Sommario delle lezioni di Analisi Matematica
a.a. 2009-2010 cdl EDL (Ingegneria edile) prof. C. Franchetti

Paragrafi stampati in piccolo come questo sono da considerarsi complementari e non indispensabili

Parte Prima

1 Argomenti preliminari

1.1 Equazioni di secondo grado

La più generale equazione di secondo grado si può scrivere così

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad a \neq 0$$

Dividendo per a si ottiene un'equazione equivalente che scriveremo

$$x^2 + px + q = 0$$

per risolverla si usa il cosidetto "completamento del quadrato"

$$x^2 + px + q = (x + p/2)^2 + q - p^2/4 \text{ e quindi } (x + p/2)^2 = p^2/4 - q = \Delta$$

Poiché un quadrato non può essere negativo, se $\Delta < 0$ non ci sono soluzioni. Se $\Delta \geq 0$ si ha $x = -p/2 \pm \sqrt{\Delta}$. Se $\Delta = 0$ si ha un'unica soluzione, se $\Delta > 0$ si hanno due soluzioni distinte.

1.2 Potenze

Sia $a \neq 0$ e n sia un intero positivo maggiore di 1, posto $a^n = a.a...a$ (n fattori uguali ad a); valgono le proprietà

$$a^m a^n = a^{m+n} \text{ dove } m, n > 1 \; ; \; a^m/a^n = a^{m-n}, \text{ dove } m, n > 1, m > n.$$

Volendo estendere la definizione di potenza agli esponenti 1 e 0 in modo che le proprietà restino valide si pone $a^1 = a$, $a^0 = 1$. Analogamente si ottiene una definizione coerente per ogni esponente intero relativo (in Z) ponendo, per $p > 0, a^{-p} = 1/a^p$. Supponiamo ora che sia $a > 0$, si definisce la potenza a esponente razionale a^x ($x \in Q$) nel seguente modo: se $x = m/n$ (dove m, n sono interi) allora $a^x = \sqrt[n]{a^m}$. Si verifica che le due proprietà soprascritte continuano a valere per esponenti in Q.

1.3 Regola di Ruffini

Dicesi polinomio ogni espressione del tipo $P(x) = c_0+c_1x+c_2x^2+...+c_nx^n$, il numero c_i viene detto coefficiente del termine con x a esponente i. Si chiama grado del polinomio il massimo esponente fra i termini con coefficiente non nullo. Se $c_n \neq 0$ il polinomio scritto sopra $P(x)$ ha grado (esattamente) n, altrimenti il suo grado sarà strettamente minore di n.
Definizione. Un polinomio $A(x)$ si dice divisibile per un polinomio $B(x)$ se esiste un polinomio $Q(x)$ tale che $A(x) = B(x)Q(x)$.
Siccome il grado del prodotto di due polinomi è uguale alla somma dei gradi dei polinomi fattori, segue che una condizione necessaria per la divisibilità è che il grado di $B(x)$ sia minore o uguale del grado di $A(x)$. Vale il seguente risultato (divisione con resto): dati due polinomi $A(x), B(x)$ con grado di $B(x)$ minore o uguale del grado di $A(x)$, esiste una e una sola coppia di polinomi $Q(x), R(x)$ con grado di $R(x)$ strettamente minore del grado di $B(x)$ tale che $A(x) = B(x)Q(x) + R(x)$. Segue da qui
Teorema (regola di Ruffini). Un polinomio $A(x)$ di grado maggiore o uguale a 1 è divisibile per un binomio del tipo $(x - a)$ se e solo se a è radice del polinomio $A(x)$.
Dimostrazione. Si ha $A(x) = (x-a)Q(x)+R(x)$, con grado di $R(x)$ minore di grado di $(x - a)$ che è uguale a 1, cioè grado di $R(x) = 0$, ossia $R(x)$ è una costante R. Pertanto $A(x) = (x - a)Q(x) + R$; facendo $x = a$ si ottiene $R = A(a)$ per cui $A(x) = (x - a)Q(x) + A(a)$. Dunque la divisibilità si ha se e solo se a è una radice di $A(x)$, cioè $A(a) = 0$.

1.4 Misura in radianti degli angoli

Se C è una circonferenza di raggio $r > 0$, allora la lunghezza di C è $2\pi r$, dove $\pi = 3,1415...$ Misureremo gli angoli così: il vertice di un angolo qualsiasi sia centro di una circonferenza C di raggio 1, la misura (in radianti) di questo angolo è, per definizione, uguale alla lunghezza dell'arco intercettato dall'angolo su C. Si vede subito che la misura (in radianti) degli angoli di 0, 90, 180, 360 gradi vale risp. $0, \pi/2, \pi, 2\pi$. La misura di un angolo in radianti è sempre un numero reale. Gli angoli saranno sempre misurati in radianti.

1.5 Insiemi

Il concetto di "insieme" si considera primitivo. Denotiamo di solito insiemi generici con le maiuscole: A, B etc.; gli oggetti (elementi) di un insieme con minuscole a, b etc. Si usa il simbolo $\in$ per l'**appartenenza**, quindi $b \in B$ significa che l'oggetto b appartiene all'insieme B. A volte, se è possibile, si denota un insieme elencandone i suoi elementi, per es. se $D = \{1, 5, 12\}, D$ contiene esattamente i tre elementi elencati. Si dice che un insieme A è finito se contiene un numero finito n di elementi e si dice che n è la sua **cardinalità**. Si considera anche l'insieme privo di elementi, detto **insieme vuoto** che viene indicato con $\emptyset$. Si dice che B è un **sottoinsieme** di A (e si scrive $B \subset A$) se ogni elemento di B è anche un elemento di A. Notare che $B \subset A$ e $A \subset B$ implica $A = B$. Dati due insiemi A, B si definiscono rispettivamente le operazioni di **unione** e **intersezione** che portano a nuovi insiemi: $x \in A \cup B$ se x appartiene ad A **o** a B, $x \in A \cap B$ se x appartiene ad A **e** a B. Vale sempre $A \cap B \subset A \subset A \cup B$ e $A \cap B \subset B \subset A \cup B$. Se $A \cap B = \emptyset$ si dice che A e B sono **disgiunti**. Spesso tutti gli insiemi che si considerano sono sottoinsiemi di un insieme "universo" . Dato un insieme A in un universo X, il **complementare** di A (rispetto a X) denotato con A^c è l'insieme degli elementi (appartenenti a X) che non stanno in A. Siano A, B insiemi, il **prodotto cartesiano** di A per B, denotato $A \times B$, è l'insieme i cui elementi sono tutte le **coppie ordinate** (a, b) con primo elemento in A e secondo elemento in B. Osserviamo che se A ha cardinalità m e B ha cardinalità n, allora $A \times B$ ha cardinalità mn. Tratteremo spesso gli insiemi numerici $N \subset Z \subset Q \subset R$(numeri reali) $\subset C$ (numeri complessi).
Dato un insieme qualsiasi A, una **relazione** in A è una legge denotata con $\sim$ che seleziona alcune coppie di $A \times A$: se la relazione $\sim$ seleziona la coppia (a, b) scriveremo $a \sim b$.
La relazione $\sim$ si dice di **equivalenza** se gode delle tre proprietà seguenti: **riflessiva**: $a \sim a$ per ogni $a \in A$, **simmetrica**: $a \sim b$ implica $b \sim a \, (a, b \in A)$, **transitiva**: $a \sim b$ e $b \sim c$ implica $a \sim c \, (a, b, c \in A)$.
Discutiamo ora l'importante concetto di **insieme quoziente**. Supponiamo che un'urna contenga 50 palline: 10 bianche, 10 nere, 15 rosse e 15 verdi; a questo ente concreto posso associare un insieme astratto A che contiene (per definizione) 50 elementi (le palline); posso però considerare le palline dello stesso colore come un'unica sottofamiglia della famiglia di tutte le palline, questo punto di vista equivale a considerare un altro insieme astratto A^* (che chiameremo insieme quoziente) che possiede esattamente 4 elementi; potrei scrivere

$A^* = \{b, n, r, v\}$. E' importante ricordarsi sempre che gli insiemi A e A^* sono (logicamente) distinti. Faremo ora seguire le definizioni formali.
Sia $a \in A$, l'insieme degli elementi di A equivalenti ad a nella relazione di equivalenza $\sim$ si chiama **classe di equivalenza** determinata da a, questa è il sottoinsieme di A descritto da $\{b \in A : b \sim a\}$. Si verifica facilmente che due classi di equivalenza o coincidono o sono disgiunte.
Definizione. Si chiama **insieme quoziente** (di A rispetto alla relazione di equivalenza $\sim$) l'insieme $A^{\sim}$ i cui elementi sono le classi di equivalenza determinate in A dalla relazione di equivalenza $\sim$.
Nell'esempio dell'urna la relazione di equivalenza $\sim$ è "dello stesso colore", cioè $a \sim b$ se e solo se a è dello stesso colore di b. Dato un insieme A, una famiglia di sottoinsiemi $\{A_i\}$ di A è una **partizione** di A se $\cup_i A_i = A$ e $A_i \cap A_j = \emptyset$ per $i \neq j$. Ogni partizione di A definisce in modo naturale una relazione di equivalenza $\sim$ su A per cui i sottoinsiemi A_i sono le sue classi di equivalenza: basta porre $a \sim b$ se e solo se a e b appartengono a uno stesso sottoinsieme A_i della partizione.

1.6 Operazioni negli insiemi numerici N e Z

Conosciamo l'addizione (o somma) in N: se $a \in N$, $b \in N$ sappiamo in qualche modo calcolare $(a + b)$ che sarà ancora un numero di N. L'addizione gode delle due proprietà:
$a + b = b + a$ **commutativa**, $(a + b) + c = a + (b + c)$ **associativa**.
Si noti che la proprietà associativa consente di definire la somma di un numero qualsiasi di addendi. Se, come spesso si fa, si considera anche lo 0 come appartenente a N, conviene rilevare l'esistenza in N di un elemento neutro, cioè lo zero, rispetto alla somma; si ha infatti per ogni $a \in N$ che $a + 0 = 0 + a = a$. Siano $a, b \in N$, consideriamo l'equazione $a + x = b$: risolvere (in N) l'equazione significa determinare il sottoinsieme (eventualmente vuoto) di N dei numeri di N che sostituiti alla x nell'equazione rendono vera l'uguaglianza. La x chiamasi incognita dell'equazione. Per esempio l'equazione $3 + x = 5$ ha l'unica soluzione $x = 2$; l'equazione $5 + x = 3$ non ha soluzioni (in N). In N si può definire in qualche caso l'operazione inversa della somma ossia la sottrazione: dati a, b in N, $(b - a)$, se esiste, è quel numero che sommato ad a mi dà b, ovvero la soluzione dell'equazione $a + x = b$. Se ampliamo l'insieme N ottenendo l'insieme Z degli interi relativi non occorre più considerare la sottrazione e inoltre l'equazione (in Z) $a + x = b$ ha sempre una e una sola soluzione: $x = (b - a)$. Come si dice rispetto

all'operazione di somma Z è un **gruppo commutativo**, valgono cioè le proprietà: ogni $a \in Z$ ammette (in Z) un unico inverso, denotato con $-a$, che soddisfa $a+(-a) = (-a)+a = 0$, esiste l'elemento neutro rispetto alla somma (lo zero) inoltre la somma è commutativa. In Z è definita anche una seconda operazione, la moltiplicazione (o prodotto): se $a, b \in Z$ sappiamo in qualche modo calcolare ab che sarà ancora un numero di Z. La moltiplicazione gode delle due proprietà: $ab = ba$ commutativa, $(ab)c = a(bc)$ associativa. Si noti che la proprietà associativa consente di definire il prodotto di un numero qualsiasi di fattori. Esiste poi l'elemento neutro rispetto al prodotto che è il numero 1. Le due operazioni sono legate dalla proprietà **distributiva**: $a(b + c) = ab + ac$. Si dimostrano inoltre facilmente: regola dei segni (+ per + = - per - = + ; + per - = - per + = -) e la legge di annullamento di un prodotto ($ab = 0$ se e solo se uno almeno fra a e b è uguale a 0).

1.7 Funzioni

Da un punto di vista (molto) astratto una funzione è una tripletta (f, A, B) che però denoteremo nella forma $f : A \to B$ dove A, B sono due insiemi qualsiasi e f è una "legge di natura qualsiasi" che ad ogni elemento a di A associa uno e un solo elemento, denotato $f(a)$, appartenente a B, A si chiama **dominio** di f e B si chiama **codominio** di f. Si chiama **immagine** di f l'insieme $f(A) = \{f(a), a \in A\}$, cioè l'immagine di f è l'insieme di tutti i valori che prende su A la funzione f, si noti che $f(A) \subset B$ ma non è richiesto che $f(A)$ "riempia" B; se $f(A) = B$ si dice che la funzione f è **suriettiva**. Si può vedere f come una "legge deterministica". A volte due funzioni si possono "comporre" in modo da definire una terza funzione (la composizione). Date due funzioni $f : A \to B$ e $g : C \to D$ se $B \subset C$ è possibile definire la **funzione composta** $g \circ f : A \to D$ mediante la formula $(g \circ f)(x) = g[f(x)]$. Una funzione $f : A \to B$ si dice **iniettiva** se $a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2)$ o equivalentemente se $f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2$. Se f è iniettiva allora per ogni $b \in B$ esiste al più un elemento $a \in A$ tale che $f(a) = b$, se poi $b \in f(A)$ esiste esattamente un $a \in A$ tale che $f(a) = b$. Se f è iniettiva si può definire la sua **funzione inversa** cioè la funzione $f^{-1} : f(A) \to A$ mediante la formula $f^{-1}(y) = x$ dove x è l'unico elemento di A tale che $f(x) = y$. Una funzione$f : A \to B$ che sia contemporaneamente iniettiva e suriettiva si dice **biiettiva**. Si dice che due insiemi A, B sono in corrispondenza biunivoca se esiste una biiezione tra essi, in tal caso A e B

hanno la stessa cardinalità.
Data una funzione $f : A \to B$, il suo **grafico** è il sottoinsieme del prodotto cartesiano $A \times B$ così definito: $\mathrm{Gr}(f) = \{(a, f(a)) : a \in A\}$.
Se B è uguale a R o a un suo sottoinsieme si dice che f è una **funzione reale**.
Consideriamo funzioni reali definite in uno stesso insieme A, la somma e il prodotto di due tali funzioni f, g sono definiti in modo naturale dalle formule $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$, $(fg)(x) = f(x)g(x)$; il quoziente f/g risulterà definito nel sottoinsieme $A_0 = \{x \in A : g(x) \neq 0\}$ di A dalla formula $(f/g)(x) = f(x)/g(x)$. Se A è un sottoinsieme di R si parlerà di **funzioni reali di variabile reale**.

1.8 Relazione d'ordine

Una **relazione d'ordine** in un insieme A è una relazione $\sim$ che soddisfa le tre proprietà:
riflessiva $a \sim a$, **antisimmetrica** $a \sim b$ e $b \sim a$ implica $a = b$, **transitiva** $a \sim b$ e $b \sim c$ implica $a \sim c$;
un insieme A in cui sia definita una relazione d'ordine si dice **parzialmente ordinato**, se poi per ogni coppia (a, b) vale o $a \sim b$ o $b \sim a$ si dice che A è **totalmente ordinato**.

1.9 Uso degli indici

Una lettera a può rappresentare un numero qualsiasi; avendo più numeri da rappresentare si potrebbero usare più lettere $a, b, c, ...$; dovendo per es. indicare un gruppo di 50 numeri si dovrebbe usare un (lungo) elenco $a, b, ..$ (di 50 lettere) ma è più conveniente usare la notazione $\{a_i\}_{i=1}^{50}$ che è la scrittura abbreviata per $\{a_1, a_2, ..., a_{50}\}$. Per esempio $\{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17\}$ lo possiamo scrivere $\{2k - 1\}_{k=1}^{9}$. L'insieme N dei numeri naturali può essere denotato $\{n\}_{n=1}^{\infty} = \{1, 2, .., n, ...\}$ e il suo sottoinsieme dei numeri pari $\{2n\}_{n=1}^{\infty} = \{2, 4, .., 2n, ...\}$, l'insieme dei reciproci dei numeri naturali $\{1/k\}_{k \in N} = \{1/1, 1/2, .., 1/n, ...\}$.

1.10 Nozioni di calcolo combinatorio

Denoteremo con $\mathrm{card}(A)$ la cardinalità di un insieme A. Ricordiamo che se $\mathrm{card}(A) = p$, $\mathrm{card}(B) = q$, allora $\mathrm{card}(A \times B) = pq$. Vogliamo in un certo senso generalizzare questa formula. Consideriamo il modello di un'urna U che contiene n palline $\{a_1, a_2, .., a_n\}$ distinguibili. Si fanno successivamente k estrazioni (di una pallina). Il risultato viene considerato come una k-pla ordinata $\{a_{i_1}, a_{i_2}, .., a_{i_k}\}$ dove a_{i_s} indica la pallina estratta nella s-ma estrazione ($i_s \in \{1, 2, .., n\}$). Le estrazioni si possono fare con due modalità diverse: con rimpiazzamento, senza rimpiazzamento (si noti che nel secondo caso dovrà essere $k \leq n$). Si chiede quanti sono i risultati possibili. Nel primo caso si hanno tanti possibili risultati quanto la cardinalità del prodotto cartesiano di k copie di U, cioè n^k. Nel secondo caso ogni volta l'urna ha una pallina in meno e quindi il risultato sarà $n(n-1)...(n-k+1) = D_{n,k}$ (sono k fattori calanti di uno a partire da n); questo numero conta le **disposizioni** di n oggetti k a k. Il numero $D_{n,n}$ conta tutte le **permutazioni** possibili di n oggetti e si indica con $n!$ (n fattoriale). Dunque $n! = n(n-1)..3.2.1$, per definizione si pone $0! = 1$. Consideriamo ora il numero $C_{n,k}$ (**combinazioni**) dei sottoinsiemi distinti di cardinalità k di un insieme di cardinalità n. E' facile vedere che $D_{n,k} = k!C_{n,k}$ e quindi

$$C_{n,k} = \binom{n}{k} = \frac{n(n-1)..(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}\,.$$

Ricordiamo qui la formula per le potenze di un binomio (**binomio di Newton**):

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

2 Gli insiemi numerici Q e R

2.1 I numeri razionali

L'insieme dei numeri razionali Q è l'insieme i cui elementi sono le classi di equivalenza delle frazioni. Richiamiamo le principali proprietà: Q è un gruppo commutativo rispetto alla somma, $Q \setminus \{0\}$ è un gruppo commutativo rispetto al prodotto, vale la proprietà distributiva. Si vede facilmente che Q è totalmente ordinato dalla usuale relazione $\leq$ di minore o uguale. Q è **denso**, questo significa che per ogni coppia a, b con $a \leq b, a \neq b$ (naturalmente scriveremo più semplicemente $a < b$) esiste un c tale che $a < c < b$. (Si prenda per esempio $c = (a+b)/2$).

2.2 I numeri reali

Diamo qui un cenno su come si possa definire R come "ampliamento" di Q. Premettiamo delle definizioni riguardanti insiemi totalmente ordinati (che applichiamo a Q e poi a R). Sia A un sottoinsieme non vuoto di Q, un elemento $M \in Q$ è un **maggiorante** per A se $a \leq M$ per ogni $a \in A$; se esistono maggioranti per A si dice che A è **superiormente limitato**. Un insieme superiormente limitato può avere (ma può anche non avere) un **massimo**, cioè un elemento α appartenente ad A tale che $\alpha \geq a$ per ogni $a \in A$. In modo analogo si danno le definizioni di **minorante**, di insieme **inferiormente limitato** e di **minimo**. Se A è nello stesso tempo inferiormente limitato e superiormente limitato si dirà che A è **limitato**.

Definizione. Una coppia (A, B) di sottoinsiemi di Q si dice che è una **sezione** in Q se: A, B sono non vuoti, $A \cup B = Q$ e $A \cap B = \emptyset$ (questo significa che A, B definiscono una partizione non banale di Q) e inoltre $a \in A, b \in B \Rightarrow a < b$.

Si noti che se A ha massimo allora B non può avere minimo, se B ha minimo allora A non può avere massimo (questo segue dal fatto che Q è denso). Per avere le sezioni di questo tipo, dette sezioni di Dedekind, basta fissare un $q \in Q$ e definire $A = \{x \in Q : x \leq q\}$, $B = A^c$ oppure $A = \{x \in Q : x < q\}$, $B = A^c$, in effetti possiamo identificare queste due sezioni oppure chiamare sezioni di Dedekind solo quelle in cui l'insieme a sinistra ammette massimo. Le sezioni di Dedekind (con la convenzione di sopra) sono chiaramente in corrispondenza biunivoca con gli elementi di Q. A prima vista può sembrare sorprendente il fatto che esistano in Q sezioni (A, B) che non sono di Dedekind, tali sono le sezioni per cui non esiste il massimo di A e non esiste il minimo di B: queste sezioni si chiamano **lacune**. E' una lacuna in Q la sezione (A, B) dove $A = \{x \in Q : x \leq 0\} \cup \{x \in Q : x > 0 \,\mathrm{e}\, x^2 < 2\}$, $B = A^c$. L'insieme R dei numeri reali è l'insieme di tutte le sezioni in Q: l'insieme delle sezioni di Dedekind corrisponde all'insieme dei numeri razionali (può essere identificato con Q), le lacune sono dette numeri irrazionali. E' possibile estendere in modo coerente a tutto R le operazioni e la relazione di ordine in Q.

Notiamo qui che una funzione reale $f : A \to R$ si dice **limitata** se $f(A)$ è un sottoinsieme limitato di R.

2.3 Completezza di R

R gode di tutte le proprietà di Q con in più la fondamentale proprietà di **completezza** che ora descriveremo. Sia A un sottoinsieme non vuoto di R,

se A non è superiormente limitato diremo che l'**estremo superiore** di A è $+\infty$ ($\sup A = +\infty$); in caso contrario esistono maggioranti per A.
Teorema (completezza di R)
Se A è un sottoinsieme non vuoto di R superiormente limitato allora esiste (ed è unico) il minimo fra i maggioranti di A che è detto **estremo superiore** di $A\,(\sup A)$.
Vediamo ora come caratterizzare il $\sup A$ (quando A è superiormente limitato). Poniamo $\alpha = \sup A$; poiché α è un maggiorante avremo $a \in A \Rightarrow a \leq \alpha$; poiché α è il minimo maggiorante ogni numero β con $\beta < \alpha$ non può essere un maggiorante per A (porremo $\beta = \alpha - \epsilon$ con $\epsilon > 0$) vale a dire $\exists\, a_\epsilon \in A$ tale che $\alpha - \epsilon < a_\epsilon\, (\leq \alpha)$.
Riassumendo avremo che $\alpha = \sup A$ se e solo se
i) $a \leq \alpha\ \forall a \in A$
ii) $\forall \epsilon > 0\, \exists\, a_\epsilon \in A : \alpha - \epsilon < a\, (\leq \alpha)$.
Se accade che $\alpha = \sup A \in A$ (cosa che avviene solo in casi particolari) α risulta essere il massimo di A, scriveremo $\alpha = \max A$. Avremo in modo del tutto parallelo:
Sia A un sottoinsieme non vuoto di R, se A non è inferiormente limitato diremo che l'estremo inferiore di A è $-\infty$ e scriveremo $\inf A = -\infty$; in caso contrario esistono minoranti per A.
Teorema (completezza di R)
Se A è un sottoinsieme non vuoto di R inferiormente limitato allora esiste (ed è unico) il massimo fra i minoranti di A che è detto **estremo inferiore** di A ($\inf A$).

3 Successioni

3.1 Limite di successioni

Le funzioni reali definite su N sono chiamate successioni (reali). Per le successioni si usano di solito delle notazioni speciali: la successione $a : N \to R$ si indica con $\{a_n\}_{n \in N}$ o anche più semplicemente con $\{a_n\}$ (dove a_n sta per $a(n)$) o con $\{a_1, a_2, .., a_n, ..\}$. Si dice anche che a_n è il termine generale della successione. Introduciamo ora il concetto di **limite**: si dice che $\alpha \in R$ è limite di una successione $\{a_n\}$ e si scrive $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ se

$$(*) \qquad \forall\epsilon > 0 \ \exists\,\nu(\epsilon) \in N : n > \nu(\epsilon) \Rightarrow |a_n - \alpha| < \epsilon$$

Si dice che una successione $\{a_n\}$ è **convergente** se esiste un numero reale α tale che la $(*)$ sia soddisfatta. Chiamiamo intorno di centro $c \in R$ e raggio $\delta > 0$ l'intervallo aperto $(c-\delta, c+\delta)$ ovvero l'insieme $I(c,\delta) = \{x \in R : c-\delta < x < c+\delta\}$. Si ha subito che una successione convergente è limitata: infatti tutti gli elementi a_n esclusi al più un numero finito di essi appartengono all'intorno $I(\alpha, r)$ dove r è un qualunque fissato numero positivo e α il limite della successione. Si noti però che non tutte le successioni limitate sono convergenti. Si dice che una successione $\{a_n\}$ è **divergente** a $+\infty$ $(-\infty)$ se

$$(**) \qquad \forall k > 0 \ \exists\,\nu(k) \in N : n > \nu(k) \Rightarrow a_n > k \ (a_n < -k)$$

Chiaramente una successione $\{a_n\}$ divergente, per es. a $+\infty$, non può essere superiormente limitata: infatti tutti gli elementi a_n esclusi al più un numero finito sono maggiori di un qualunque fissato numero h positivo. Una successione di questi tre tipi (convergente, divergente a $+\infty$, divergente a $-\infty$) è detta **regolare**, ogni altra successione è detta non regolare. Il limite di una successione convergente è **unico**. Supponiamo che $\lim_{n\to\infty} a_n = \beta = \gamma$, si ha successivamente $|\beta-\gamma| = |(\beta - a_n) + (a_n - \gamma)| \le |\beta - a_n| + |a_n - \gamma|$; poiché le ultime due quantità si possono rendere piccole a piacere, segue subito che $\beta = \gamma$.

3.2 Primi risultati

Sia P una proprietà che può valere o non valere per gli elementi di una successione $\{a_n\}$ (per es. l'essere positivi, essere costanti), se esiste ν tale che per $n > \nu$ gli elementi a_n soddisfano P, si dice che P vale **definitivamente**. Da quanto abbiamo visto segue che se una successione converge ad un numero α allora definitivamente i suoi elementi stanno in ogni intorno $I(\alpha,\delta)$ con $\delta > 0$, se diverge a $+\infty$ allora definitivamente i suoi elementi sono maggiori di ogni numero k.
Definizione: sign : $R \to R$ (segno) è la funzione così definita: $\mathrm{sign}(x) = 1 \ (-1)$ se $x > 0 \ (< 0)$, $\ \mathrm{sign}(0) = 0$.
Teorema (permanenza del segno)

i) se $\lim_{n\to\infty} a_n = a \neq 0$, allora definitivamente a_n ha il segno di a ($\text{sign}(a_n) = \text{sign}(a)$)
ii) se definitivamente $a_n \geq 0$ (≤ 0) e $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, allora $a \geq 0$ (≤ 0).
Una successione $\{a_n\}$ si dice **crescente** se $p < q \Rightarrow a_p \leq a_q$, se poi $a_p < a_q$ si dirà strettamente crescente; $\{a_n\}$ si dice **decrescente** se $p < q \Rightarrow a_p \geq a_q$, se poi $a_p > a_q$ si dirà strettamente decrescente. Tali successioni si dicono tutte **monotone**.
Teorema
Ogni successione (definitivamente) monotona è regolare.
Dimostrazione
Basterà considerare il caso che la successione $\{a_n\}$ sia (definitivamente) crescente. Sono possibili due casi: $\sup\{a_n\} = \alpha \in R$, oppure $\sup\{a_n\} = +\infty$. Nel primo caso fissato $\epsilon > 0$ per definizione di sup esiste $n(\epsilon) \in N$ tale che $\alpha - \epsilon < a_{n(\epsilon)}$ ($\leq \alpha$), se poi $n > n(\epsilon)$ si avrà $a_n \geq a_{n(\epsilon)}$ perché la successione è crescente. Dunque abbiamo che per ogni $\epsilon > 0$ esiste $n(\epsilon) \in N$ tale che $n > n(\epsilon)$ implica $\alpha - \epsilon < a_n < \alpha + \epsilon$ e ciò prova che $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$. Nel secondo caso fissato $k > 0$, poiché la successione non è limitata superiormente, esiste $n(k) \in N$ tale che $a_{n(k)} > k$, se poi $n > n(k)$ si avrà $a_n \geq a_{n(k)}$ perché la successione è crescente. Dunque abbiamo che per ogni $k > 0$ esiste $n(k) \in N$ tale che $n > n(k)$ implica $a_n > k$ e ciò prova che $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

3.3 Operazioni sulle successioni

Date due successioni $\{a_n\}, \{b_n\}$ la successione somma $\{a_n + b_n\}$ e quella prodotto $\{a_n b_n\}$ sono definite nel modo ovvio, così come si può fare anche per altre operazioni. Per semplicità scriveremo $a_n \to \alpha$ al posto di $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$.
Supponiamo che $a_n \to \alpha, b_n \to \beta$, non è difficile provare i seguenti risultati: $(a_n + b_n) \to (\alpha + \beta)$; $(a_n b_n) \to (\alpha\beta)$; se $\beta \neq 0$ si ha anche $a_n/b_n \to \alpha/\beta$.
Criterio del confronto (dei carabinieri): date tre successioni $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ supponiamo che (definitivamente) $a_n \leq b_n \leq c_n$ e che $a_n \to k, c_n \to k$; allora si ha anche $b_n \to k$. Altro confronto: date due successioni $\{a_n\}, \{b_n\}$ supponiamo che (definitivamente) $a_n \geq b_n$ e che $b_n \to +\infty$; allora si ha anche $a_n \to +\infty$.
In alcuni casi si possono fare operazioni anche con successioni divergenti o non regolari. Elenchiamo qualche risultato tralasciandone altri analoghi, sono tutti di facile verifica
i) $a_n \to a \neq 0$, $b_n \to 0$, e b_n definitivamente positivi (negativi), allora

$a_n/b_n \to \text{sign}(a)\infty$ $(-\text{sign}(a)\infty)$
ii) Se $\{a_n\}$ è limitata e $b_n \to 0$, allora $a_n b_n \to 0$
iii) Se $\{a_n\}$ è limitata e $b_n \to +\infty$, allora $a_n/b_n \to 0$
iv) Se $\{a_n\}$ è limitata e $b_n \to +\infty$, allora $a_n + b_n \to +\infty$.
v) $a_n \to a \neq 0, b_n \to +\infty$, allora $a_n b_n \to \text{sign}(a)\infty$.

3.4 Forme indeterminate

Si dice che i simboli $+\infty - (+\infty)$, $0\,\infty$, $0/0$, $(\infty)/(\infty)$ denotano **forme indeterminate**: questa è una scrittura abbreviata e indica che abbiamo due successioni $\{a_n\}, \{b_n\}$ che rispettivamente hanno il comportamento indicato. La forma è indeterminata perché senza ulteriori ipotesi non è possibile determinare il comportamento della successione differenza (primo caso), prodotto (secondo caso) etc. Due successioni $\{a_n\}, \{b_n\}$ possono dar luogo anche a forme indeterminate di tipo esponenziale: 0^0, ∞^0, 1^∞. Seguono alcuni esempi (il primo dei quali è di importanza fondamentale).
i) **Il numero e**
Sia $a_n = 1 + 1/n$, $b_n = n$ allora $a_n^{b_n}$ dà luogo alla forma indeterminata 1^∞. Posto $e_n = (1 + 1/n)^n$ si dimostra che $\{e_n\}$ è una successione crescente e che $e_n < 3$; per il teorema sulle successioni monotone e_n converge, il suo limite si chiama e (da Eulero), si ha e $= 2,7182..$
ii) Sia $a_n = n$, $b_n = 1/n$ allora $a_n^{b_n}$ dà luogo alla forma indeterminata ∞^0. Dimostriamo che $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$. Se si pone $\sqrt[n]{n} = 1 + h_n$ chiaramente è $h_n > 0$. Dunque si ha usando il binomio di Newton $n = (1 + h_n)^n = 1 + nh_n + \binom{n}{2}h_n^2 + .. + h_n^n$, poiché tutti gli addendi sono positivi si avrà: $n > \binom{n}{2}h_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}h_n^2$; da questa si ottiene $1 < 1 + h_n = \sqrt[n]{n} < 1 + \sqrt{\frac{2}{n-1}}$ e quindi dal teorema di confronto segue la tesi perché $\sqrt{\frac{2}{n-1}} \to 0$.
iii) Il seguente risultato teorico permette di calcolare diverse forme indeterminate: sia $\{a_n\}$ una successione a termini positivi tale che $a_n/a_{n+1} \to \alpha$; allora se $\alpha > 1$ $a_n \to 0$, se $\alpha < 1$ $a_n \to +\infty$.
Dimostrazione: se vale il primo caso a_n è definitivamente decrescente e quindi (teorema sulle successioni monotone) converge, sia c il suo limite, poiché la successione è positiva sarà $c \geq 0$. Non può essere $c > 0$: se così fosse applicando la formula $\lim(a_n/a_{n+1}) = (\lim a_n)/(\lim a_{n+1})$ si otterrebbe $\alpha = 1/1 = 1$ contro l'ipotesi $\alpha >1$. Se vale il secondo caso a_n è definitivamente crescente e quindi (teorema sulle successioni monotone) o converge a un numero positivo c o diverge a $+\infty$. Non può essere $a_n \to c$ perché se così fosse applicando la formula $\lim(a_n/a_{n+1}) = (\lim a_n)/(\lim a_{n+1})$ si otterrebbe $\alpha = 1/1 = 1$ contro l'ipotesi $\alpha <1$.
Esempio 1 (l'esponenziale "uccide" qualsiasi potenza): sia $b > 1$ e s un numero positivo qualsiasi, mostriamo che $n^s/b^n \to 0$. Infatti se $a_n = n^s/b^n$ si

ha $a_n/a_{n+1} = b(\frac{n}{n+1})^s \to b > 1$.
Esempio 2: sia $a_n = \frac{x^n}{n!}$ con $x > 0$, proviamo che $a_n \to 0$. Si ha $a_n/a_{n+1} = (n+1)/x \to +\infty$; da qui segue la tesi (il teorema usato è applicabile anche quando $\alpha = +\infty$).

3.5 Criterio di Cauchy

Enunciamo ora un criterio di convergenza per una successione $\{a_n\}$ che non richiede la conoscenza a priori del limite. Premettiamo la seguente definizione: si dice che una successione $\{a_n\}$ è di Cauchy se soddisfa la seguente proprietà

$$\forall\, \epsilon > 0\, \exists\, \nu(\epsilon) \in N : p, q > \nu(\epsilon) \;\Rightarrow\; |a_p - a_q| < \epsilon$$

Teorema: Una successione $\{a_n\}$ è convergente se e solo se è di Cauchy.
Il fatto che in R le successioni di Cauchy siano convergenti è una proprietà equivalente alla completezza; questa proprietà non vale in Q.
Diamo ora il concetto di **sottosuccessione** di una successione data. Sia $\{a_n\}$ una successione in R e $\{n_1, n_2, .., n_k, ..\}$ una successione strettamente crescente di interi positivi: la successione $\{a_{n_1}, a_{n_2}, .., a_{n_k}, ..\}$ è una sottosuccessione della successione $\{a_n\}$. Si noti che per la sottosuccessione l'indice di successione che abbiamo usato è k mentre per la successione di partenza è n; si noti poi che i valori della sottosuccessione sono alcuni (in generale non tutti) dei valori assunti dalla successione di partenza (da qui il nome). Si potrebbe dimostrare il seguente
Teorema: da ogni successione limitata si può estrarre una sottosuccessione convergente.

4 Limiti e continuità di funzioni reali di variabile reale

4.1 Limiti

Consideriamo funzioni $f : I \to R$ dove I è un intervallo (anche illimitato) di R. Sia $a \in I$, diamo subito qualche definizione di limite:

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = c$ sta per $\forall \epsilon > 0\, \exists\, \delta(\epsilon) > 0 : 0 < |x - a| < \delta(\epsilon) \;\Rightarrow\; |f(x) - c| < \epsilon$

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ sta per $\forall k > 0\, \exists\, \delta(k) > 0 : 0 < |x - a| < \delta(k) \;\Rightarrow\; f(x) > k$

Si considera anche il limite di una funzione in un punto fuori dal suo dominio, bisognerà però che ci siano punti del dominio vicini quanto si vuole a questo

punto. Ci occorre la seguente
Definizione: Sia $A \subset R, x \in R$, si dice che x è un **punto di accumulazione** per A se ogni intorno di x contiene infiniti punti di A.
Si osservi che le due definizioni di sopra si applicano anche per un punto a fuori dall'intervallo I ma di accumulazione per I. Le seguenti sono le definizioni di limite parallele a quelle già date per le successioni (si suppone qui che I contenga una semiretta destra)

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = c \text{ sta per } \forall\epsilon > 0 \; \exists\, x(\epsilon) > 0 : x > x(\epsilon) \;\Rightarrow\; |f(x) - c| < \epsilon$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \text{ sta per } \forall h > 0 \; \exists\, x(h) > 0 : x > x(h) \;\Rightarrow\; f(x) > h$$

Si descrivono facilmente altri casi simili di limiti e anche si definiscono limiti destri e sinistri. Le operazioni sui limiti procedono come per le successioni, così come la discussione delle forme indeterminate.

4.2 Limiti notevoli

Ecco alcuni limiti notevoli: dal (prevedibile) risultato $\lim_{x\to+\infty}(1 + 1/x)^x = \mathrm{e}$ prendendo il logaritmo e cambiando $1/x$ con t si deduce che

$$\lim_{t\to 0} \frac{\log(1+t)}{t} = 1$$

Dei seguenti due limiti notevoli

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \qquad \lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^n - 1}{x} = n$$

il primo si può verificare con semplici considerazioni geometriche; il secondo usando il binomio di Newton.

4.3 Funzioni monotone

Una funzione $f : I \to R$ (dove I è un intervallo) si dice **crescente** (**decrescente**) se $x < y \;\Rightarrow\; f(x) \le f(y)$ $(f(x) \ge f(y))$ se poi $f(x) < f(y)$ $(f(x) > f(y))$ si dirà strettamente crescente (strettamente decrescente). Tutti questi tipi di funzioni si dicono monotone. Le funzioni monotone hanno proprietà di regolarità analoghe a quelle delle successioni monotone. Per esempio vale il

seguente
Teorema: sia $f : (a,b) \to R$ crescente e sia $c \in (a,b)$, allora esiste

$$\lim_{x \to c^-} f(x) = \sup\{f(x) : x \in (a,c)\}.$$

4.4 Continuità

Sia $f : I \to R$ e $a \in I$, diremo che la funzione f è **continua** nel punto a se $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ cioè se

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists \, \delta(\epsilon) > 0 : |x - a| < \delta(\epsilon) \;\Rightarrow\; |f(x) - f(a)| < \epsilon.$$

Si dirà poi che f è continua in un insieme I se è continua in tutti i punti di I. Da quanto sappiamo segue facilmente che somma prodotto e quoziente (quando possibile) di funzioni continue sono continui. Per verificare la continuità di una funzione in un punto si possono usare le successioni.
Teorema: una funzione f è continua in un punto del dominio a se e solo se per ogni successione $\{a_n\}$ convergente ad a si ha che $\{f(a_n)\}$ converge a $f(a)$.
Teorema: la composizione di funzioni continue è continua.
Questo risultato fondamentale si può provare usando il teorema precedente.
Teorema: una funzione invertibile continua ha inversa continua.
Per es. sono continue le seguenti funzioni: $\mathbf{arctan}\, x$ (inversa della restrizione di $\tan x$ all'intervallo $(-\pi/2, \pi/2)$) , $\mathbf{arcsin}\, x$ (inversa della restrizione di $\sin x$ all'intervallo $(-\pi/2, \pi/2)$). Non è difficile verificare che le usuali funzioni elementari sono continue; per esempio sono funzioni continue i polinomi, $|x|, \sin x, \cos x, \mathrm{e}^x, \log x, \sqrt{x}$, da queste operando con le operazioni e la composizione si ottiene un gran numero di funzioni continue.

4.5 Proprietà delle funzioni continue su un intervallo chiuso

Sia $f : A \to R$ una funzione reale:
Definizione Un punto $a \in A$ è un punto di **massimo** (assoluto) per la f se $x \in A \Rightarrow f(x) \leq f(a)$; è un punto di **minimo** (assoluto) per la f se $x \in A \Rightarrow f(x) \geq f(a)$.
In generale una funzione qualsiasi non risulterà limitata e quindi a maggior

ragione non ammetterà estremi assoluti. Anche per una funzione continua senza ipotesi sul dominio non si può affermare nulla sull'esistenza di estremi assoluti. Valgono i seguenti (importanti) teoremi
Teorema (Weierstrass): sia $f : [a, b] \to R$ una funzione continua, allora f (è limitata) e ammette estremi assoluti (almeno un punto di massimo e almeno un punto di minimo).
Teorema (degli zeri): sia $f : [a, b] \to R$ una funzione continua e sia $f(a)f(b) < 0$, allora esiste almeno un punto $c \in (a, b)$ tale che $f(c) = 0$.
Quest'ultimo teorema ammette una formulazione equivalente
Teorema (dei valori intermedi): siano h, m con $h < m$ due valori assunti dalla funzione continua in $[a, b]$ cioè per es. $f(\alpha) = h$ e $f(\beta) = m$ con $\alpha, \beta \in [a, b], \alpha < \beta$, allora se $h < q < m$ esiste almeno un punto $c \in (\alpha, \beta)$ tale che $f(c) = q$.

5 Derivate

5.1 Definizione e prime conseguenze

Sia $A \subset R$, si dice che un punto a è **interno** ad A se esiste un intorno di a (un intervallo aperto centrato in a) tutto contenuto in A. Se a è interno ad A, necessariamente $a \in A$.
Sia $f : I \to R$ continua in un punto x_0 interno ad I, allora se h è un numero reale in valore assoluto sufficientemente piccolo anche $(x_0 + h) \in I$. Diremo che $h = (x_0 + h) - x_0$ è l'incremento della variabile indipendente x quando passa da x_0 a $(x_0 + h)$; mentre diremo che $f(x_0 + h) - f(x_0) = \phi(h)$ è l'incremento della funzione. Se h tende a zero entrambi gli incrementi tendono a zero (si dice che sono infinitesimi simultanei); l'incremento della funzione è infinitesimo perché la funzione è supposta continua in x_0. Dunque il quoziente $\phi(h)/h$ si presenta come una forma indeterminata $0/0$ (quando h tende a 0).
Definizione (derivabilità): sia $f : I \to R$ e sia x_0 un punto interno ad I, si dice che f è **derivabile** in x_0 se esiste

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Tale limite si chiama la **derivata** di f nel punto x_0 e si indica con $f'(x_0)$. Osserviamo subito che la continuità di f in x_0 è una condizione necessaria

per la sua derivabilità in x_0, infatti si ha $f(x_0+h)-f(x_0) = h\,\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ e quando h tende a 0 il secondo membro tende a 0 (limite di un prodotto uguale prodotto dei limiti). La continuità in generale non è sufficiente per la derivabilità: per es. la funzione $f(x) = |x|$ è continua nell'origine ma non è ivi derivabile.
Significato geometrico della derivata. La retta tangente al grafico della funzione f nel punto $(x_0, f(x_0))$ ha la seguente equazione: $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$; pertanto la derivata è il coefficiente angolare di detta tangente.
La derivata per una approssimazione al primo ordine. A volte è noto (numericamente) il valore che prende una funzione f in un punto a e si vuole stimare il suo valore in un punto incrementato $(a + h)$, la sua derivata $f'(a)$ (se si conosce) può essere usata per una stima approssimata di $f(a+h)$ secondo la formula $f(a+h) \sim f(a)+hf'(a)$. Per descrivere il significato esatto di questa approssimazione occorre premettere alcune definizioni. Funzioni che tendono a zero quando la variabile indipendente tende a un fissato valore a si dicono **infinitesimi** (per $x \to a$); ha interesse "confrontare" infinitesimi, per es. nel fare una derivata si confrontano (per $h \to 0$) i due infinitesimi $(f(a+h)-f(a))$ e h. Date due funzioni f, g la notazione $f(h) = \circ(g(h))$ (per $h \to 0$) significa che $f(h)/g(h) \to 0$. Particolarmente interessante è il caso $g(h) = h^n$ con $n = 0, 1, 2, ..$; se $f(h) = \circ(h^n)$ si dice che f è un infinitesimo di ordine superiore a n, $f(h) = \circ(1)$ significa semplicemente che f è infinitesimo. Possiamo formulare il seguente
Teorema. Sono affermazioni equivalenti
i) f è derivabile in un punto a (interno al suo dominio)
ii) esiste una costante A tale che $f(a + h) - f(a) = Ah + \circ(h)$
Dimostrazione. i) $\Rightarrow$ ii) : poiché f è derivabile in a si ha

$$[f(a + h) - f(a)]/h = f'(a) + \circ(1)$$

da cui moltiplicando per h si ottiene

$$f(a + h) - f(a) = f'(a)h + \circ(h)$$

cioè $A = f'(a)$
ii) $\Rightarrow$ i) : dividendo per h si ottiene $[f(a+h)-f(a)]/h = A+\circ(1)$ e quindi il limite a primo membro esiste ed è uguale ad A, cioè la funzione è derivabile in a e la sua derivata è uguale a A.

Possiamo dunque scrivere la formula esatta

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \circ(h)$$

che precisa in che senso $[f(a) + hf'(a)]$ è una approssimazione di $f(a+h)$.

5.2 Derivate di funzioni fondamentali, regole di derivazione

Sia $f : I \to R$, se per ogni $x \in I$ esiste la derivata $f'(x)$ diremo che $f' : I \to R$ è la **funzione derivata** di f, si scrive anche $Df(x)$ per $f'(x)$.
Siano f, g derivabili in un punto a interno al loro comune dominio, allora anche le funzioni $(f+g), fg$ sono derivabili in a e si ha: $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a); (fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$; se poi $g(a) \neq 0$ anche f/g è derivabile in a e si ha $(f/g)'(a) = \frac{f'(a)g(a)-f(a)g'(a)}{g(a)^2}$.
Proviamo per induzione la formula $Dx^n = nx^{n-1}$ dove $n \in N$. E' facile vedere che per $n = 1$ la formula è vera. Supposto la formula vera per n facciamo vedere che vale per $(n+1)$. Si ha $Dx^{n+1} = D(xx^n) =$ (usando la regola del prodotto) $= (Dx)x^n + x(Dx^n) = 1x^n + x(nx^{n-1}) = (n+1)x^n$ che è quello che si doveva dimostrare.
La regola più importante da trovare è quella per la derivata di una funzione composta. Sia f derivabile in a e g derivabile in $f(a)$, vogliamo determinare la derivata in a della funzione composta $g \circ f$. Si ha $(g \circ f)(a+h) - (g \circ f)(a) = g[f(a+h)] - g[f(a)]$, poiché f è derivabile in a si ha $f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \circ(h)$, sostituendo abbiamo: $(g \circ f)(a+h) - (g \circ f)(a) = g[f(a) + hf'(a) + \circ(h)] - g[f(a)] =$ (poiché g è derivabile in $f(a)$) $= (hf'(a) + \circ(h))g'[f(a)] + \circ(hf'(a) + \circ(h))$. Dividendo per h si ottiene: $\frac{(g \circ f)(a+h)-(g \circ f)(a)}{h} = g'[f(a)]f'(a) + \circ(1)$.
Dunque per la **derivata di funzione composta** si ha la regola (della catena)

$$(g \circ f)'(a) = g'[f(a)]f'(a)$$

Applichiamo questa formula all'identità $f[f^{-1}(x)] = x$ che definisce la funzione inversa: derivando ambo i membri si ottiene $f'[f^{-1}(x)](f^{-1})'(x) = 1$. Si deduce così la regola di **derivata di funzione inversa**

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'[f^{-1}(x)]}$$

Alcuni esempi:

1) Si ha $\mathrm{e}^{x+h} - \mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x(\mathrm{e}^h - 1)$, dividendo per h dato che $\lim_{h \to 0} \dfrac{\mathrm{e}^h - 1}{h} = 1$, si

ottiene $De^x = e^x$.
2) Sia $a > 0$, poiché $a^x = e^{x \log a}$ si ha $Da^x = e^{x \log a} \log a = a^x \log a$.
3) Sia $x > 0$, si ha $x^\alpha = e^{\alpha \log x}$ per cui $Dx^\alpha = e^{\alpha \log x}\alpha/x = \alpha x^{\alpha-1}$ (abbiamo usato $D \log x = 1/x$).
4) Per la formula di derivata di funzione inversa si ha

$$D \arctan x = 1/(D \tan)(\arctan x)$$

poiché $D \tan y = 1/(\cos y)^2 = 1 + (\tan y)^2$, si ottiene

$$D \arctan x = 1/(1 + x^2)$$

5) Per la formula di derivata di funzione inversa si ha

$$D \arcsin x = 1/(D \sin)(\arcsin x)$$

poiché $D \sin y = \cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y}$ si ottiene

$$D \arcsin x = 1/\sqrt{1 - x^2}$$

5.3 Proprietà delle derivate

Sia f derivabile in un punto a (interno al dominio), ricordando che $f'(a) = \lim_{h\to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$, se $f'(a) > 0$ il rapporto incrementale $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ per $|h|$ sufficientemente piccolo si mantiene positivo, da questo si vede che $h < 0 \Rightarrow f(a + h) < f(a)$, $h > 0 \Rightarrow f(a + h) > f(a)$. Quando ciò accade si dice che f è **localmente crescente** in a; analoga sarà la definizione di **localmente decrescente** in a. Abbiamo dunque il seguente risultato: $f'(a) > 0(< 0) \Rightarrow f$ localmente crescente (decrescente) in a. Se invece si ha che $f'(a) = 0$ diremo che a è un **punto stazionario** per la f, in questo caso l'incremento$[f(a+h)-f(a)]$ è un infinitesimo di ordine superiore ad h (da ciò il nome). Riguardo al rapporto incrementale $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ possiamo vedere se esistono i limiti destro e sinistro, se esistono sono detti rispett. **derivata destra** e **derivata sinistra** della f in a. Una funzione è derivabile se e solo se la derivata destra e sinistra esistono e sono uguali. Per es. la funzione continua $|x|$ nell'origine ha derivata destra uguale a 1 e derivata sinistra uguale a -1 (e quindi non è ivi derivabile), il suo grafico presenta in (0, 0) un punto angoloso ovvero uno spigolo. Ricordiamo che se una funzione f è derivabile in tutti i punti di un intervallo I, la funzione $x \to f'(x)$ definita in I si chiama derivata (prima) della f; per $n \in N$ la derivata n-ma della f, denotata $f^{(n)}$ è per definizione la derivata prima della derivata $(n-1)$-ma della f. La notazione $C^k(I)$ $(k \in N)$ indica l'insieme di tutte le funzioni definite su I che hanno la derivata k-ma continua; invece di $C^0(I)$ per le funzioni continue in I si scrive semplicemente $C(I)$. Si osservi che tutti questi insiemi $C^k(I)$ sono spazi vettoriali.

5.4 I classici teoremi sulle derivate

Le funzioni derivabili su un intervallo godono di importanti proprietà che ora illustreremo.
Teorema di Rolle. Sia $f : [a, b] \to R$, se
i) f è continua in $[a, b]$,
ii)f è derivabile in (a, b),
iii) $f(a) = f(b)$;
allora esiste $c \in (a, b)$ tale che $f'(c) = 0$.
Dimostrazione. La prima ipotesi implica (per il teorema di Weierstrass) che f ammette minimo e massimo (assoluti), esistono cioè $u, v \in [a, b]$ con $m = f(u) \leq f(x) \leq f(v) = M$ per ogni $x \in [a, b]$. Se $m = M$ la funzione è costante in $[a, b]$ e la tesi è soddisfatta in ogni punto di (a, b). Sia dunque $m < M$, per la terza ipotesi non può essere $\{u, v\} = \{a, b\}$, supponiamo per esempio che $u \in (a, b)$. Mostriamo che u è un punto stazionario per la f. Per l'ipotesi iii) la f è derivabile, poiché u è interno per $|h|$ suff. piccolo $(u + h) \in (a, b)$ e poiché u è un punto di minimo si ha $[f(u+h)-f(u)] \geq 0$: questo comporta che la derivata destra (sinistra) in u è ≥ 0 (≤ 0), pertanto la derivata deve essere uguale a 0. (**c.d.d.**)
Se si indebolisce una qualsiasi delle tre ipotesi del teorema di Rolle (mantenendo le altre due) la sua tesi cessa di valere come mostreremo con tre controesempi.
L'ipotesi iii) si può indebolire solo prendendo $f(a) \neq f(b)$, come controesempio si prenda $f(x) = x, [a, b] = [0, 1]$: i) e ii) sono soddisfatte ma la tesi è falsa essendo sempre $f'(x) = 1$.
L'ipotesi ii) si può indebolire escludendo la derivabilità anche in un solo punto, come controesempio si prenda $f(x) = |x|, [a, b] = [-1, 1]$: i) e iii) sono soddisfatte ma la tesi è falsa essendo $f'(x)$ sempre diversa da 0 dove esiste.
L'ipotesi i) si può indebolire solo togliendo la continuità della funzione in un estremo dell'intervallo (questo perché la derivabilità implica la continuità), come controesempio si prenda $f(x) = x$ per $x \in [0, 1)$ e $f(1) = 0$: ii) e iii)

sono soddisfatte ma la tesi è falsa essendo $f'(x) = 1$ per $x \in (0, 1)$.
Definizione: sia $f : A \to R$ una funzione (qualsiasi) e sia il punto a **interno** ad A: si dice che a è un punto di **minimo relativo** per la f se esiste un intorno $J(a) \subset A$ tale che $f(x) \geq f(a)$ per ogni $x \in J(a)$; si dice che a è un punto di **massimo relativo** per la f se esiste un intorno $J(a) \subset A$ tale che $f(x) \leq f(a)$ per ogni $x \in J(a)$; tali punti si chiamano in generale **estremi relativi** per la f. E' importante ricordare sempre che la definizione richiede che il punto in questione sia interno al dominio della f.
Teorema di Fermat. Sia a un estremo relativo per una funzione f, se f è derivabile in a allora a è **stazionario**, cioè $f'(a) = 0$.
Dimostrazione. L'argomento è identico a quello usato nella dimostrazione del teorema di Rolle. (**c.d.d.**)
Il teorema di Rolle è strumentale per dimostrare il
Teorema di Lagrange. Sia $f : A \to R$, se
i) f è continua in $[a, b]$,
ii) f è derivabile in (a, b) ;
allora esiste $c \in (a, b)$ tale che $f(b) - f(a) = (b - a)f'(c)$.
Dimostrazione. Consideriamo la funzione ausiliaria $G(x) = f(x) - kx$ e cerchiamo di determinare il parametro k in modo che la G soddisfi le ipotesi del teorema di Rolle. Basterà imporre la condizione $G(b) = G(a)$. Si ottiene il valore $k = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, per il teorema di Rolle esiste $c \in (a, b)$ tale che $0 = G'(c) = f'(c) - k$; uguagliando i valori di k si ottiene la tesi. (**c.d.d.**)
Mostriamo ora varie applicazioni del teorema di Lagrange.
1) **Stima numerica**: sia f derivabile in un intorno di x, allora (per $|h|$ suff. piccolo) $f(x + h) - f(x) = hf'(x) + \circ(h)$ (per la derivabilità in x) e anche $f(x + h) - f(x) = hf'(x + \theta h)$ con $0 < \theta < 1$ (per il teorema di Lagrange). La prima formula dà solo una informazione locale e teorica, non può essere usata per una stima numerica. Non così la seconda formula, infatti se abbiamo una maggiorazione globale per la derivata prima nell'intorno di x come $|f'(x)| \leq M$ potremo scrivere che $|f(x + h) - f(x)| \leq M|h|$.
2) **Funzioni con derivata nulla**: sia f una funzione con derivata nulla in un intervallo I, allora se a è interno ad I e x è un punto qualsiasi di I si ha per il teorema di Lagrange $f(x) - f(a) = (x - a)f'(a + \theta(x - a))(0 < \theta < 1)$. Essendo la derivata nulla in ogni punto interno ad I, otteniamo che per ogni x si ha $f(x) = f(a)$: funzioni con derivata nulla in un intervallo sono ivi costanti. Osserviamo che in generale non è vero che funzioni con derivata

nulla sono costanti. Controesempio: ogni funzione definita sull'unione di due intervalli aperti disgiunti, costante in ciascun intervallo ma con costanti diverse.
3) **Calcolo di limiti**: calcoliamo un limite "difficile" usando il teorema di Lagrange. Si cerchi il $\lim_{x\to+\infty}[\sin(\sqrt{x+a})-\sin(\sqrt{x})]$($a$ costante positiva) (Si noti che questa non è nemmeno una forma indeterminata: ogni addendo è privo di limite). Applichiamo il teorema di Lagrange alla funzione $f(x) = \sin(\sqrt{x})$ relativamente ai punti x e $(x+a) : f(x+a)-f(x) = af'(c_x)$ dove $x < c_x < x+a$. Si ha $f'(x) = \frac{\cos(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}$; a questo punto è facile vedere che il limite richiesto vale 0.
4) **Monotonia globale**: Se $f'(x) > 0$ (< 0) in un intervallo, allora la f è ivi strettamente crescente (strettamente decrescente). Sia infatti $x < y$, per il teorema di Lagrange si ha $f(y) - f(x) = (y - x)f'(c)$ con $x < c < y$, per le ipotesi fatte risulterà $f(y) - f(x) > 0$ ($f(y) - f(x) < 0$).
Teorema di Cauchy. Siano f, g continue in $[a, b]$, derivabili in (a, b) e sia $g(b) \neq g(a)$, inoltre le loro derivate non si annullino contemporaneamente; allora esiste $c \in (a, b)$ tale che $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$
Dimostrazione. Come per il teorema di Lagrange, si considera una funzione ausiliaria: $f(x) - kg(x)$. (**c.d.d.**)

5.5 Estremi relativi: condizioni sufficienti

Teorema. Sia f derivabile in un intorno di un punto a e sia $f'(a) = 0$: se f' cambia segno attraversando la radice a, questa è un estremo relativo per la f; se f' non cambia segno (è positiva oppure negativa intorno ad a) allora non c'è estremo in a.
Dimostrazione. Se f' è positiva a sinistra e negativa a destra di a allora f cresce a sinistra e decresce a destra di a che è quindi un massimo relativo. (Nel caso simmetrico si avrà un minimo relativo). Se f' non cambia segno la f sarà crescente oppure decrescente in un intorno di a che quindi non è un estremo relativo. (**c.d.d.**)
Teorema. Supponiamo che in un punto a si abbia $f'(a) = 0$, $f''(a) \neq 0$, allora a è un estremo relativo per la f.
Dimostrazione. Usiamo l'ipotesi superflua che la f'' sia continua in a. Se per es. $f''(a) > 0$ per la permanenza del segno sarà $f''(x) > 0$ in un intorno di a e quindi $f'(x)$ strettamente crescente in questo intorno; d'altra parte è

$f'(a) = 0$ per cui f' sarà negativa a sinistra e positiva a destra di a e quindi per il teorema precedente a è un punto di minimo relativo per la f. (**c.d.d.**)
Nulla si può concludere se si ha $f'(a) = 0, f''(a) = 0$, basta considerare il comportamento nell'origine delle due funzioni x^3 e x^4.

5.6 I teoremi di l'Hôpital

Teorema (l'Hôpital). Siano f, g derivabili in (a, b) ed entrambe infinitesime per $x \to a$, sia inoltre $g'(x) > 0$ (oppure $g'(x) < 0$); supponiamo infine (è la cosa più importante) che esista il $\lim\limits_{x \to a} f'(x)/g'(x)$. Allora il rapporto $f(x)/g(x)$ ammette limite e si ha

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Dimostrazione. Possiamo supporre $f(a) = g(a) = 0$. Usando il teorema di Cauchy si ha successivamente$f(x)/g(x) = [f(x) - f(a)]/[g(x) - g(a)] = f'(c_x)/g'(c_x)$ con $a < c_x < x$ da queste segue subito la tesi osservando che $x \to a \Rightarrow c_x \to a$. (**c.d.d.**)
Ci sono diversi altri teoremi di l'Hôpital e tutti riguardano forme indeterminate del tipo $0/0$ o ∞/∞. In pratica l'esistenza del limite del rapporto delle derivate implica l'esistenza del limite del rapporto delle funzioni. Questi teoremi danno una regola semplice per risolvere alcune forme indeterminate, vanno però usati con cautela per evitare errori. Diamo qualche esempio.
1) $\lim\limits_{x \to 0} (x \log x)$: si ha una forma indeterminata $0\,\infty$ per renderla nella forma di un quoziente scriviamo $x \log x = \frac{\log x}{1/x}$ (avendo cura di passare a denominatore la funzione più semplice). Il quoziente delle derivate vale $\frac{-1/x}{1/x^2} = -x$ e tende a 0 per $x \to 0$, pertanto anche il quoziente delle funzioni tende a zero; in definitiva $x \log x \to 0$.
2) $\lim\limits_{x \to 0} (1/x - 1/\sin x)$: si ha una forma indeterminata $\infty - \infty$ per renderla nella forma di un quoziente scriviamo $(1/x - 1/\sin x) = \frac{sinx - x}{xsinx} = f(x)/g(x)$ (una forma $0/0$). Si ha $f'(x)/g'(x) = \frac{\cos x - 1}{sinx + xcosx}$ (ancora una forma $0/0$), si ha ancora $f''(x)/g''(x) = \frac{-\sin x}{2\cos x - x \sin x}$, quest'ultima frazione non dà luogo a una forma indeterminata ma tende a 0; in definitiva $(1/x - 1/\sin x) \to 0$.
3) $\lim\limits_{x \to +\infty} (\sin x + x)/x$: un ovvio calcolo mostra che questo limite vale 1, comunque la frazione presenta la forma indeterminata ∞/∞. Se uno tentasse di usare la regola di l'Hôpital calcolerebbe $f'(x)/g'(x) = (1 + \cos x)/1$ e

questa frazione non ammette limite (ma lo ammette la frazione $f(x)/g(x)$). Se non esiste il limite del rapporto delle derivate non si può usare il teorema di l'Hôpital perché non è verificata l'ipotesi fondamentale; il quoziente delle funzioni può avere limite o può non averlo.
4) $\lim_{x\to+\infty} \log x/x^a$: per $a > 0$ abbiamo una forma indeterminata ∞/∞; il rapporto delle derivate vale $(1/x)/ax^{a-1} = 1/ax^a$ che tende a 0 per $x \to +\infty$. Dunque $\log x/x^a \to 0$ per ogni $a > 0$. (Il logaritmo va all'infinito più "piano" di qualunque radice).
5) Se $f(x)$ è derivabile in a sappiamo che $f(a+h) - f(a) - hf'(a) = \circ(h)$, è quindi naturale chiedersi se esiste il $\lim_{h\to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a) - hf'(a)}{h^2}$ che è una forma indeterminata 0/0. Se supponiamo la f derivabile in un intorno di a, per la regola di l'Hôpital siamo indotti a considerare il $\lim_{h\to 0} \dfrac{f'(a+h) - f'(a)}{2h}$, se supponiamo che la f abbia derivata seconda in a questo rapporto ha limite $f''(a)/2$ e dunque per la regola di l'Hôpital $\lim_{h\to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a) - hf'(a)}{h^2} = f''(a)/2$. Pertanto si ha la formula (del secondo ordine)

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2} f''(a) + \circ(h^2).$$

6 Il polinomio di Taylor e sue applicazioni

6.1 Definizione

Sia f una funzione derivabile n volte in un punto a, il polinomio nella variabile h (di grado minore o uguale a n)

$$P_n^f(h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2!} f''(a) + \frac{h^3}{3!} f^{(3)}(a) + .. + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(a)$$

si chiama polinomio di Taylor di ordine n della f relativo al punto a. Nel caso che si prenda $a = 0$ e $h = x$ il polinomio viene a volte chiamato di Mac Laurin e si scriverà

$$P_n^f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \frac{x^3}{3!} f^{(3)}(0) + .. + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0)$$

Conviene conoscere i polinomi di Mac Laurin delle funzioni elementari, ecco un elenco:

$$\mathrm{e}^x : \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\,; \quad \sin x : \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\,; \quad \cos x : \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

$$(1+x)^\alpha : \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k} x^k\,; \quad \log(1+x) : \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k}\,; \quad \arctan x : \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$$

6.2 Formula di Taylor

Teorema (Formula di Taylor). Sia f una funzione derivabile $(n-1)$ volte in un intorno di un punto a e avente derivata n-ma in a, allora vale la formula

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2!} f''(a) + .. + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(a) + \circ(h^n).$$

Dimostrazione. Si procede come nell'esempio 5) di **6.6**. (**c.d.d.**)
Il polinomio di Taylor di una funzione è unico nel seguente senso:
Teorema. Supponiamo che per una funzione f derivabile p volte in un intorno dell'origine si sappia che $f(x) = A(x) + \circ(x^p)$ con A polinomio di grado minore o uguale a p, allora A è il polinomio di Taylor di ordine p della f intorno all'origine, cioè $A(x) = \sum_{k=0}^{p} \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0)$.
Dimostrazione. Se P_p^f è il polinomio di Taylor di ordine p della f si ha $f(x) = P_p^f(x) + \circ(x^p)$ ma anche per l'ipotesi fatta $f(x) = A(x) + \circ(x^p)$ da cui si ottiene $P_p^f(x) - A(x) = \circ(x^p)$, ma un polinomio di grado minore o uguale a p che sia $\circ(x^p)$ è il polinomio identicamente nullo, quindi $A = P_p^f$. (**c.d.d.**)
Basandosi su questo risultato si può calcolare il polinomio di Taylor di una funzione "complicata" senza passare per la definizione.
Esempio. Si cerchi (intorno all'origine) P_7^f dove $f = \frac{x\sin(x^2)}{\sqrt[3]{1+x^4}}$; per le formule sopra si ha $\sin t = t - t^3/6 + \circ(t^3)$ e quindi $\sin(x^2) = x^2 - x^6/6 + \circ(x^6)$; $(1+t)^{-1/3} = 1 - t/3 + \circ(t)$ e quindi $(1+x^4)^{-1/3} = 1 - x^4/3 + \circ(x^4)$. Si ha allora $f(x) = (x^2 - x^6/6 + \circ(x^6))(x - x^5/3 + \circ(x^5)) = x^3 - x^7/3 - x^7/6 + \circ(x^7) = x^3 - x^7/2 + \circ(x^7)$. Pertanto il teorema di sopra ci dice che $P_7^f(x) = x^3 - x^7/2$.

6.3 L'errore nella formula di Taylor

La differenza $[f(a+h) - P_n^f(h)]$ rappresenta l'errore $E_n^f(h)$ che si commette sostituendo al valore $f(a+h)$ il polinomio di Taylor della funzione. La formula di Taylor ci dice che (nelle ipotesi messe) $E_n^f(h)$ è un infinitesimo di ordine superiore a n (è $\circ(h^n)$). A questo errore si può dare una forma tipo Lagrange utile per maggiorazioni.
Teorema. Se la f ha derivate fino all'ordine $(n+1)$ in un intorno di a allora

$$f(a+h) - P_n^f(h) = \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a+\theta h) \text{ dove } 0 < \theta < 1.$$

6.4 Convessità

Definizione. Sia f una funzione definita in un intervallo $[a,b]$ e derivabile in (a,b), diremo che f è **convessa** in (a,b) se per ogni $x \in (a,b)$ la retta tangente al grafico di f nel punto $(x, f(x))$ resta sempre al di sotto del grafico; diremo che f è **concava** in (a,b) se per ogni $x \in (a,b)$ la retta tangente al grafico di f nel punto $(x, f(x))$ resta sempre al di sopra del grafico.
Teorema. Sia f derivabile due volte in (a,b), se per ogni $x \in (a,b)$
$f''(x) \geq 0$ ($f''(x) \leq 0$) allora la funzione è convessa (concava) in (a,b).
Dimostrazione. La differenza fra le ordinate della funzione e della retta tangente al grafico di f nel punto $(x, f(x))$ è data al variare di h dall'espressione $f(x+h) - f(x) - hf'(x)$ che vale $\frac{h^2}{2!} f''(x+\theta h)$. La tesi segue subito dall'ipotesi che la derivata seconda ha sempre segno costante. (**c.d.d.**)
Definizione. Si dice che un punto a è di **flesso** per la f se la retta tangente al grafico di f nel punto $(a, f(a))$ attraversa in questo punto il grafico di f. Dalla discussione fatta segue che i punti di flesso per una funzione f sono da ricercarsi tra le radici dell'equazione $f''(x) = 0$. Una condizione sufficiente a che un tale punto sia di flesso è che $f'''(a) \neq 0$. Se per un punto di flesso a si ha $f'(a) = 0$ si dice che a è un **flesso orizzontale**, in caso contrario si dirà che è un **flesso obliquo**. Osserviamo che si considera anche il concetto di convessità (o concavità) locale: le definizioni sono parallele a quelle di crescenza o decrescenza locale.

6.5 Estremi relativi e assoluti

La formula di Taylor ci permette di perfezionare i risultati sull'esistenza di estremi relativi.
Teorema. Se una funzione f (regolare quanto occorre) ha derivata nulla in un punto (interno) a e la sua derivata p-ma è la prima derivata non nulla in a ($f(a) = f'(a) = .. = f^{(p-1)}(a) = 0, f^{(p)}(a) \neq 0$) allora se p è pari a è un estremo relativo (minimo se $f^{(p)}(a) > 0$, massimo se $f^{(p)}(a) < 0$); se p è dispari a non è un estremo relativo (la funzione cresce in a se $f^{(p)}(a) > 0$, decresce se $f^{(p)}(a) < 0$).
Dimostrazione. Con le nostre ipotesi la formula di Taylor di ordine p si scrive

$$f(a+h) - f(a) = \frac{f^{(p)}(a)}{p!} + \circ(h^p) = h^p[\frac{f^{(p)}(a)}{p!} + \circ(1)],$$

se $|h|$ è sufficientemente piccolo l'espressione $[\frac{f^{(p)}(a)}{p!} + \circ(1)]$ ha il segno di $f^{(p)}(a)$. Se p è pari il fattore h^p non influisce sul segno, l'incremento $[f(a+h) - f(a)]$ non cambia segno e quindi avremo un estremo. Se p è dispari h^p cambia segno passando per l'origine e lo stesso farà l'incremento $[f(a+h) - f(a)]$ e dunque la funzione sarà crescente o decrescente in a. (**c.d.d.**)
Si noti che non sempre esiste la prima derivata non nulla (di una funzione infinite volte derivabile), per tali funzioni il criterio non è applicabile. E' possibile dare l'esempio di una funzione infinitamente derivabile (in R) diversa da zero fuori dall'origine ma ivi uguale a zero con tutte le sue derivate.
Cenno sulla ricerca degli estremi assoluti di una funzione: consideriamo il caso di una funzione f continua definita in un intervallo $[a, b]$. Per il teorema di Weierstrass esistono punti di massimo e di minimo assoluti, dove li dobbiamo cercare? Da quanto visto sinora dovrebbe essere chiaro che gli estremi assoluti vanno ricercati tra i seguenti punti: gli estremi a e b dell'intervallo, i punti dove la funzione non è derivabile, gli zeri della derivata prima. Una volta trovati questi punti basta valutare in essi la funzione per decidere col confronto quali sono di massimo e quali di minimo assoluto. (Non occorre determinare se i punti stazionari siano o no estremi relativi). Con qualche accorgimento a volte il metodo si può estendere a intervalli aperti o illimitati.

6.6 Calcolo delle radici di un'equazione

Data una funzione f ragionevolmente regolare, in che modo si possono calcolare (numericamente) le (eventuali) radici dell'equazione $f(x) = 0$?

Il metodo che illustreremo si chiama metodo di Newton o delle tangenti. Innanzitutto bisogna separare le radici, cioè determinare un intervallo in cui la funzione $f(x)$ si annulla esattamente una volta. Per operare il metodo di Newton supporremo che in un intervallo $[a, b]$ siano soddisfatte le seguenti condizioni:
i) $f(a)f(b) < 0$
ii) $f'(x) \neq 0$ in $[a, b]$
iii)$f''(x) \neq 0$ e continua in $[a, b]$
Tra i due punti $P = (a, f(a))$ e $Q = (b, f(b))$ del grafico di f prendiamo come "punto di partenza" quello per cui le funzioni f e f'' hanno lo stesso segno. Se per esempio P è il punto di partenza, posto $a = x_0$ (approssimazione della radice di ordine zero), tracciamo per P la tangente al grafico, l'ascissa x_1 in cui la tangente incontra l'asse delle x è l'approssimazione della radice di ordine uno; si continua con identico procedimento con "punto di partenza" $(x_1, f(x_1))$. In questo modo si costruisce per ricorrenza una successione $\{x_n\}$: è facile dimostrare che x_n converge all'unico zero della funzione nell'intervallo considerato (la convergenza è anche molto rapida). Semplici calcoli mostrano che

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Si voglia per esempio calcolare $\sqrt[3]{40}$. Basta considerare l'equazione

$$f(x) = x^3 - 40 = 0$$

Si ha nell'intervallo $[3, 4]$

$$f(3) = -13 < 0 \;\; ; \;\; f(4) = 24 > 0 \;\; ; \;\; f'(x) = 3x^2 > 0 \;\; ; \;\; f''(x) = 6x > 0$$

Il "punto di partenza" è $(4, 24)$ e

$$x_0 = 4 \;\; : \;\; x_1 = 4 - 24/48 = 7/2 = 3.5 \;\; : \;\; x_2 = 7/2 - 23/294 = 3.4217$$

il valore esatto di $\sqrt[3]{40}$ con quattro cifre decimali è 3.4199 .

7 Calcolo delle primitive

7.1 Considerazioni generali

Definizione. Sia g una funzione definita in un intervallo limitato I, si dice che una funzione G definita in I è una **primitiva** di g se per ogni $x \in I$

si ha $G'(x) = g(x)$ (agli eventuali estremi di I si intenderà derivata destra o sinistra). Si vede subito che se $G(x)$ è una primitiva di $g(x)$ in I anche $(G(x)+c)$, dove c è una costante arbitraria, è una primitiva. Se G_1 e G_2 sono due primitive di g allora $(G_1 - G_2)$ è una funzione costante, questo perché funzioni con ugual derivata differiscono per una costante. Dunque se una funzione g ammette una primitiva G allora ne ammette infinite e sono tutte della forma $(G(x) + c)$ con c costante arbitraria. Il seguente teorema verrà dimostrato in seguito:

Teorema. Ogni funzione continua in un intervallo $[a, b]$ ammette primitive. Per un'infelice tradizione l'insieme delle primitive di una data funzione f viene a volte chiamato "integrale indefinito" e denotato $\int f(x)\, dx$ (la ragione di questa notazione sarà chiara in seguito). Se di f si conosce esplicitamente una primitiva F si suole scrivere $\int f(x)\, dx = F(x) + c$; adotteremo per le primitive di una f la notazione $\int f(x)$ e per semplicità ometteremo di scrivere la costante: per esempio scriveremo $\int \cos x = \sin x$, inoltre l'intervallo di definizione si intende sottinteso.

7.2 Prime regole di calcolo

Il nostro scopo è quello di trovare delle regole per istituire un calcolo di primitive. La prima regola è semplicemente "leggere alla rovescia" (ma con qualche accorgimento) qualsiasi tabella di derivate. Ecco un elenco di primitive che conviene conoscere a memoria

$$\int x^\alpha = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \ \ \alpha \neq -1 \ ; \ \int x^{-1} = \log x \ ; \ \int \ \mathrm{e}^x = e^x \ ; \ \int \sin x = -\cos x$$
$$\int \cos x = \sin x \ ; \ \int \frac{1}{1+x^2} = \arctan x \ ; \ \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x$$

Anche le seguenti formule si deducono leggendo alla rovescia regole di derivazione, ma per poter essere usate richiedono un minimo di fantasia:

$$\int f'(g(x))g'(x) = f(g(x))$$

che particolareggiata dà luogo alle seguenti

$$\int f'(ax) = \frac{f(ax)}{a}; \int \frac{f'(x)}{f(x)} = \log(f(x)); \int \mathrm{e}^{f(x)} f'(x) = \mathrm{e}^{f(x)}; \int f(x)^p f'(x) = \frac{f(x)^{p+1}}{p+1}$$

Applicando queste formule si provano per esempio i seguenti risultati

$$\int \tan x = -\log(\cos x) \ ; \int x\mathrm{e}^{-x^2} = -\mathrm{e}^{-x^2}/2 \ ; \ \int \frac{\log x}{x} = (\log x)^2/2$$

Tradizionalmente si espongono tre metodi di calcolo di primitive: per decomposizione, per parti e per sostituzione.
Primitive per decomposizione. Si tratta semplicemente di questo: se f è la funzione da integrare, scriviamo $f = f_1 + f_2$ e poi $\int f(x) = \int f_1(x) + \int f_2(x)$. Esempio: $\frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$ per cui $\int \frac{1}{x(x+1)} = \log x - \log(x+1)$.
Primitive per parti. Poiché $[f(x)g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ da questa integrando si ottiene la formula di integrazione per parti

$$\int f(x)g'(x) = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)$$

Per es. prendendo nella formula $g(x) = x$ e $f(x) = \log x$ oppure $\arctan x$ si ottiene rispett.

$$\int \log x = x \log x - x \ ; \ \int \arctan x = x \arctan x - \frac{\log(1+x^2)}{2}.$$

Per calcolare $J = \int \mathrm{e}^x \cos x$ occorrono due successive integrazioni per parti:

$$J = \int \mathrm{e}^x (\sin x)' = \mathrm{e}^x \sin x - \int \sin x \mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x \sin x + \int \mathrm{e}^x (\cos x)' = \mathrm{e}^x \sin x + \mathrm{e}^x \cos x - J$$

da qui risolvendo l'equazione si ricava $J = \frac{\sin x + \cos x}{2} \mathrm{e}^x$.
Primitive per sostituzione. Dovendosi calcolare $\int f(x)$ a volte risulta conveniente un cambio di variabile. Poniamo $x = u(t)$, dove u è una funzione invertibile, e supponiamo di conoscere una primitiva $P(t)$ della funzione $f[u(t)]u'(t)$, allora la funzione $P(u^{-1}(x))$ è una primitiva di $f(x)$: ciò è verificato dal seguente calcolo: $[P(u^{-1}(x))]' = f[u(u^{-1}(x))]u'(u^{-1}(x))(u^{-1}(x))' = f(x)$. (Si ricordi la regola di derivata di funzione inversa).
Come esempio calcoliamo una primitiva di $f(x) = \sqrt{a^2 - x^2}$ dove a è una costante. Facciamo la sostituzione $x = a \sin t$ e cerchiamo una primitiva di $f(a \sin t) \cos t$. Abbiamo successivamente $\int \sqrt{a^2 - a^2(\sin t)^2}\, a \cos t = a^2 \int (\cos t)^2 = (a^2/2)(t + \sin t \cos t) = P(t)$. La primitiva richiesta è $P(\arcsin(x/a))$. Nell'espressione di $P(t)$ si metta $\arcsin(x/a)$ al posto di t, x/a al posto di $\sin t$ e $(1 - x^2/a^2)$ al posto di $\cos t$. Avremo il risultato

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} = (a^2/2) \arcsin(x/a) + (x/2)\sqrt{a^2 - x^2}$$

7.3 Integrazione delle funzioni razionali

Il metodo di sostituzione verrà usato sistematicamente allo scopo di ridurre, quando possibile, il calcolo di una primitiva a quello di primitive di funzioni razionali. Mostreremo un modo canonico di rappresentare le funzioni razionali conveniente per determinarne le primitive. Sia $T(x) = P(x)/Q(x)$ una funzione razionale. Se il grado di P è maggiore o uguale al grado di Q effettuiamo la divisione con resto, otterremo una rappresentazione $T(x) = A(x) + R(x)/Q(x)$ dove A, R sono polinomi e il grado di R è (strettamente) minore del grado di Q. Possiamo quindi limitarci a considerare funzioni razionali in cui il polinomio a numeratore ha grado minore del polinomio a denominatore. Sia dunque $t(x) = r(x)/q(x)$ una tale funzione, la forma delle primitive di $t(x)$ dipende solo dal denominatore $q(x)$, più precisamente dalla sua fattorizzazione.
A tal proposito premettiamo le nozioni contenute nella sezione che segue.

7.4 Fattorizzazione dei polinomi

Vale il seguente teorema fondamentale
Teorema. Sia P un polinomio nel campo complesso di grado maggiore o uguale a 1, allora esiste $a \in C$ tale che $P(a) = 0$, ovvero P ammette almeno una radice in C.
Sia P un polinomio di grado n, per il teorema di sopra esiste una radice, sia essa a_1, per la regola di Ruffini avremo $P(z) = (z - a_1)P_1(z)$ con grado di $P_1 = n - 1$; potremo applicare il teorema fondamentale al polinomio P_1 e continuare. Si dimostra così il
Corollario: fattorizzazione in C. Sia P un polinomio di grado n in C, esistono n numeri complessi $a_1, a_2, .., a_n$ e una costante non nulla c tali che $P(z) = c(z-a_1)(z-a_2)...(z-a_n)$.
Si osservi che gli a_i non sono necessariamente distinti. Raggruppando le radici coincidenti la fattorizzazione avrà la forma $P(z) = c(z-a_1)^{n_1}(z-a_2)^{n_2}...(z-a_p)^{n_p}$ dove le molteplicità n_i sono tali che $n_1 + n_2 + .. + n_p = n$.
Teorema. Sia P un polinomio a coefficienti reali, allora se P ammette la radice α ammette anche la radice coniugata $\overline{\alpha}$.
Dimostrazione. Ricordiamo che in C valgono per il coniugio le proprietà: $\overline{(z + w)} = \overline{z} + \overline{w}, \overline{(zw)} = \overline{z}\overline{w}$. Tenuto conto di questo segue che $\overline{P(z)} = P(\overline{z})$, infatti per ogni monomio $c_i z^i$ di $P(z)$ essendo c_i reale si ha $\overline{c_i z^i} = c_i(\overline{z})^i$. c.d.d.
Corollario: fattorizzazione in R. Sia P un polinomio di grado n a coefficienti in R, allora P si fattorizza nel campo reale con fattori lineari (corrispondenti alle radici reali) e fattori quadratici (corrispondenti alle radici non reali) nel modo seguente

$$P(x) = c(x - a_1)^{r_1}...(x - a_s)^{r_s}(x^2 + p_1x + q_1)^{k_1}...(x^2 + p_tx + q_t)^{k_t}$$

dove $r_1 + .. + r_s + 2k_1 + .. + 2k_t = n$ e tutti i trinomi hanno discriminante negativo.
Dimostrazione. Segue da quanto visto e dal fatto che le radici non reali vengono a coppie

coniugate, basta osservare che se u è una radice non reale si ha $(x-u)(x-\overline{u}) = (x^2 - 2\mathcal{R}\mathrm{e}\, u + |u|^2)$.

7.5 Decomposizione in frazioni semplici

Sia dunque

$$q(x) = c(x-a_1)^{r_1}..(x-a_s)^{r_s}\,(x^2+p_1x+q_1)^{k_1}..(x^2+p_tx+q_t)^{k_t}\,,$$

allora $t(x)$ si può rappresentare come somma di frazioni semplici di questi soli due tipi

$$\frac{A}{(x-a)^r} \qquad \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^s}$$

dove la prima frazione corrisponde a una radice reale a e la seconda a un trinomio con "Δ" negativo. Gli esponenti positivi r, s tengono conto della molteplicità delle radici. Le costanti A, B, C devono essere determinate. Se a è una radice di molteplicità $p \geq 1$, ad essa corrisponde nella rappresentazione di $t(x)$ la somma di p frazioni $\frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + .. + \frac{A_p}{(x-a)^p}$; a un trinomio di molteplicità h corrisponde la somma di h frazioni $\frac{B_1x+C_1}{(x^2+px+q)} + \frac{B_2x+C_2}{(x^2+px+q)^2} + .. + \frac{B_hx+C_h}{(x^2+px+q)^h}$. Per determinare le costanti bisogna usare il principio di identità dei polinomi.

7.6 Calcolo delle primitive

Per quanto si è visto per calcolare le primitive delle funzioni razionali basta saper calcolare le primitive di frazioni del tipo $\frac{1}{(x-a)^r}$, $\frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^s}$. Per la funzione $\frac{1}{(x-a)^r}$ se $r = 1$ una primitiva è $\log(|x-a|)$, se $r > 1$ una primitiva è $\frac{(x-a)^{-r+1}}{-r+1}$. Per l'altra funzione consideriamo il caso $s = 1$, con un po' di calcoli si trova $\int \frac{Bx+C}{x^2+px+q} = (B/2)\log(x^2+px+q) + \frac{2C-Bp}{K} \arctan \frac{2x+p}{K}$ dove $K = \sqrt{4q-p^2}$. Se $s > 1$ con semplici passaggi il calcolo di primitive per $\frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^s}$ si riduce a quello di $\frac{2x+p}{(x^2+px+q)^s}$ e di $\frac{1}{(x^2+px+q)^s}$. Per la prima funzione una primitiva è $\frac{(x^2+px+q)^{-s+1}}{-s+1}$; per la seconda con la sostituzione $(2x+p)/K = t$ il calcolo si riporta alla determinazione di $I_k = \int \frac{1}{(1+t^2)^k}$. Sappiamo che $I_1 = \arctan t$, nel modo che segue troveremo una formula ricorrente per I_k. Si ha $\frac{1}{(1+t^2)^k} = \frac{1+t^2-t^2}{(1+t^2)^k} = \frac{1}{(1+t^2)^{k-1}} - \frac{t^2}{(1+t^2)^k}$ per cui $I_k =$

$I_{k-1} - (1/2)\int \frac{t}{(1+t^2)^k}(1+t^2)'$. Si esegue l'integrazione per parti e con semplici passaggi si trova $I_k = \frac{t}{2(k-1)(1+t^2)^{k-1}} + \frac{2k-3}{2k-2} I_{k-1}$.

7.7 Metodi di razionalizzazione

Dal momento che si sanno determinare esplicitamente le primitive delle funzioni razionali, un metodo potente per calcolare $\int f(x)$ consiste nell'effettuare una sostituzione $x = \phi(t)$ in modo che la funzione $f[\phi(t)]\phi'(t)$ risulti razionale.
Funzioni trigonometriche: se si pone $\tan(x/2) = t$ ossia $x = 2\arctan t = \phi(t)$, sappiamo dalla trigonometria che $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$; inoltre $\phi'(t) = \frac{2}{1+t^2}$. Pertanto se $F(x)$ è una qualsiasi espressione razionale negli argomenti $\sin x$ e $\cos x$ questa sostituzione riduce il calcolo di $\int F(x)$ alla ricerca di una primitiva di una funzione razionale. Ad es. per calcolare $\int \frac{1}{\sin x}$ si deve considerare $\int \frac{1+t^2}{2t}\frac{2}{1+t^2} = \int \frac{1}{t} = \log t$; e quindi si ha $\int \frac{1}{\sin x} = \log[\tan(x/2)]$.
Radici quadrate: mostriamo ora come si calcola una primitiva di una funzione razionale negli argomenti x e $\sqrt{ax^2+bx+c}$. Se $a > 0$ poniamo $\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a}(x+t)$ da cui si ricava $x = \frac{at^2-c}{b-2at} = \phi(t)$ e quindi $\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a}\frac{-at^2+bt-c}{b-2at}$; $\phi'(t) = \frac{-2a(at^2-bt+c)}{(b-2at)^2}$. Tutto ciò mostra che alla fine si tratterà di calcolare una primitiva di una funzione razionale. Se $a < 0$ osserviamo che il radicale è reale solo se x varia nell'intervallo $[\alpha, \beta]$ delle radici del trinomio, cioè $ax^2+bx+c = a(x-\alpha)(x-\beta)$. Si può scrivere$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{-a}(x-\alpha)\sqrt{\frac{\beta-x}{x-\alpha}}$, si vede da qui che la sostituzione $t = \sqrt{\frac{\beta-x}{x-\alpha}}$ razionalizza l'integrale.
Esponenziali: Sia $R(u)$ una funzione razionale della variabile u e si voglia calcolare $\int R(\mathrm{e}^x)$: la sostituzione $\mathrm{e}^x = t$ ovvero $x = \log t$ razionalizza l'integrale, dovendosi infatti calcolare $\int R(t)/t$.
Ci sono anche altri casi in cui si può applicare questo metodo, però naturalmente non sempre è possibile razionalizzare. Ci sono anche varie altre tecniche particolari per il calcolo di primitive. Per concludere si tenga presente che esistono diverse funzioni "semplici" per cui non è possibile esprimere una loro primitiva in termini delle funzioni che usiamo abitualmente (ovviamente ciò non significa che queste funzioni non ammettano primitive: ogni funzione continua ammette primitive!); ecco qualche esempio:

$$\frac{\mathrm{e}^x}{x}\ ,\ \mathrm{e}^{-x^2}\ ,\ \sin(x^2)\ ,\ \frac{\sin x}{x}$$

8 L'integrale di Riemann

8.1 Partizioni

Sia $[a,b]$ $(a<b)$ un intervallo (chiuso e limitato) in R: una **partizione** $\mathcal{P}$ di $[a,b]$ è un sottoinsieme finito di $[a,b]$ che contenga sia a che b. Conveniamo di scrivere sempre in ordine strettamente crescente gli elementi di $\mathcal{P}$; useremo perciò la notazione $\mathcal{P}=\{a=x_0<x_1<...<x_n=b\}$. Date due partizioni $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$ di $[a,b]$ diremo che $\mathcal{P}_2$ è più fine di $\mathcal{P}_1$ se (come insiemi) $\mathcal{P}_1\subset\mathcal{P}_2$. Naturalmente in generale due partizioni $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$ non saranno confrontabili, però la partizione $\mathcal{P}\cup\mathcal{Q}$ è una partizione più fine sia di $\mathcal{P}$ che di $\mathcal{Q}$.

8.2 Somme di Riemann

Tra le funzioni $f:[a,b]\to R$ **limitate** definiremo quelle **integrabili** secondo Riemann su $[a,b]$.
Data una tale funzione f e una partizione $\mathcal{P}=\{a=x_0<x_1<...<x_n=b\}$ definiamo le somme di Riemann per difetto e per eccesso rispettivamente

$$s(\mathcal{P},f)=\sum_{k=1}^{n} l_k(x_k-x_{k-1})\ ,\ S(\mathcal{P},f)=\sum_{k=1}^{n} L_k(x_k-x_{k-1})$$

$$\text{dove }\ l_k=\inf\{f(x):x\in[x_{k-1},x_k]\}\ ,\ L_k=\sup\{f(x):x\in[x_{k-1},x_k]\}\ .$$

Teorema. Qualunque siano le partizioni $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$ si ha $s(\mathcal{P},f)\leq S(\mathcal{Q},f)$.
Dimostrazione. Si osservi preliminarmente che:
i) per ogni partizione $\mathcal{A}$ si ha $s(\mathcal{A},f)\leq S(\mathcal{A},f)$
ii) $\mathcal{P}_1\subset\mathcal{P}_2\ \Rightarrow s(\mathcal{P}_1,f)\leq s(\mathcal{P}_2,f)\ ,\ S(\mathcal{P}_1,f)\geq S(\mathcal{P}_2,f)$.
Le seguenti disuguaglianze

$$s(\mathcal{P},f)\leq s(\mathcal{P}\cup\mathcal{Q},f)\ \ ,\ \ S(\mathcal{P}\cup\mathcal{Q},f)\leq S(\mathcal{Q},f)$$

provano la tesi. **(c.d.d.)**
Poniamo ora $s(f)=\sup_{\mathcal{P}}\{s(\mathcal{P},f)\}$, $S(f)=\inf_{\mathcal{Q}}\{S(\mathcal{Q},f\}$, per quanto provato per ogni f limitata in $[a,b]$ vale la disuguaglianza

$$s(f)\leq S(f).$$

I numeri $s(f),S(f)$ sono chiamati rispettivamente **integrale per difetto** e **integrale per eccesso** della f su $[a,b]$.

8.3 L'integrale di Riemann

Definizione. Si dirà che f è **integrabile** (secondo Riemann) su $[a, b]$ se $s(f) = S(f)$ e il valore comune di questi numeri è per definizione l'integrale (definito) su $[a, b]$ della f e si denota con $\int_a^b f(x)dx$.
Si riconosce facilmente un significato geometrico dell'integrale nel caso di una funzione f positiva. L'insieme $T = \{(x, y) : a \leq x \leq b,\ 0 \leq y \leq f(x)\}$ viene detto trapezoide definito dalla f, allora $\int_a^b f(x)dx$ vale l'area di T e le somme di Riemann per difetto e per eccesso valgono rispettivamente l'area di un plurirettangolo contenuto in T e l'area di uno contenente T e approssimano per difetto e per eccesso l'area di T.
Criterio di integrabilità: condizione necessaria e sufficiente a che una funzione limitata f su $[a, b]$ sia ivi integrabile è che

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \ \mathcal{P}_\epsilon : S(\mathcal{P}_\epsilon, f) - s(\mathcal{P}_\epsilon, f) < \epsilon$$

Esistono funzioni limitate non integrabili. Esempio: sia $f : [0, 1] \to R$ così definita: $f(x) = 1$ se x è razionale e $f(x) = 0$ altrimenti. Si vede che per qualsiasi partizione di [0, 1] le somme per difetto valgono sempre 0 e le somme per eccesso 1, pertanto $s(f) = 0, S(f) = 1$ e quindi la f non è integrabile.
Mostriamo che per ogni $p > 0$ la funzione $f(x) = x^p$ è integrabile su [0, 1] e calcoliamone l'integrale. Sia $\mathcal{P}_n = \{0 < 1/n < .. < k/n < .. < 1\}$ allora

$$(x_k - x_{k-1}) = 1/n \ , \ l_k = [(k-1)/n]^p \ , \ L_k = [k/n]^p$$

$$S(\mathcal{P}_n, f) - s(\mathcal{P}_n, f) = \sum_{k=1}^{n} (\ [k/n]^p - [(k-1)/n]^p\ )(1/n) = 1/n$$

pertanto per il criterio di sopra la f risulta integrabile. Questi stessi calcoli mostrano che $\int_0^1 f(x)dx = \lim_{n\to+\infty} s(\mathcal{P}_n, f) = \lim_{n\to+\infty} S(\mathcal{P}_n, f) = 1/(p + 1)$ dove abbiamo usato la formula $\lim_{n\to+\infty} 1/(n^{p+1}) \sum_{k=1}^{n} k^p = 1/(p + 1)$.
Definizione. Data una partizione $\mathcal{P} = \{a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b\}$ di $[a, b]$ si chiama **parametro** di $\mathcal{P}$ il numero $\delta_{\mathcal{P}} = \max_i(x_i - x_{i-1})$.
Teorema. Una funzione monotona in $[a, b]$ è ivi integrabile.
Dimostrazione. Si osservi che una tale funzione f risulta automaticamente limitata. Sia $\mathcal{P} = \{a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b\}$ una partizione di $[a, b]$. Per fissare le idee supponiamo f crescente. Per la differenza fra le somme integrali per eccesso e per difetto si ha (cfr. l'esempio sopra)

$$S(\mathcal{P}, f) - s(\mathcal{P}, f) = \sum_{k=1}^{n} [(f(x_k) - f(x_{k-1})](x_k - x_{k-1}) \leq$$

$$\leq \delta_{\mathcal{P}} \sum_{k=1}^{n}[(f(x_k) - f(x_{k-1})] = \delta_{\mathcal{P}}\,[f(b) - f(a)]$$

Poiché $\delta_{\mathcal{P}}$ si può prendere piccolo a piacere la tesi è provata. (**c.d.d.**)
Definizione. Una funzione $f : A \to R$ si dice **uniformemente continua** se

$$\forall\, \epsilon > 0\; \exists\; \delta(\epsilon) > 0 :\; |x - y| < \delta(\epsilon)\; \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon\;\; (x, y \in A)$$

E' facile vedere che una funzione uniformemente continua in A è ivi continua, esistono però funzioni continue che non sono uniformemente continue. Si deve a Cantor il seguente
Teorema. Una funzione continua in un intervallo chiuso e limitato è ivi uniformemente continua.
Il teorema di Cantor permette di provare facilmente il
Teorema. Una funzione continua in un intervallo $[a, b]$ è ivi integrabile.
Consideriamo ora altri tipi di somme integrali. Sia dunque $f : [a, b] \to R$ una funzione limitata e $\mathcal{P} = \{a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b\}$ una partizione di $[a, b]$ e sia $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$, detto $C = (c_1, .., c_n)$, poniamo $\sigma(\mathcal{P}, C, f) = \sum_{k=1}^{n} f(c_i)(x_i - x_{i-1})$.Si noti che qualunque sia C si ha:

$$s(\mathcal{P}, f) \leq \sigma(\mathcal{P}, C, f) \leq S(\mathcal{P}, f)\;.$$

Definizione. Si dice che le somme $\sigma(\mathcal{P}, C, f)$ convergono (quando il parametro $\delta_{\mathcal{P}}$ tende a 0) se esiste un numero reale α (il limite) tale che

$$\forall\, \epsilon > 0\; \exists\, h(\epsilon) > 0 : \forall\, \mathcal{P}\, \text{con}\, \delta_{\mathcal{P}} < h(\epsilon)\; \text{e}\, \forall\, C \text{ si ha }\; |\sigma(\mathcal{P}, C, f) - \alpha| < \epsilon\;.$$

Teorema (Darboux-Riemann). Una funzione f limitata in $[a, b]$ è ivi integrabile se e solo se le somme $\sigma(\mathcal{P}, C, f)$ convergono, il loro limite essendo il valore dell'integrale.
L'insieme delle funzioni (limitate) integrabili su $[a, b]$ sarà indicato con $\mathcal{R}[a, b]$.

8.4 Proprietà dell'integrale di Riemann

Il seguente teorema ci dice che $\mathcal{R}[a, b]$ è uno spazio vettoriale e che l'integrale è lineare su $\mathcal{R}[a, b]$.

Teorema Se $f, g \in \mathcal{R}[a,b]$ e c è un numero reale, allora $(f+g), cf \in \mathcal{R}[a,b]$ e inoltre

$$\int_a^b (f+g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx \quad , \quad \int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx \, .$$

La dimostrazione segue facilmente dal teorema di Darboux-Riemann.
Teorema $f \in \mathcal{R}[a,b] \Rightarrow |f| \in \mathcal{R}[a,b]$.
Dimostrazione. Per ogni partizione $\mathcal{P}$ di $[a,b]$ si ha $[S(\mathcal{P},|f|)-s(\mathcal{P},|f|)] \leq [S(\mathcal{P},f)-s(\mathcal{P},f)]$. (**c.d.d.**)
Il seguente teorema si enuncia dicendo che l'integrale di Riemann è monotono.
Teorema. Se $f, g \in \mathcal{R}[a,b]$ e $f(x) \leq g(x), x \in [a,b]$, allora $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$.
Dimostrazione. Si osservi che dalla definizione di integrale segue immediatamente che l'integrale di una funzione positiva è positivo. Per ipotesi si ha $0 \leq [g(x)-f(x)] = h(x)$, per cui $0 \leq \int_a^b h(x)dx = \int_a^b g(x)dx - \int_a^b f(x)dx$ cioè $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$. (**c.d.d.**)
Corollario. Sia $f \in \mathcal{R}[a,b]$: vale la disuguaglianza $|\int_a^b f(x)dx| \leq \int_a^b |f(x)|dx$ (segue dal fatto che $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$) .
Teorema della media integrale Sia $f \in \mathcal{R}[a,b]$, allora esiste un numero $\overline{f} \in [\inf f, \sup f]$ tale che

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)\overline{f}$$

se f è continua per il teorema dei valori intermedi $\overline{f}$ è un valore assunto, cioè esiste $c \in [a,b]$ tale che

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(c)$$

Dimostrazione. Basta osservare che $\inf f \leq f(x) \leq \sup f$ e applicare la monotonia dell'integrale. (**c.d.d.**)
La quantità $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ viene chiamata **valore medio** della f in $[a,b]$.
Teorema. Se $f \in \mathcal{R}[a,b]$ e $[c,d] \subset [a,b]$ allora la restrizione $\tilde{f}$ di f a $[c,d]$ è in $\mathcal{R}[c,d]$.
Dimostrazione. Fissiamo $\epsilon > 0$, poiché $f \in \mathcal{R}[a,b]$ esiste una partizione $\mathcal{P}$ di $[a,b]$ tale che $[S(\mathcal{P},f)-s(\mathcal{P},f)] < \epsilon$. Sia $\mathcal{Q} = \mathcal{P} \cup \{c,d\}$, dato che $\mathcal{Q}$ è più fine di $\mathcal{P}$ si ha pure $[S(\mathcal{Q},f)-s(\mathcal{Q},f)] < \epsilon$. Sia $\mathcal{T} = \mathcal{Q} \cap [c,d]$, allora $\mathcal{T}$ è una partizione di $[c,d]$. Si ha infine

$[S(\mathcal{T},\tilde{f}) - s(\mathcal{T},\tilde{f})] < \epsilon$ perché gli addendi di queste somme sono alcuni degli addendi delle somme precedenti (tutti gli addendi sono positivi). (**c.d.d.**)

Il seguente importante teorema ha una evidente interpretazione geometrica:
Teorema (Additività dell'integrale). Sia $f \in \mathcal{R}[a,b]$ e $a < c < b$, allora

$$(*) \qquad \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Dimostrazione. Per calcolare $\int_a^b f(x)dx$ non è restrittivo considerare solo partizioni che abbiano un nodo in c, tenuto conto di questo si prova facilmente la tesi. **(c.d.d.)**
Definizione. Sia $f \in \mathcal{R}[a,b]$ e siano $u < v$ due punti di $[a,b]$, allora si pone per definizione $\int_v^u f(x)dx = -\int_u^v f(x)dx$. Con questa posizione la formula $(*)$ vale qualunque sia l'ordine dei numeri a, b, c.
Definizione. Sia $f \in \mathcal{R}[a,b]$, per ogni $x \in [a,b]$ si definisca $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ (la definizione è corretta perché f è integrabile in ogni sottointervallo di $[a,b]$), la funzione $F(x)$ si chiama **funzione integrale** della f. Si noti che $F(a) = 0, F(b) = \int_a^b f(t)dt$; se f è positiva allora F è crescente.
Teorema $F \in C[a,b]$.
Dimostrazione. Sia $y \in (a,b)$ e mostriamo la continuità in y (la dimostrazione con le ovvie modifiche vale anche agli estremi dell'intervallo). Per $|h|$ sufficientemente piccolo anche $(y+h) \in (a,b)$, si ha $|F(y+h) - F(y)| = |\int_y^{y+h} f(t)dt| \leq |h|M$, dove M è un maggiorante per $|f(t)|$ (esiste perché f è limitata). Questa disuguaglianza prova l'asserto. (**c.d.d.**)
Teorema fondamentale del calcolo integrale. Sia f una funzione continua in $[a,b]$, allora la sua funzione integrale F è una primitiva di f.
Dimostrazione. Sia $y \in (a,b)$ e mostriamo che $F'(y) = f(y)$ (la dimostrazione con le ovvie modifiche vale anche agli estremi dell'intervallo). Per $|h|$ sufficientemente piccolo anche $(y+h) \in (a,b)$, si ha $[F(y+h) - F(y)] = \int_y^{y+h} f(t)dt$. Applicando il teorema della media integrale alla funzione continua f si può scrivere $[F(y+h) - F(y)] = hf(y + \theta_h h)$ dove $0 \leq \theta_h \leq 1$, facendo tendere h a zero il punto $(y + \theta_h h)$ tende al punto y e quindi per la continuità $f(y + \theta_h h)$ tende a $f(y)$. Abbiamo dunque $F'(y) = \lim_{h \to 0} \dfrac{F(y+h) - F(y)}{h} = f(y)$ e la tesi è provata. (**c.d.d.**)
Si noti che è con questo teorema che si dimostra che le funzioni continue ammettono primitive. Vediamo una immediata ma importante conseguenza di questo teorema. Sia P una qualunque primitiva di f in $[a,b]$, allora P e F

avendo la stessa derivata differiscono per una costante: $P(x) = \int_a^x f(t)dt + c$, facendo $x = a$ si ottiene $P(a) = c$ e quindi $P(x) - P(a) = \int_a^x f(t)dt$; facendo $x = b$ si ottiene la così detta
Formula fondamentale del calcolo integrale

$$\int_a^b f(t)dt = P(b) - P(a)$$

dove, ripetiamo, P è una qualsiasi primitiva di f in $[a, b]$.
Non è in contraddizione col teorema fondamentale del calcolo integrale questo fatto: esistono funzioni integrabili su $[a, b]$ che non ammettono primitive. Per poter dare un esempio premettiamo il
Teorema. Se una funzione g definita in $[a, b]$ è la derivata di un'altra funzione, allora g ha la proprietà dei valori intermedi.
Dimostrazione. Sia $a \leq \alpha < \beta \leq b$ e sia per esempio $g(\alpha) < c < g(\beta)$, dobbiamo provare che esiste $\gamma \in [\alpha, \beta]$ con $g(\gamma) = c$. Sia G una primitiva di g, e consideriamo la funzione $H(x) = G(x) - cx$, si ha $H'(\alpha) = [g(\alpha) - c] < 0$, $H'(\beta) = [g(\beta) - c] > 0$ per cui la funzione H è decrescente in α e crescente in β; ma H essendo continua in $[\alpha, \beta]$ ammette ivi minimo che dovrà essere assunto in un punto interno γ; per il teorema di Fermat la sua derivata è nulla in questo punto. Si ha pertanto $0 = H'(\gamma) = g(\gamma) - c$. (**c.d.d.**)
Esempio. La funzione $f(x) = \operatorname{sgn} x$ è integrabile in $[-1, 1]$ ma non ammette ivi primitive. Infatti essendo f crescente e limitata, $f \in \mathcal{R}[-1, 1]$; non avendo f la proprietà dei valori intermedi (prende il valore 0 e il valore 1 ma nessun valore intermedio) non può ammettere primitive. Il teorema fondamentale del calcolo integrale non si applica perché f non è continua. Si noti che ogni funzione limitata e monotona in [a, b] che sia discontinua fornisce un controesempio. Esistono funzioni limitate in [a, b], non monotone e discontinue che risultano integrabili: si potrebbe infatti dimostrare il
Teorema. Se f è una funzione limitata in $[a, b]$ e ivi continua con l'eccezione al più di un numero finito di punti, allora $f \in \mathcal{R}[a, b]$.

8.5 Calcolo di integrali

Dovendo calcolare integrali di funzioni continue si può usare la formula fondamentale del calcolo integrale e di conseguenza avvalersi delle regole di calcolo per le primitive. L'integrazione per parti non richiede particolari commenti:

per quanto già visto si ha la formula

$$\int_a^b f(t)g'(t)dt = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'(t)g(t)dt$$

Per quanto riguarda il metodo di sostituzione, dovendo calcolare $\int_a^b f(x)dx$, sappiamo che entra in gioco $\int f[g(t)]g'(t)dt$ dove $x = g(t)$ è la sostituzione. Mostriamo che si possono determinare α, β in modo tale che $\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f[g(t)]g'(t)dt$. Sia $P(x)$ una primitiva di $f(x)$; allora $P[g(t)]$ è una primitiva di $f[g(t)]g'(t)$ come si verifica subito derivando. Per la formula fondamentale del calcolo integrale si ha

$$\int_a^b f(x)dx = P(b) - P(a) \ , \ \int_\alpha^\beta f[g(t)]g'(t)dt = P[g(\beta)] - P[g(\alpha)]$$

Le due espressioni saranno uguali se $g(\beta) = b, g(\alpha) = a$. Pertanto la formula di sostituzione per gli integrali con la sostituzione $x = g(t)$ è

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f[g(t)]g'(t)dt$$

dove α, β devono solo soddisfare la condizione $g(\beta) = b, g(\alpha) = a$.
Si noti che **non occorre** che la funzione $g(t)$ sia invertibile.
Negli esempi che seguono si considerano solo funzioni continue.
1) Le funzioni f, g siano rispettivamente pari e dispari, h sia periodica di periodo $T > 0$ e $y \in R$ si ha

$$\int_{-a}^a f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx, \ \int_{-a}^a g(x)dx = 0, \ \int_y^{y+T} h(x)dx = \int_0^T h(x)dx$$

$\int_{-a}^a f(x)dx = \int_{-a}^0 f(x)dx + \int_0^a f(x)dx$; con la sostituzione $x = -t$ si ottiene $\int_{-a}^0 f(x)dx = -\int_a^0 f(-t)dt = \int_0^a f(t)dt$ e la prima formula è provata.
$\int_{-a}^a g(x)dx = \int_{-a}^0 g(x)dx + \int_0^a g(x)dx$; con la sostituzione $x = -t$ si ottiene $\int_{-a}^0 g(x)dx = -\int_a^0 g(-t)dt = -\int_0^a g(t)dt$ e la seconda formula è provata.
$\int_y^{y+T} h(x)dx = \int_y^0 h(x)dx + \int_0^T h(x)dx + \int_T^{y+T} h(x)dx$; con la sostituzione $x = T + t$ si ottiene $\int_T^{y+T} h(x)dx = \int_0^y h(T+t)dt = -\int_y^0 h(t)dt$ e la terza formula è provata.
2) Sia p un intero positivo, si calcolino $\int_0^{\pi/2}(\sin x)^p dx$, $\int_0^{\pi/2}(\cos x)^p dx$.
Notiamo che con la sostituzione $x = (\pi/2 - t)$ si ha

$$\int_0^{\pi/2}(\cos x)^p dx = -\int_{\pi/2}^0 [\cos(\pi/2 - t)]^p dt = \int_0^{\pi/2}(\sin t)^p dt$$

e quindi i due integrali richiesti hanno lo stesso valore. Calcoliamo il primo integrale:

$$J_p = \int_0^{\pi/2} (\sin x)^p dx = -\int_0^{\pi/2} (\sin x)^{p-1} (\cos x)' dx =$$

$$= -(\sin x)^{p-1} (cosx)|_0^{\pi/2} + (p-1) \int_0^{\pi/2} (\sin x)^{p-2} (\cos x)^2 dx =$$

$$= (p-1) \int_0^{\pi/2} (\sin x)^{p-2} [1 - (\sin x)^2] dx = (p-1) J_{p-2} - (p-1) J_p$$

da cui si ottiene la formula ricorrente $J_p = \frac{p-1}{p} J_{p-2}$. Per $p = 2$, tenuto conto che $J_0 = \pi/2$, si ottiene $J_2 = \int_0^{\pi/2} (\sin x)^2 dx = \int_0^{\pi/2} (\cos x)^2 dx = \pi/4$.
3) Si calcoli $\int_0^R \sqrt{R^2 - x^2} dx$: con la sostituzione $x = R \sin t$ si ottiene $\int_0^R \sqrt{R^2 - x^2} dx = R^2 \int_0^{\pi/2} (\cos t)^2 dt = (\pi/4) R^2$.
4) Consideriamo l'integrale $\int_1^n \frac{dx}{x} = \log n$. Sia $\mathcal{P}_n$ la partizione $\{1, 2, .., n\}$ dell'intervallo $[1, n]$, avremo

$$s(\mathcal{P}_n, 1/x) = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} < \log n < S(\mathcal{P}_n, 1/x) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \ .$$

Posto $H_n = (1 + 1/2 + .. + 1/n)$ abbiamo $H_n - 1 < \log n < H_n - 1/n$ ovvero $\log n + 1/n < H_n < \log n + 1$: per n grande $H_n \sim \log n$.
5) Consideriamo l'integrale $\int_1^n \frac{dx}{x^2} = (1 - 1/n)$. Sia $\mathcal{P}_n$ la partizione $\{1, 2, .., n\}$ dell'intervallo $[1, n]$, avremo

$$s(\mathcal{P}_n, \frac{1}{x^2}) = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} < (1 - 1/n) < S(\mathcal{P}_n, \frac{1}{x^2}) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^2} \ .$$

Posto $D_n = (1 + 1/2^2 + .. + 1/n^2)$ abbiamo $D_n - 1 < (1 - 1/n) < D_n - 1/n^2$ ovvero $(1 - 1/n + 1/n^2) < D_n < 2 - 1/n$: questo implica, poiché la successione $\{D_n\}$ è crescente, che D_n converge a un numero compreso fra 1 e 2 (questo numero è $\pi^2/6$).

8.6 Calcolo di aree, volumi e lunghezze

Aree. Il contorno di una figura piana A è a volte determinato dal grafico di due funzioni regolari: in tal caso l'area di A (denotata $m(A)$) può essere calcolata come differenza di due integrali. Per esempio se

$$A = \{(x,y) : a \le x \le b,\, f(x) \le y \le g(x)\},\ \text{allora}\ m(A) = \int_a^b [g(x)-f(x)]dx\ .$$

Se A è la regione limitata dall'asse x, dalle parallele all'asse y per a e per b e dal grafico di una funzione f (che può cambiare segno); allora

$$A = \{(x,y) : a \le x \le b,\, \min(f(x),0) \le y \le \max(f(x),0)\}, m(A) = \int_a^b |f(x)|dx\ .$$

Adoperando accorgimenti opportuni si può calcolare l'area di una figura piana in vari altri casi.
Esempio: l'equazione canonica dell'ellisse di semiassi a e b si scrive $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 1$, posto $f(x) = (b/a)\sqrt{a^2 - x^2}$, si ha per il quarto di ellisse A che sta nel primo quadrante

$$A = \{(x,y) : 0 \le x \le a,\, 0 \le y \le f(x)\},\ m(A) = \int_0^a f(x)dx = (1/4)\pi ab$$

e quindi l'area di tutta l'ellisse vale πab .
Volumi. Sia A un solido compreso tra i piani $z = a$ e $z = b$, indichiamo con $S(z)$ l'area della sua sezione alla quota z, allora il suo volume si calcola con la formula $\text{vol}(A) = \int_a^b S(z)dz$ (la "fetta" $S(z)$ di spessore infinitesimo dz è assimilata a un cilindro il cui volume è appunto $S(z)dz$, il volume del solido si ottiene sommando tutte le fette, cioè facendo l'integrale).
Esempio: per una sfera A di raggio R centrata nell'origine si ha $S(z) = \pi(R^2 - z^2)$ per cui $\text{vol}(A) = 2\pi \int_0^R (R^2 - z^2)dz = (4/3)\pi R^3$.
Lunghezze. Sia A un arco di curva nel piano, definiamo lunghezza di A (denotata $l(A)$) l'estremo superiore dei perimetri delle spezzate inscritte nell'arco A. Consideriamo il caso che A sia il grafico di una $f \in C^1[a,b]$. Sia $\mathcal{P} = \{a = x_0, x_1, .., x_n = b\}$ una partizione di $[a,b]$, allora i punti di coordinate $(x_i, f(x_i))$ stanno sul grafico di f e per il perimetro p della spezzata che li unisce si ha $p = \sum_i \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2}$. Per il teorema di Lagrange si ha $(f(x_i) - f(x_{i-1})) = (x_i - x_{i-1})f'(c_i)$ dove $x_{i-1} < c_i < x_i$. Possiamo quindi scrivere $p = \sum_i (x_i - x_{i-1})\sqrt{1 + f'(c_i)^2}$. Vediamo che p è una somma integrale per la funzione $h(x) = \sqrt{1 + f'(x)^2}$, cioè $p = \sigma(\mathcal{P}, C, h)$: questo prova la formula

$$l(A) = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}dx\ .$$

9 Integrali impropri

9.1 Definizioni

Primo tipo. Consideriamo qui le funzioni che soddisfano a

$$(1) \qquad f:(a,b]\to R \ \ \forall\, \alpha\in(a,b]\ f\in\mathcal{R}[\alpha,b]\,.$$

Vogliamo estendere (in qualche caso) la definizione di integrale di Riemann su $[a,b]$ a questo tipo di funzioni. Sia $G(x)=\int_x^b f(t)dt$ ($G(x)$, a parte il segno, è la funzione integrale di f): consideriamo la possibile esistenza di $\lim_{x\to a^+} G(x)=A$. Se il limite esiste diremo che A è l'**integrale improprio** di f su $[a,b]$ e scriveremo (come prima) $A=\int_a^b f(t)dt$. Osseviamo subito che questa è effettivamente un'estensione coerente dell'integrale di Riemann, infatti se $f\in\mathcal{R}[a,b]$, poiché la funzione integrale di una funzione integrabile è continua, si ha che A coincide con l'usuale integrale (di Riemann) $\int_a^b f(t)dt$. Tuttavia l'integrale improprio può esistere anche se la funzione f non è limitata a destra di a, sia per esempio $(a,b]=(0,1]$, $f(x)=1/\sqrt{x}$, allora $G(x)=\int_x^1 1/\sqrt{t}dt=2(1-\sqrt{x})$. Il limite per x che tende a 0^+ esiste ed è uguale a 2. Quando il limite di $G(x)$ esiste in R diremo che l'integrale converge, quando il limite di $G(x)$ vale $+\infty$ oppure vale $-\infty$ diremo che l'integrale diverge (in entrambi i casi l'integrale è regolare). Se nell'intervallo dell'esempio di sopra si prende la funzione $1/x$ si ha il caso di un integrale divergente a $+\infty$. Se il limite di $G(x)$ non esiste diremo che l'integrale non è regolare (non esiste). In modo del tutto analogo si definisce $\int_a^b f(t)dt$ per una $f:[a,b)\to R$ tale che per ogni β con $a\le\beta<b$ sia $f\in\mathcal{R}[a,\beta]$.

Secondo tipo. Consideriamo qui le funzioni che soddisfano a

$$(2) \qquad f:[a,+\infty)\to R \ \ \forall\, k\ge a\ f\in\mathcal{R}[a,k]\,.$$

Vogliamo estendere (in qualche caso) la definizione di integrale di Riemann a questo tipo di funzioni. Sia $G(x)=\int_a^x f(t)dt$ ($G(x)$ è la funzione integrale di f): consideriamo la possibile esistenza di $\lim_{x\to+\infty} G(x)=A$. Se il limite esiste diremo che A è l'**integrale improprio** di f su $[a,+\infty)$ e scriveremo $A=\int_a^{+\infty} f(t)dt$. Quando il limite di $G(x)$ esiste in R diremo che l'integrale converge, quando il limite di $G(x)$ vale $+\infty$ oppure vale $-\infty$ diremo che l'integrale diverge (in entrambi i casi l'integrale è regolare). Se il limite di $G(x)$ non esiste diremo che l'integrale non è regolare (non esiste). In modo

del tutto analogo si definisce $\int_{-\infty}^{b} f(t)dt$ per una $f : (-\infty, b] \to R$ tale che per ogni h con $h \leq b$ sia $f \in \mathcal{R}[h, b]$.
Sia ora $f : (-\infty, \infty) \to R$ tale che per ogni h, k con $h < k$ sia $f \in \mathcal{R}[h, k]$, vogliamo definire (quando sarà possibile) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$. Sia c un numero reale qualsiasi, per definizione si pone $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = \int_{-\infty}^{c} f(t)dt + \int_{c}^{+\infty} f(t)dt$ e il primo integrale esiste se e solo se esistono entrambi gli integrali a secondo membro.
Consideriamo degli esempi:
i) Sia $p > 0$, si verifica facilmente che $\int_{1}^{+\infty} 1/x^p dx$ converge per $p > 1$ e diverge a $+\infty$ per $p \leq 1$
ii) Si vede facilmente che $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$ converge.

9.2 Criteri di convergenza

Sia $f : [a, +\infty) \to R$ e soddisfi l'ipotesi (2); sia $G(x) = \int_{a}^{x} f(t)dt$: per definizione $\int_{a}^{+\infty} f(t)dt$ esiste se e solo se esiste $\lim_{x \to +\infty} G(x)$ e questo limite esiste se e solo se

$$(*) \quad \forall \epsilon > 0 \;\; \exists H(\epsilon) \, : \, H(\epsilon) < u, v \;\Rightarrow\; |G(u) - G(v)| = |\int_{u}^{v} f(t)dt| < \epsilon$$

Un criterio del tutto analogo sussiste per l'esistenza degli altri tipi descritti di integrali impropri.
Criteri di confronto. Poiché si ha$| \int_{u}^{v} f(t)dt| \leq \int_{u}^{v} |f(t)|dt$, dalla $(*)$ deduciamo il seguente
Teorema. Siano f e g definite in $[a, +\infty)$ e sia g ivi integrabile in senso improprio, se si ha definitivamente $|f(x)| \leq g(x)$, allora anche f è integrabile in senso improprio in $[a, +\infty)$.
Sussiste un criterio di confronto del tutto analogo per l'esistenza degli altri tipi di integrali impropri.
Dal momento che si ha sempre $f(x) \leq |f(x)|$, da quanto visto segue
Teorema. Per gli integrali impropri vale la proprietà: $|f|$ integrabile $\Rightarrow$ f integrabile.
Mostreremo invece l'esistenza di una funzione f integrabile in senso improprio con $|f|$ non integrabile in senso improprio. Si osservi che per l'usuale integrale di Riemann la situazione è del tutto opposta !
Teorema. Le funzioni f e g definite in $[a, +\infty)$ soddisfino le ipotesi dichiarate

sopra e sia $f(x) \geq g(x) \geq 0$ definitivamente: se $\int_a^{+\infty} g(t)dt = +\infty$ allora anche $\int_a^{+\infty} f(t)dt = +\infty$.
Sussiste un criterio di confronto del tutto analogo per gli altri tipi di integrali impropri.
Esempi:
1) Dimostriamo che l'integrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ converge. In 0 non cè nessuna singolarità, basterà mostrare che converge $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$. Per la formula di integrazione per parti si può scrivere $\int_1^k \frac{\sin t}{t} dt = -\frac{\cos k}{k} + \cos 1 - \int_1^k \frac{\cos t}{t^2} dt$; per $k \to +\infty$ si ottiene $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \cos 1 - \int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2} dt$. L'ultimo integrale converge per il criterio del confronto: infatti $|\frac{\cos x}{x^2}| \leq \frac{1}{x^2}$ e l'integrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ come abbiamo visto converge.
2) Dimostriamo che l'integrale $\int_0^{+\infty} |\frac{\sin t}{t}| dt$ diverge. In 0 non cè nessuna singolarità, basterà mostrare che diverge $\int_1^{+\infty} |\frac{\sin t}{t}| dt$. Si ha la diseguaglianza $|\frac{\sin x}{x}| \geq \frac{(\sin x)^2}{x} = \frac{1-\cos 2x}{2x}$. Poiché l'integrale fra 1 e $+\infty$ di $1/2x$ diverge e quello di $\cos 2x/2x$ converge (si comporta come $\sin x/x$) ne segue la divergenza di $\int_1^{+\infty} |\frac{1-\cos 2t}{2t}| dt$ e per il criterio del confronto la divergenza di $\int_1^{+\infty} |\frac{\sin t}{t}| dt$.
Enunciamo ora i criteri di confronto più comunemente usati per provare convergenza o divergenza degli integrali impropri dei due tipi, basterà enunciare un caso per ogni tipo gli altri casi essendo analoghi.
i) Sia $f : (a, b] \to R$ e soddisfi l'ipotesi (1); se per un $0 < p < 1$ e una costante A in un intorno destro di a vale la diseguaglianza $|f(x)| \leq A(x-a)^p$, allora f è integrabile in senso improprio . Se per un $p \geq 1$ e una costante B in un intorno destro di a vale la diseguaglianza $f(x) \geq B(x-a)^p$, allora $\int_a^b f(t)dt = +\infty$.
ii) Sia $f : [a, +\infty) \to R$ e soddisfi l'ipotesi (2); se per un $p > 1$ e una costante A vale definitivamente la diseguaglianza $|f(x)| \leq Ax^p$, allora f è integrabile in senso improprio . Se per un $p \leq 1$ e una costante B vale definitivamente la diseguaglianza $f(x) \geq Bx^p$, allora $\int_a^{+\infty} f(t)dt = +\infty$.
Concludiamo questo capitolo con qualche osservazione. Sia f una funzione definita su un intervallo I (anche non limitato) con la possibile eccezione di un numero finito di punti dove in un intorno può risultare non limitata. Dividendo I in sottointervalli in modo opportuno, per la restrizione della f a ciascun sottointervallo ci si troverà in uno dei casi prima considerati. Si dirà che f è integrabile su I in senso improprio se **tutti** gli integrali estesi ai sottointervalli sono convergenti.

Consideriamo il caso di $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$. Abbiamo visto che per definizione questo integrale esiste se e solo se esistono $\int_{-\infty}^{c} f(t)dt$ e $\int_{c}^{+\infty} f(t)dt$ dove c è un numero qualsiasi; cioè se e solo se esistono

$$\lim_{x\to+\infty} \int_{-x}^{c} f(t)dt \, , \ \lim_{y\to+\infty} \int_{c}^{y} f(t)dt$$

Può capitare che esista il $\lim\limits_{k\to+\infty} \int_{-k}^{k} f(t)dt$ senza che esista $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$, come esempio si prenda la funzione $f(x) = \mathrm{sgn}(x)$: per questa si ha

$$\int_{-\infty}^{c} f(t)dt = -\infty \ , \ \int_{c}^{+\infty} f(t)dt = +\infty \ , \ \lim_{k\to+\infty} \int_{-k}^{k} f(t)dt = 0$$

Il $\lim\limits_{k\to+\infty} \int_{-k}^{k} f(t)dt$ quando esiste viene chiamato **valore principale di Cauchy**.
Sia $f(x) \geq 0$ in $[a, +\infty)$ e sia convergente $\int_{a}^{+\infty} f(t)dt$: si potrebbe credere che necessariamente $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$, questo però è in generale falso. Il risultato è vero se si aggiunge l'ipotesi che f sia definitivamente monotona: sia infatti $k = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ (il limite k esiste per la monotonia di f ed è $k \geq 0$); se fosse $k > 0$ sarebbe definitivamente $f(x) \geq k/2$ e quindi l'integrale divergerebbe.

Analisi Matematica

a.a. 2009-2010 cdl EDL (Ingegneria Edile) prof. C. Franchetti

Parte Seconda

N.B. I capitoli **11**, **12**, **13**, **14** che seguono sono riprodotti (con poche modifiche o aggiunte) dalle lezioni della prof.ssa M.P. Pera, a.a. 2007-2008.

Paragrafi stampati in piccolo come questo sono da considerarsi complementari e non indispensabili

10 Serie numeriche

10.1 Generalità

Sia $\{a_n\}$ una successione di numeri reali, a questa successione associamo un'altra successione $\{s_n\}$ così definita: $s_1 = a_1$, $s_{k+1} = s_k + a_{k+1}$ cioè $s_n = a_1 + a_2 + .. + a_n$. La successione $\{s_n\}$ si chiama successione delle **somme parziali** o delle **ridotte** della successione $\{a_n\}$. L'espressione formale di somma di una successione infinita di addendi $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + .. + a_n + ...$ si chiama **serie**; si dice che a_n è il termine generale della serie. **Carattere** della serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ è il carattere della successione $\{s_n\}$: pertanto se la successione $\{s_n\}$ è convergente (divergente (a $+\infty$ o a $-\infty$)) si dirà che la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ è convergente (divergente). In ogni altro caso si dirà che la serie è non regolare. Se poi $\lim_{n\to\infty} s_n = s$ si dirà che la serie ha per somma s e si scriverà $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = s$: la somma di una serie è il limite delle sue somme parziali.
Quelli che seguono sono esempi di serie importanti
i) **Serie geometrica**. Sia $q \in R$ e consideriamo la serie, detta geometrica, $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$, per questa serie si ha: se $q = 1, s_n = n$ altrimenti $s_n = 1 + q + q^2 + .. + q^{n-1} = \frac{1-q^n}{1-q} = \frac{1}{1-q} - \frac{1}{1-q}q^n$ pertanto $|q| < 1 \Rightarrow s_n \to \frac{1}{1-q}$, $q \geq 1 \Rightarrow s_n \to +\infty$ e in ogni altro caso la successione delle somme

parziali è non regolare. In conclusione la serie geometrica converge se e solo se $|q| < 1$ e si ha in tal caso $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$

ii) **Serie esponenziale**. Sia $x \in R$ e consideriamo la serie, detta esponenziale, $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$, per questa serie si ha $s_{n+1} = 1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3!}+..+\frac{x^n}{n!}$ che coincide col polinomio di Taylor $P_n^f(x)$ intorno all'origine di ordine n della funzione $f(x) = \mathrm{e}^x$. Usando per l'errore nella formula di Taylor la forma di Lagrange è facile dimostrare che per ogni x $P_n^f(x)) = s_{n+1}$ converge a $f(x) = \mathrm{e}^x$. In conclusione la serie esponenziale converge per ogni x, cioè $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = \mathrm{e}^x$.

iii) **Serie armonica**. Consideriamo la serie, detta armonica, $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} 1/k$, per questa serie si ha $s_n = 1 + 1/2 + .. + 1/n$. Poiché sappiamo (vedi pag. 41) che $s_n > \log n$, ne segue che la serie armonica diverge: $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} 1/k = +\infty$.

E' facile trovare una condizione necessaria per la convergenza di una serie: supponiamo che $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k = s$, poiché $a_n = (s_n - s_{n-1})$ da $s_n \to s$ segue $a_n \to 0$. Vale quindi il

Teorema. Se una serie converge il suo termine generale tende a 0.

L'esempio iii) mostra che questa condizione in generale non è sufficiente per la convergenza di una serie

10.2 Serie a termini positivi

Si dice che una serie $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ è a termini positivi se il termine generale a_n è (definitivamente) positivo. Tali serie godono di proprietà speciali per cui si studiano più facilmente. (Una teoria del tutto identica si può fare per le serie a termini negativi). Sia dunque $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ una serie a termini positivi, come è evidente la successione $\{s_n\}$ delle sue somme parziali è crescente e perciò regolare, risulterà convergente se superiormente limitata. Dunque vale il

Teorema. Una serie a termini positivi è sempre regolare: o converge o diverge a $+\infty$. E' convergente se e solo se le sue somme parziali sono (supe-

riormente) limitate.
Date due serie a termini positivi $\sum a_k$, $\sum b_k$ si dice che la serie $\sum b_k$ è una **maggiorante** della serie $\sum a_k$ (ovvero che la serie $\sum a_k$ è una **minorante** della serie $\sum b_k$) se (definitivamente) $a_n \leq b_n$.
Teorema(Criterio del confronto). Serie minoranti di serie convergenti sono convergenti; serie maggioranti di serie divergenti sono divergenti (N.B. riguarda solo serie a termini positivi!).
Dimostrazione. Sia $\sum a_k$ una minorante di $\sum b_k$, dette s_n e t_n le somme parziali di, rispettivamente, $\sum a_k$ e $\sum b_k$, poiché $a_k \leq b_k$ si ha la diseguaglianza $s_n \leq t_n$. Se la maggiorante converge le somme t_n sono limitate e quindi anche le somme s_n lo sono e quindi la serie $\sum a_k$ converge. Se la minorante diverge le somme s_n non sono limitate e quindi non sono limitate nemmeno le somme t_n e quindi la serie $\sum b_k$ diverge. (**c.d.d.**)
Risulta molto utile il seguente
Criterio del confronto asintotico. Date due serie (a termini positivi) $\sum a_k$, $\sum b_k$, supponiamo che esista $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n}$. Se tale limite è un numero reale maggiore di 0 allora le due serie hanno lo stesso carattere.
Dimostrazione. Sia c tale limite allora valgono definitivamente le seguenti disuguaglianze $c/2 < a_n/b_n < 3c/2$ e quindi $(c/2)b_n < a_n < (3c/2)b_n$: la serie $\sum a_k$ è maggiorante della serie $\sum (c/2)b_k$ ed è minorante della serie $\sum (3c/2)b_k$ (N.B. qualunque sia $A > 0$ le serie $\sum Ab_k$ e $\sum b_k$ hanno lo stesso carattere), analogo risultato si prova per la serie $\sum b_k$. La tesi segue dal criterio del confronto. (**c.d.d.**)
Si osservi che se il limite di a_n/b_n è 0 si può dire solo che la serie $\sum a_k$ è minorante della serie $\sum b_k$; se il limite di a_n/b_n è $+\infty$ si può dire solo che la serie $\sum a_k$ è maggiorante della serie $\sum b_k$.
Vogliamo ora dare dei criteri intrinseci di convergenza (o divergenza) per una serie a termini positivi, criteri cioè che dipendano solo dal termine generale della serie in questione.
Criterio del rapporto. Data la serie $\sum a_k$ se (definitivamente) $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q < 1$ la serie converge; se (definitivamente) $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$ la serie diverge.
Dimostrazione. Dalla diseguaglianza $a_{n+1} \leq qa_n$ segue facilmente che $a_{n+1} \leq a_1 q^n$ e quindi la serie converge perché minorante di una serie geometrica convergente. Nel secondo caso la serie diverge perché il termine generale non tende a zero. (**c.d.d.**)
Da questo criterio non è difficile dedurre come corollario il

Criterio del rapporto asintotico. Data la serie $\sum a_k$ supponiamo che esista $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$. Se tale limite è minore di 1 la serie converge, se è maggiore di 1 la serie diverge (se è uguale a 1 non si può decidere).
Criterio della radice. Data la serie $\sum a_k$ se (definitivamente) $\sqrt[n]{a_n} \le q < 1$ la serie converge; se (definitivamente) $\sqrt[n]{a_n} \ge 1$ la serie diverge.
Dimostrazione. Elevando alla potenza n-ma si ottiene $a_n \le q^n$ e quindi la serie converge perché minorante di una serie geometrica convergente. Nel secondo caso la serie diverge perché il termine generale non tende a zero. (**c.d.d.**)
Da questo criterio non è difficile dedurre come corollario il
Criterio asintotico della radice. Data la serie $\sum a_k$ supponiamo che esista $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$. Se tale limite è minore di 1 la serie converge, se è maggiore di 1 la serie diverge (se è uguale a 1 non si può decidere).
Il criterio seguente utilizza risultati ottenuti per integrali impropri.
Criterio integrale. Data la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, supponiamo che il termine generale a_n sia decrescente; sia poi la funzione $f : [1, +\infty)$ una estensione decrescente della successione (cioè f decresce e $f(k) = a_k$ per ogni k) allora la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ e l'integrale $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ hanno lo stesso carattere.
Dimostrazione. Poiché la funzione f è decrescente, se $\mathcal{P}_n$ è la partizione $\{1, 2, .., n\}$ dell'intervallo $[1, n]$ si ha

$$s(\mathcal{P}_n, f) = \sum_{k=2}^{n} f(k) = \sum_{k=2}^{n} a_k \le \int_1^n f(x)dx \le \sum_{k=1}^{n-1} a_k = \sum_{k=1}^{n-1} f(k) = S(\mathcal{P}_n, f)$$

e quindi, se s_n indica la somma parziale n-ma della serie $\sum a_k$, si ha

$$s_n - a_1 \le \int_1^n f(x)dx \le s_n - a_n\,.$$

La tesi segue da queste ultime diseguaglianze. (**c.d.d.**)
Con un calcolo diretto di primitive si vede che gli integrali

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^a}\,dx \quad , \quad \int_2^{+\infty} \frac{1}{x(\log x)^a}$$

convergono per $a > 1$ e divergono per $a \leq 1$. Pertanto dal criterio integrale si deduce che le serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^a} \quad , \quad \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(\log k)^a}$$

convergono per $a > 1$ e divergono per $a \leq 1$. Si noti che per queste serie i criteri del rapporto e della radice sono inefficaci.

10.3 Serie a termini qualsiasi

Per trovare un criterio di convergenza per ogni serie basterà applicare il criterio di Cauchy alla successione delle somme parziali. Sia $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ una serie, la successione delle sue somme parziali $\{s_n\}$ risulterà convergente se e solo se

$$\forall \epsilon > 0 \;\; \exists \nu(\epsilon) : \; n > \nu(\epsilon), \, p \in N \;\Rightarrow\; |s_{n+p} - s_n| < \epsilon$$

Posto $R_{n,p} = (s_{n+p} - s_n) = (a_{n+1} + a_{n+2} + .. + a_{n+p})$, possiamo enunciare il

Teorema. La serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge se e solo se

$$\forall \epsilon > 0 \;\; \exists \nu(\epsilon) : \; n > \nu(\epsilon), \, p \in N \;\Rightarrow\; |R_{n,p}| < \epsilon$$

Per esercizio usiamo questo criterio per ritrovare la divergenza della serie armonica. Per questa serie si ha

$$R_{n,n} = 1/(n{+}1){+}1/(n{+}2){+}..{+}1/(2n) > 1/(2n){+}1/(2n){+}..{+}1/(2n) = n/(2n) = 1/2$$

se si sceglie $\epsilon < 1/2$ non può esistere alcun $\nu(\epsilon)$ che soddisfi le condizioni del criterio: dunque la serie diverge.
Un ruolo particolare hanno le **serie a segni alternati**. Sia $a_n > 0$, si dice che la serie $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}a_k = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + ...$ è a segni alternati. Un semplice criterio di convergenza vale per queste serie:
Criterio di Leibnitz. Se la successione positiva $\{a_n\}$ decresce e converge a 0, allora la serie $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}a_k$ converge. Inoltre se s è la sua somma e se s_n sono le sue somme parziali si ha $|s - s_n| < a_{n+1}$ e l'approssimazione (di s_n a s) è per difetto se n è pari ed è per eccesso se n è dispari.

Dimostrazione. Si ha $s_{2n+1} - s_{2n-1} = (a_{2n+1} - a_{2n}) < 0, s_{2n+2} - s_{2n} = (-a_{2n+2} + a_{2n+1}) > 0$ per cui le somme di indice dispari decrescono e quelle di indice pari crescono. Inoltre $s_{2n+1} - s_{2n} = a_{2n+1} > 0$ per cui $s_{2n+1} > s_{2n}$ e da qui si vede che ogni somma di indice dispari è maggiore di ogni somma di indice pari, per cui le somme di indice dispari sono limitate inferiormente e quelle di indice pari sono limitate superiormente e siccome $a_{2n+1} \to 0$ entrambe sono convergenti allo stesso limite. La seconda asserzione del teorema segue dalle considerazioni di sopra. (**c.d.d.**)

10.4 Assoluta convergenza

Definizione: si dice che una serie $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ è **assolutamente convergente** se è convergente la serie $\sum_{k=1}^{\infty} |b_k|$.

Teorema. La assoluta convergenza implica la convergenza. Esistono serie convergenti che non sono assolutamente convergenti.

Dimostrazione. La serie $\sum_{k=1}^{\infty} |b_k|$ sia convergente. Qualunque siano n e p si ha $|b_{n+1} + b_{n+2} + .. + b_{n+p}| \leq (|b_{n+1}| + |b_{n+2}| + .. + |b_{n+p}|)$. Per ipotesi fissato $\epsilon > 0$ esiste $\nu(\epsilon)$ tale che per $n > \nu(\epsilon)$ e p qualsiasi il secondo membro della diseguaglianza di sopra si può rendere minore di ϵ, sarà quindi minore di ϵ anche il primo membro e quindi la serie $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ converge. La seconda asserzione si prova col seguente esempio: sia $b_k = (-1)^{k+1} 1/k$, la serie $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ converge (a $\log 2$) per il criterio di Leibnitz, ma la serie $\sum_{k=1}^{\infty} |b_k|$, che è la serie armonica, diverge. (**c.d.d.**)

Si osservi che, data una serie qualsiasi $\sum a_k$, siccome la serie $\sum |a_k|$ è a termini positivi ad essa si possono applicare tutti i criteri di convergenza per le serie a termini positivi che risultano quindi essere dei criteri di assoluta convergenza e quindi di convergenza per la serie originale $\sum a_k$. Naturalmente l'esempio di sopra prova che tali criteri saranno inefficaci per serie convergenti ma non assolutamente convergenti. Queste ultime serie hanno delle proprietà di instabilità sorprendenti.

Definizione: data una serie $\sum a_k$, si dice che una serie $\sum b_k$ è un suo **riordinamento** se esiste una biiezione $\pi : N \to N$ tale che $b_k = a_{\pi(k)}$; in tal caso anche $\sum a_k$ è un riordinamento di $\sum b_k$ essendo $a_k = b_{\pi^{-1}(k)}$. Un riordinamento si ottiene "rimescolando" gli addendi di una serie, lo scopo è di vedere in quale misura si possa estendere alle serie ("somme di infiniti addendi") la proprietà commutativa della somma ordinaria (di un numero finito di addendi).
Diremo che per una serie che ha somma s ($+\infty$, oppure $-\infty$) vale la proprietà **commutativa** se ogni suo riordinamento ha somma s ($+\infty$, oppure $-\infty$).
Si hanno i seguenti risultati che enunciamo senza dimostrazione.
Teorema. Le serie regolari godono della proprietà commutativa se e solo se sono assolutamente convergenti.
(Quindi in particolare le serie a termini positivi godono della proprietà commutativa).
Teorema. La serie $\sum a_k$ sia convergente ma non assolutamente convergente. Allora per ogni fissato numero reale γ esiste un riordinamento della serie che ha per somma γ, esistono anche riordinamenti della serie divergenti a $+\infty$ oppure a $-\infty$ e anche riordinamenti che producono serie non regolari.

11 Serie di funzioni

11.1 Generalità

Una serie del tipo

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = f_0(x) + f_1(x) + .. + f_n(x) + ..$$

dove le f_n sono funzioni reali di variabile reale, è detta **serie di funzioni** (reali di variabile reale). Si dice che la serie è definita in un insieme $X \subset R$ se il domino di tutte le funzioni contiene X (ossia, se sono tutte definite per ogni $x \in X$). Ovviamente, ogni volta che si fissa $x \in X$, si ottiene una serie numerica che può essere convergente oppure no, a seconda che la successione $\{s_n(x)\}$ delle somme parziali n-esime (dove $s_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x)$) sia convergente o no. L'insieme dei numeri $x \in X$ per cui la serie converge si chiama **insieme di convergenza**. Ad esempio, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ è definita su tutto R e il suo insieme di convergenza è l'intervallo $(-1, 1)$, visto che si tratta di una serie geometrica di ragione $x \in R$.

In analogia con le serie numeriche, se $\sum_{n=0}^{\infty} |f_n(x)|$ converge in un punto x, diremo che la serie di funzioni $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ **converge assolutamente** in x. Dal criterio di convergenza assoluta delle serie numeriche si ottiene subito che la convergenza assoluta di una serie di funzioni implica la sua convergenza.

Se una serie di funzioni $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ converge in un insieme $A \subset R$, allora per ogni $x \in A$ si ottiene un numero $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$. Risulta così definita una funzione reale di variabile reale $f : A \to R$. È naturale domandarsi se una tale funzione sia continua quando sono continue tutte le f_n. In altre parole: è ancora vero che la somma di funzioni continue è una funzione continua nel caso di infiniti addendi? La risposta è negativa. L'esempio seguente illustra questo fatto.
Esempio. Consideriamo, nell'intervallo $[0, 1]$, la serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1-x)x^n \,.$$

Per $x \in [0, 1)$ la serie è geometrica di ragione x e primo termine $(1 - x)x$; pertanto converge e la sua somma è data da $\frac{(1-x)x}{1-x} = x$. Per $x = 1$ tutte le funzioni $f_n(x) = (1 - x)x^n$ sono nulle e, di conseguenza, la serie converge anche in tale punto ed ha somma zero. Si può concludere che la serie converge in tutto l'intervallo chiuso $[0, 1]$ e la sua somma è

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } \ x \in [0, 1) \\ 0 & \text{se } \ x = 1 \end{cases}$$

che è una funzione discontinua, sebbene tutte le f_n siano continue (sono addirittura C^∞).

È utile perciò introdurre un altro tipo di convergenza, la convergenza totale, che implica la convergenza assoluta e garantisce, tra l'altro, la continuità della funzione somma.

Definizione. Si dice che la serie di funzioni $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ **converge totalmente** in un insieme $A \subset R$ se esiste una serie numerica convergente $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ tale che $|f_n(x)| \leq c_n$, $\forall n$ e $\forall x \in A$. Notiamo che se una serie di funzioni $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ converge totalmente in un insieme A, allora (come conseguenza dei criteri di convergenza assoluta e del confronto) converge (assolutamente) per ogni $x \in A$. Risulta quindi ben definita la funzione somma

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \,.$$

Osserviamo inoltre che la più piccola serie numerica che domina $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ è quella il cui termine generale λ_n è dato da

$$\lambda_n = \sup\{|f_n(x)| : x \in A\}.$$

Pertanto, se tale serie numerica converge, allora la serie di funzioni converge totalmente. In caso contrario, ossia se $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n = +\infty$, per il criterio del confronto nessuna serie numerica che domina la serie di funzioni può convergere. Possiamo quindi enunciare il seguente

Teorema. Condizione necessaria e sufficiente affinché una serie di funzioni $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ converga totalmente in un insieme A è che sia convergente la serie numerica $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n$, dove $\lambda_n = \sup\{|f_n(x)| : x \in A\}$.

Esempio. Consideriamo la serie di funzioni

$$\sum_{n=2}^{\infty} n \log\left(1 + \frac{|x|^n}{n(n-1)^2}\right).$$

Osserviamo che il termine generale $f_n(x) = n \log\left(1 + \frac{|x|^n}{n(n-1)^2}\right)$ tende a zero se e solo se $|x| \leq 1$; perciò la serie può convergere in x se e solo se $x \in [-1, 1]$.

Fissato $x \in [-1,1]$, si ha

$$|f_n(x)| = n\log\left(1+\frac{|x|^n}{n(n-1)^2}\right) \le n\log\left(1+\frac{1}{n(n-1)^2}\right) < \frac{1}{(n-1)^2}\,,$$

da cui, essendo la serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n-1)^2}$ convergente, dal criterio del confronto si deduce che la serie data è assolutamente convergente in x. D'altra parte, posto $c_n = \frac{1}{(n-1)^2}$, dal fatto che $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} c_n$ è una serie numerica maggiorante e convergente, si deduce anche che la serie data converge totalmente nell'intervallo $[-1,1]$.
Consideriamo invece la serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} n\log\left(1+\frac{|x|^n}{n(n-1)}\right).$$

Anche in questo caso il termine generale tende a zero se e solo se $|x| \le 1$. Però la serie converge puntualmente solo per $x \in (-1,1)$, in quanto per $x=-1$ e $x=1$ si ha $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} n\log\left(1+\frac{1}{n(n-1)}\right)$ che diverge avendo lo stesso carattere della serie armonica $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$. Inoltre, essendo

$$\sup_{x\in(-1,1)} n\log\left(1+\frac{|x|^n}{n(n-1)}\right) = n\log\left(1+\frac{1}{n(n-1)}\right)\,,$$

la serie non converge totalmente in $(-1,1)$. Considerando invece un intervallo della forma $[-r,r]$ con $r<1$, si ha

$$\sup_{x\in[-r,r]} n\log\left(1+\frac{|x|^n}{n(n-1)}\right) = n\log\left(1+\frac{r^n}{n(n-1)}\right) = \lambda_n\,,$$

ed essendo $\sum_n \lambda_n$ convergente si può concludere che la serie data converge totalmente in $[-r,r]$.

Teorema. Sia $\displaystyle\sum_{n=n_0}^{\infty} f_n(x)$ una serie di funzioni continue convergente totalmente in un insieme A e sia $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ la somma della serie. Allora,

i)(continuità) la funzione f risulta continua in A;
ii) (integrazione termine a termine) per ogni intervallo $[a,b] \subset A$ si ha $\sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)\,dx$;
iii)(derivazione termine a termine) se inoltre le funzioni f_n sono di classe C^1 in A e se la serie delle derivate converge totalmente in A, allora f risulta di classe C^1 in A e si ha $f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f'_n(x)$.

11.2 Serie di potenze

Un esempio importante di serie di funzioni è costituito dalle **serie di potenze.** Una serie di funzioni del tipo

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n\,,$$

dove x_0 e gli a_n sono numeri reali assegnati, si dice una **serie di potenze** in campo reale. Il punto x_0 si chiama **centro della serie**.
Una serie di potenze converge ovviamente in $x = x_0$ (e la sua somma in tal caso vale a_0). Dal teorema che segue si deduce che l'insieme di convergenza di una serie di potenze è un intervallo (eventualmente ridotto al punto $x = x_0$).
Teorema Supponiamo che la serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ converga in un punto $\bar{x} \neq x_0$. Allora la serie converge assolutamente in ogni x tale che $|x-x_0| < |\bar{x}-x_0|$. Inoltre converge totalmente in ogni intervallo del tipo $[x_0-r, x_0+r]$ con $0 < r < |\bar{x}-x_0|$.
Dimostrazione Poiché la serie converge puntualmente in $\bar{x}$, il termine n-mo tende a 0 per $n \to \infty$. Di conseguenza, definitivamente si ha che $|a_n(\bar{x}-x_0)^n| \leq 1$. Preso x tale che $|x-x_0| < |\bar{x}-x_0|$ risulta

$$|a_n(x-x_0)^n| = |a_n(\bar{x}-x_0)^n| \left(\frac{|x-x_0|}{|\bar{x}-x_0|}\right)^n \leq \left(\frac{|x-x_0|}{|\bar{x}-x_0|}\right)^n .$$

Per come è stato scelto x, la serie geometrica $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{|x-x_0|}{|\bar{x}-x_0|}\right)^n$ ha ragione minore di 1 e quindi converge. Perciò, per il criterio del confronto,

$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n(x-x_0)|^n$ converge, cioè $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ converge assolutamente in x.
Sia ora r tale che $0 < r < |\bar{x} - x_0|$. Si ha

$$|a_n(x-x_0)^n| \leq \left(\frac{r}{|\bar{x} - x_0|} \right)^n .$$

Perciò $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$, essendo dominata da una serie numerica convergente, risulta totalmente convergente in $[x_0 - r, x_0 + r]$. **c.v.d.**

Dal teorema precedente si ottiene il seguente
Teorema Sia data la serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n.$$

Allora, o la serie converge solo in $x = x_0$, oppure esiste $R > 0$ (eventualmente anche infinito) tale che la serie converge assolutamente se $|x - x_0| < R$ e non converge se $|x - x_0| > R$. Inoltre la serie converge totalmente in ogni intervallo $[x_0 - r, x_0 + r]$, con $0 < r < R$.
Dal risultato precedente si deduce perciò che l'insieme di convergenza di una serie di potenze centrata in x_0 è un intervallo (aperto, chiuso o semiaperto) e che x_0 è equidistante dagli estremi (finiti o infiniti che siano). Osserviamo che non si può dire nulla a priori del comportamento della serie nei punti $x_0 - R$ e $x_0 + R$.
Ad esempio: la serie $\sum_n \frac{x^n}{n}$ ha raggio di convergenza 1 e converge (non assolutamente) in $x = -1$ mentre non converge in $x = 1$; la serie $\sum_n \frac{x^n}{n^2}$ ha raggio di convergenza 1 e converge assolutamente sia in $x = 1$ che in $x = -1$; la serie $\sum_n nx^n$ ha raggio di convergenza 1 e non converge negli estremi dell'intervallo $(-1, 1)$ (il termine generale non tende a zero).
Definizione La semiampiezza R dell'intervallo di convergenza di una serie di potenze si chiama **raggio di convergenza** della serie.
Per calcolare il raggio di convergenza, fissato $x \in R$, si può ricorrere agli usuali criteri per le serie a termini positivi applicandoli alla serie
$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n||x - x_0|^n$, pensata come una serie numerica dipendente dal parametro

x. Ad esempio, dal criterio della radice si ottiene il seguente

Teorema. Sia data una serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ e supponiamo che esista $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$. Allora si ha

$$R = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

convenendo che $R = 0$ se $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = +\infty$; $R = +\infty$ se $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$.

Esempi :

$$\text{per la serie } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n} \quad \text{si ha } R = 1$$

$$\text{per la serie } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \text{si ha } R = +\infty$$

$$\text{per la serie } \sum_{n=0}^{\infty} n!x^n \quad \text{si ha } R = 0$$

Sia data una serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ e supponiamo che abbia raggio di convergenza $R > 0$. Allora è ben definita, nell'intervallo $(x_0 - R, x_0 + R)$, la somma della serie, cioè una funzione f tale che

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n, \quad x \in (x_0 - R, x_0 + R)\,.$$

Teorema La funzione f definita dalla serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ è continua in ogni punto dell'intervallo $(x_0 - R, x_0 + R)$.

Dimostrazione Sia $\bar{x}$ un qualunque punto dell'intervallo $(x_0 - R, x_0 + R)$. Esiste un numero r, con $0 < r < R$, tale che l'intervallo (x_0-r, x_0+r) contiene $\bar{x}$. Di conseguenza, poiché la serie è totalmente convergente in (x_0-r, x_0+r), la funzione somma f è ivi continua. Questo implica, in particolare, che f è continua anche nel punto $\bar{x}$. **c.v.d.**

Vediamo altre proprietà delle serie di potenze.

Lemma (di invarianza del dominio di convergenza). Supponiamo che la serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$$

abbia raggio di convergenza $R > 0$. Allora le due serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-x_0)^{n-1} \quad , \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(x-x_0)^{n+1}$$

hanno raggio di convergenza R.
Il lemma precedente serve per provare che le serie di potenze sono "derivabili termine a termine" e "integrabili termine a termine"; si ha cioè il seguente
Teorema Sia f la funzione definita dalla serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n, \quad x \in (x_0-R, x_0+R)$$

Allora f è derivabile in (x_0-R, x_0+R) e si ha

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-x_0)^{n-1}\,.$$

Inoltre, per ogni $x \in (x_0-R, x_0+R)$ si ha

$$\int_{x_0}^{x} f(t)dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(x-x_0)^{n+1}\,.$$

Dimostrazione Fissato un qualunque punto x appartenente all'intervallo di convergenza (x_0-R, x_0+R) della prima serie, esiste un intervallo $(x_0-\rho, x_0+\rho)$, con $0 < \rho < r$, contenente x. Per il lemma precedente, R è anche il raggio di convergenza della serie delle derivate, e quindi, in base al teorema della convergenza totale per le serie di potenze, entrambe le serie convergono totalmente in $(x_0-\rho, x_0+\rho)$. Dal teorema di derivabilità delle serie di funzioni segue che f è derivabile in x e risulta

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-x_0)^{n-1}\,.$$

Inoltre, dal teorema di passaggio al limite sotto il segno di integrale, si ha

$$\int_{x_0}^{x} f(t)dt = \int_{x_0}^{x} \sum_{n=0}^{\infty} a_n(t-x_0)^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{x_0}^{x} a_n(t-x_0)^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(x-x_0)^{n+1}$$

c.v.d.
Osservazione Poiché la derivata di una serie di potenze è ancora una serie di potenze, dal teorema precedente segue che le funzioni definite tramite serie di potenze sono di classe C^∞.

Sia dunque

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots + a_n(x - x_0)^n + \cdots$$

una funzione definita mediante una serie di potenze. Ponendo $x = x_0$, si ottiene $a_0 = f(x_0)$. Derivando e ponendo di nuovo $x = x_0$, si ha $a_1 = f'(x_0)$. Analogamente, mediante derivate successive (vedi l'osservazione precedente), si ottiene

$$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} .$$

Pertanto, risulta necessariamente

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n ,$$

dove $f^{(0)}(x_0)$ denota $f(x_0)$.

11.3 Serie di Taylor

Osserviamo che, data una funzione di classe C^∞ in un intorno di x_0, si può considerare la serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n .$$

Tale serie di potenze è detta **serie di Taylor di f di centro** x_0 (o di **MacLaurin**, quando $x_0 = 0$). Ci chiediamo: i) se esista un intorno di x_0 nel quale questa serie sia convergente; ii) supposto che esista un tale intorno, se in esso la somma della serie sia proprio $f(x)$.

Definizione Una funzione f si dice **sviluppabile in serie di Taylor in un intorno di un punto** x_0 (o **analitica in** x_0) se esiste un intorno di x_0 in cui vale l'uguaglianza

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n .$$

Si dice che f è **analitica** se ogni punto del suo dominio ammette un intorno in cui f è sviluppabile in serie di Taylor (ossia, se è analitica in ogni punto del suo dominio).

Osservazione Esistono funzioni di classe C^∞ ma non analitiche. Una di queste è

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{se } \ x \neq 0 \\ 0 & \text{se } \ x = 0, \end{cases}$$

le cui derivate successive (come si potrebbe provare usando un corollario del teorema di Lagrange) risultano tutte continue e nulle nel punto $x_0 = 0$. Quindi, se f fosse analitica, in un intorno del punto $x_0 = 0$ dovrebbe valere l'uguaglianza

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

e ciò è impossibile perché $f(x) \neq 0$ per $x \neq 0$, mentre la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ ha per somma zero (essendo nulli tutti i suoi termini).

Si ha la seguente condizione necessaria e sufficiente perché una funzione sia sviluppabile in serie di Taylor.

Teorema Una funzione f di classe C^∞ in x_0 è sviluppabile in serie di Taylor in un intorno $(x_0 - R, x_0 + R)$ di x_0 se e solo se, per ogni $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$, risulta $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$, dove

$$R_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

denota il resto n-esimo della formula di Taylor.

Esempio La funzione $f(x) = e^x$ è sviluppabile in serie di MacLaurin e tale serie ha raggio di convergenza $R = +\infty$. Fissiamo un punto $x \in R$. Sappiamo che se e^x è effettivamente sviluppabile in serie di MacLaurin, allora si deve necessariamente avere

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\, x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\,.$$

Per il teorema precedente, ciò equivale ad affermare che

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = \lim_{n\to\infty} (e^x - P_n(x)) = 0\,,$$

dove la somma parziale n-esima

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$$

non è altro che il polinomio di MacLaurin di e^x di ordine n. Scrivendo il resto $R_n(x)$ nella forma di Lagrange, si potrebbe facilmente far vedere che in effetti esso tende a 0 per $n \to +\infty$. Per l'arbitrarietà del punto x, possiamo concludere che lo sviluppo è valido in tutto R.

Ponendo $x = 1$ nello sviluppo in serie di MacLaurin di e^x si ottiene il numero e espresso mediante una serie numerica:

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\,.$$

Mostriamo ora che la funzione e^x è analitica. A tale scopo fissiamo $x_0 \in R$ e poniamo, per comodità, $x = x_0 + h$. Si ha

$$e^x = e^{x_0+h} = e^{x_0}e^h = e^{x_0}(1 + h + \frac{h^2}{2!} + \cdots + \frac{h^n}{n!} + \cdots) =$$

$$e^{x_0} + e^{x_0}h + e^{x_0}\frac{h^2}{2!} + \cdots + e^{x_0}\frac{h^n}{n!} + \cdots$$

Quindi

$$e^x = e^{x_0} + e^{x_0}(x - x_0) + e^{x_0}\frac{(x - x_0)^2}{2!} + \cdots + e^{x_0}\frac{(x - x_0)^n}{n!} + \cdots$$

In maniera analoga si può provare che le funzioni $\cos x$ e $\sin x$ sono sviluppabili in serie di MacLaurin in tutto R.

Il metodo usato per sviluppare in serie di MacLaurin le funzioni e^x, $\sin x$ e $\cos x$ (basato su una stima del resto della formula di Taylor) non è adatto per la funzione $f(x) = \log(1 + x)$. In questo caso conviene procedere diversamente:
i) si determina prima lo sviluppo della derivata $f'(x)$ di $f(x)$;
ii) successivamente, mediante il teorema di integrazione termine a termine delle serie di potenze, si trova una primitiva dello sviluppo di $f'(x)$;
iii) infine, tra tutte le primitive di $f'(x)$ espresse in serie di potenze, si sceglie quella che coincide con $f(x)$.
Tale metodo è adatto anche per determinare lo sviluppo di $\arctan x$ e, in generale, di tutte le funzioni di cui è facile sviluppare la derivata. A tale proposito ricordiamo che due primitive di una stessa funzione (definita in un intervallo) differiscono per una costante e, di conseguenza, se coincidono in un punto, coincidono in tutto l'intervallo di definizione.
Cominciamo col determinare, col metodo appena esposto, lo sviluppo di MacLaurin di $\log(1+x)$. La derivata $(1+x)^{-1}$ di $\log(1+x)$ rappresenta, per $x \in (-1, 1)$, la somma di una serie geometrica di ragione $-x$ e primo termine 1. Quindi, per $x \in (-1, 1)$, si ha

$$(1 + x)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + \cdots$$

Dal teorema di derivazione delle serie di potenze si deduce che

$$g(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \cdots$$

è una primitiva di $(1+x)^{-1}$; ma, è bene precisare, soltanto per x appartenente al comune dominio di convergenza $(-1, 1)$ delle due serie. Dunque, $\log(1+x)$ e $g(x)$ hanno la stessa derivata per $x \in (-1, 1)$. Poiché coincidono per $x = 0$, si può concludere che

$$\log(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \cdots \quad \forall x \in (-1, 1)\,.$$

In maniera analoga si determina lo sviluppo della funzione $\arctan x$ che risulta definito nell'intervallo (-1, 1). Dato $\alpha \in R$, consideriamo la funzione $f(x) =$

$(1 + x)^\alpha$ che è senz'altro definita e C^∞ nell'intervallo $(-1, +\infty)$. Si ha

$$f^{(n)}(0) = \alpha(\alpha - 1) \cdots (\alpha - n + 1)\,,$$

per cui la serie di MacLaurin di f è

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n ,$$

ove ricordiamo che $\binom{\alpha}{n}$ è il **coefficiente binomiale**

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}, \qquad \binom{\alpha}{0} = 1 .$$

Si può provare che per $|x| < 1$ e qualunque sia α si ha

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n .$$

Questa serie di potenze è detta **serie binomiale**. Se α è un numero naturale la serie è una somma finita. Infatti si riduce alla somma dei primi $\alpha+1$ termini essendo i coefficienti binomiali tutti nulli per $n > \alpha$. In questo caso prende il nome di **binomio di Newton**.