) si ottiene l'equazione

$$(***) \qquad (ax_0 + by_0 + cz_0 + d) + (a\alpha + b\beta + c\gamma)t = 0 \ :$$

si ha il caso i) se e solo se la (***) ha una e una sola soluzione, cioè se e solo se

$$(a\alpha + b\beta + c\gamma) \neq 0 \ ,$$

si ha il caso ii) se e solo se la (***) non ha soluzioni, cioè se e solo se

$$(a\alpha + b\beta + c\gamma) = 0 \ \text{ e } \ (ax_0 + by_0 + cz_0 + d) \neq 0 \ ,$$

si ha il caso iii) se e solo se la (***) ha soluzione per ogni valore di t, cioè se e solo se

$$(a\alpha + b\beta + c\gamma) = 0 \quad \text{e} \quad (ax_0 + by_0 + cz_0 + d) = 0 \ .$$

Se la retta r fosse data come intersezione di due piani, si devono considerare le matrici incompleta e completa del sistema (di tre equazioni in tre incognite) definito da r e dal terzo piano π: si otterranno per i tre casi le condizioni corrispondenti.