Lezioni di Geometria

a.a. 2007-2008 cdl SIE prof. C. Franchetti

1 Geometria analitica nel piano

1.1 Distanza di due punti

Siano $P_1 = (x_1, y_1), P_2 = (x_2, y_2)$ due punti del piano, se $d(P_1, P_2)$ indica la loro distanza, applicando il teorema di Pitagora si ha subito che

$$d^2(P_1, P_2) = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$$

1.2 Equazione di una retta

Siano $P_1 = (x_1, y_1), P_2 = (x_2, y_2)$ due punti distinti del piano (questo accade se e solo se $(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 > 0$); perché un punto generico $P = (x, y)$ sia sulla retta individuata dai punti P_1, P_2 occorre che (usiamo similitudine di triangoli)

$$\frac{y - y_1}{y - y_2} = \frac{x - x_1}{x - x_2}$$

e questa uguaglianza è equivalente a

$$(y_2 - y_1)x + (x_1 - x_2)y + (y_1 x_2 - x_1 y_2) = 0\,.$$

I punti P_1, P_2 soddisfano l'equazione di sopra che appunto viene detta equazione della retta per due punti (distinti).

Mostriamo ora che viceversa il luogo dei punti (x, y) del piano che soddisfano un'equazione del tipo

$$(1) \qquad ax + by + c = 0 \;\text{ con }\; (a^2 + b^2) > 0$$

è una retta. Siano $P_i = (x_i, y_i)$, $i = 1, 2, 3$ tre punti le cui coordinate soddisfano la (1), allora si ha $ax_i + by_i + c = 0$, da cui, supponendo per esempio $a \neq 0$, si ottiene

$$(x_1 - x_2) = (b/a)(y_2 - y_1) \quad (x_1 - x_3) = (b/a)(y_3 - y_1)$$

da questa si ha subito

$$\frac{y_1 - y_2}{y_1 - y_3} = \frac{x_1 - x_2}{x_1 - x_3}$$

e quindi i tre punti stanno su una stessa retta.
Quando si ha che $a = 0$ (e quindi $b \neq 0$) [$b = 0$ (e quindi $a \neq 0$)] la (1) diventa risp.

$$(2) \qquad y = h \quad [x = k] \qquad (h = -(c/b))\ [k = -(c/a)]$$

e la (2) è l'equazione della generica retta parallela all'asse delle x [delle y].
Da quanto visto segue che ogni retta che non sia parallela all'asse delle y si può scrivere nella forma

$$(3) \qquad y = mx + p$$

detta equazione **normale** della retta. I coefficienti p e m hanno un semplice significato geometrico. La retta (3) passa per il punto $(0, p)$ per cui p rappresenta l'ordinata del punto in cui la retta interseca l'asse delle y. Se $P_i = (x_i, y_i),\ i = 1, 2$ sono due punti qualsiasi le cui coordinate soddisfano la (3), allora si ha $(y_i - mx_i) = p$ per cui $(y_1 - mx_1) = (y_2 - mx_2)$ e quindi il rapporto $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ vale m per ogni coppia di punti della retta (3). Con un po' di trigonometria concludiamo che m, detto **coefficiente angolare** della retta (3), è uguale alla tangente trigonometrica dell'angolo che la retta fa con l'asse delle x (se $m = 0$ la retta (3) risulta parallela all'asse delle x e si può considerare che faccia un angolo nullo con l'asse delle x). In parole povere m misura la pendenza della retta.

1.3 Equazione di un fascio

Sia $P = (a, b)$ un punto qualsiasi del piano. Ogni retta passante per P che non sia parallela all'asse delle y si può scrivere nella forma

$$(4) \qquad y - b = m(x - a) \ ,$$

la (4) è l'equazione del **fascio** delle rette uscenti dal punto P, il parametro del fascio m, come sappiamo, è il loro coefficiente angolare. In realtà nel fascio di rette per P c'è anche la parallela all'asse delle y che non si ottiene dalla (4) per nessun valore del parametro m, (ci vorrebbe un valore infinito, una retta verticale forma con l'asse delle x un angolo di $\pi/2$ e la tangente non è definita in $\pi/2$).

1.4 Parallelismo e ortogonalità

Siano r e s due rette di equazioni

$$r: \; ax + by + c = 0 \qquad s: \; a'x + b'y + c' = 0 \tag{5}$$

vogliamo determinare sotto quali condizioni sui coefficienti risultano parallele, ortogonali.
Parallelismo: perché due rette siano parallele occorre e basta che abbiano lo stesso coefficiente angolare. Se $b = 0$ [$b' = 0$] la retta r [s] è parallela all'asse delle y e quindi tale dovrà essere anche l'altra retta s [r] e quindi anche $b' = 0$ [$b = 0$]. Se b e b' sono entrambi non nulli allora scrivendo le rette in forma normale si vede che i coefficienti angolari sono rispettivamente $-(a/b)$ per r e $-(a'/b')$ per s. I coefficienti angolari risulteranno uguali se e solo se $ab' = a'b$ (condizione soddisfatta anche dalle parallele all'asse y). In conclusione le rette r e s sono parallele se e solo se

$$ab' = a'b$$

Se in particolare abbiamo

$$r: \; y = mx + p \qquad s: \; y = m'x + p'$$

ovviamente r e s sono parallele se e solo se $m = m'$.
Si può arrivare alla condizione di parallelismo in un altro modo. Consideriamo il sistema

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$$

le cui soluzioni ci danno l'insieme A dei punti comuni alle rette r ed s. Sono possibili tre casi:
i) A contiene un solo punto; si dice che le due rette sono **incidenti**.
ii)$A = \emptyset$; le due rette sono **parallele** (e distinte).
iii)A contiene infiniti punti; le due rette sono **coincidenti** (si possono ugualmente considerare parallele).
Dalla teoria dei sistemi lineari sappiamo che il primo caso si ha se e solo se $(ab' - a'b) \neq 0$. Il terzo caso si ha quando l'equazione di una delle due rette si ottiene dall'altra moltiplicandola per una costante diversa da zero.
Ortogonalità: due rette sono ortogonali se e solo se gli angoli che formano con l'asse delle x differiscono di $\pi/2$; dalla trigonometria sappiamo che $\tan(\pi/2 + \alpha) = -1/\tan\alpha$ e quindi le rette (5) sono ortogonali se e solo se

$$aa' + bb' = 0, \;\; \text{ovvero se e solo se } \; mm' + 1 = 0\,.$$

1.5 Distanza di un punto da una retta

Siano $P = (u, v)$ e $r : ax + by + c = 0$ un punto e una retta nel piano. La distanza $d(P, r)$ di P da r è data dalla lunghezza del segmento che unisce P al punto Q intersezione della perpendicolare per P alla retta r. Ecco la formula che dà la distanza

$$d(P,r) = \frac{|au + bv + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

La verifichiamo ora in un caso concreto: siano $P = (1, 2)$, $r : 2x - y + 1 = 0$. L'equazione del fascio per P è: $(y - 2) = m(x - 1)$; poiché il coefficiente angolare della retta r vale 2, la retta s del fascio ortogonale a r sarà quella per cui $2m + 1 = 0$, ossia $s : (y - 2) = -(1/2)(x - 1)$. Le coordinate del punto Q comune alle rette r e s risolvono il sistema

$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 2x - y = -1 \end{cases}$$

Si trova $Q = (3/5, 11/5)$, pertanto $d^2(P, r) = d^2(P, Q) = (1 - 3/5)^2 + (2 - 11/5)^2 = 1/5$.

1.6 Cenni sulle coniche

Una **circonferenza** Γ è il luogo dei punti del piano aventi la stessa distanza $r > 0$ da un punto dato C (detto **centro**), r è il **raggio** di Γ.
Se $C = (a, b)$ l'equazione della circonferenza di centro C e raggio r è evidentemente

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

Una **ellisse** è il luogo dei punti del piano per i quali è costante la somma delle distanze da due punti dati detti **fuochi**.
Per determinare l'equazione dell'ellisse prendiamo l'asse delle x passante per i fuochi e l'origine nel punto medio del segmento avente i fuochi per estremi. I fuochi abbiano coordinate $(-c, 0), (c, 0)$ e la somma delle distanze valga $2a$ con $a > |c| > 0$. Dovrà essere

$$\sqrt{(x + c)^2 + y^2} + \sqrt{(x - c)^2 + y^2} = 2a$$

da cui sviluppando i calcoli e semplificando

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

dividendo per $a^2(a^2 - c^2)$ e ponendo $b^2 = (a^2 - c^2)$ si ottiene infine

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

che è l'equazione canonica dell'ellisse. I parametri a e b rappresentano la lunghezza dei semiassi dell'ellisse.
Una **iperbole** è il luogo dei punti del piano per i quali è costante la differenza delle distanze da due punti dati detti **fuochi**.
L'equazione dell'iperbole si ottiene prendendo il sistema di riferimento come nel caso dell'ellisse; con calcoli simili si arriva all'equazione canonica

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Una **parabola** è il luogo dei punti del piano equidistanti da un punto dato detto fuoco e da una retta data detta direttrice.
Per determinare l'equazione della parabola scegliamo il riferimento in modo che la direttrice abbia equazione $x = -p/2$ e il fuoco coordinate $(p/2, 0)$ con $p > 0$. Dovrà essere

$$|x + p/2| = \sqrt{y^2 + (x - p/2)^2}$$

con facili calcoli si ottiene l'equazione canonica della parabola

$$y^2 = 2px$$