

Sommario delle lezioni di Analisi Matematica

a.a. 2008-2009 cdl EDI (Ingegneria edile) prof. C. Franchetti

Paragrafi stampati in piccolo come questo sono da considerarsi complementari e non indispensabili

Parte Prima

1 Argomenti preliminari

1.1 Equazioni di secondo grado

La più generale equazione di secondo grado si può scrivere così

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad a \neq 0$$

Dividendo per a si ottiene un'equazione equivalente che scriveremo

$$x^2 + px + q = 0$$

per risolverla si usa il cosiddetto "completamento del quadrato"

$$x^2 + px + q = (x + p/2)^2 + q - p^2/4 \text{ e quindi } (x + p/2)^2 = p^2/4 - q = \Delta$$

Poiché un quadrato non può essere negativo, se $\Delta < 0$ non ci sono soluzioni. Se $\Delta \geq 0$ si ha $x = -p/2 \pm \sqrt{\Delta}$. Se $\Delta = 0$ si ha un'unica soluzione, se $\Delta > 0$ si hanno due soluzioni distinte.

1.2 Potenze

Sia $a \neq 0$ e n sia un intero positivo maggiore di 1, posto $a^n = a.a...a$ (n fattori uguali ad a); valgono le proprietà

$$a^m a^n = a^{m+n} \text{ dove } m, n > 1; \quad a^m / a^n = a^{m-n}, \text{ dove } m, n > 1, m > n.$$

Volendo estendere la definizione di potenza agli esponenti 1 e 0 in modo che le proprietà restino valide si pone $a^1 = a$, $a^0 = 1$. Analogamente si ottiene una definizione coerente per ogni esponente intero relativo (in Z) ponendo, per $p > 0$, $a^{-p} = 1/a^p$. Supponiamo ora che sia $a > 0$, si definisce la potenza a esponente razionale a^x ($x \in Q$) nel seguente modo: se $x = m/n$ (dove m, n sono interi) allora $a^x = \sqrt[n]{a^m}$. Si verifica che le due proprietà soprascritte continuano a valere per esponenti in Q .

1.3 Regola di Ruffini

Dicesi polinomio ogni espressione del tipo $P(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots + c_nx^n$, il numero c_i viene detto coefficiente del termine con x a esponente i . Si chiama grado del polinomio il massimo esponente fra i termini con coefficiente non nullo. Se $c_n \neq 0$ il polinomio scritto sopra $P(x)$ ha grado (esattamente) n , altrimenti il suo grado sarà strettamente minore di n .

Definizione. Un polinomio $A(x)$ si dice divisibile per un polinomio $B(x)$ se esiste un polinomio $Q(x)$ tale che $A(x) = B(x)Q(x)$.

Siccome il grado del prodotto di due polinomi è uguale alla somma dei gradi dei polinomi fattori, segue che una condizione necessaria per la divisibilità è che il grado di $B(x)$ sia minore o uguale del grado di $A(x)$. Vale il seguente risultato (divisione con resto): dati due polinomi $A(x), B(x)$ con grado di $B(x)$ minore o uguale del grado di $A(x)$, esiste una e una sola coppia di polinomi $Q(x), R(x)$ con grado di $R(x)$ strettamente minore del grado di $B(x)$ tale che $A(x) = B(x)Q(x) + R(x)$. Segue da qui

Teorema (regola di Ruffini). Un polinomio $A(x)$ di grado maggiore o uguale a 1 è divisibile per un binomio del tipo $(x - a)$ se e solo se a è radice del polinomio $A(x)$.

Dimostrazione. Si ha $A(x) = (x - a)Q(x) + R(x)$, con grado di $R(x)$ minore di grado di $(x - a)$ che è uguale a 1, cioè grado di $R(x) = 0$, ossia $R(x)$ è una costante R . Pertanto $A(x) = (x - a)Q(x) + R$; facendo $x = a$ si ottiene $R = A(a)$ per cui $A(x) = (x - a)Q(x) + A(a)$. Dunque la divisibilità si ha se e solo se a è una radice di $A(x)$, cioè $A(a) = 0$.

1.4 Misura in radianti degli angoli

Se C è una circonferenza di raggio $r > 0$, allora la lunghezza di C è $2\pi r$, dove $\pi = 3,1415\dots$. Misureremo gli angoli così: il vertice di un angolo qualsiasi sia centro di una circonferenza C di raggio 1, la misura (in radianti) di questo angolo è, per definizione, uguale alla lunghezza dell'arco intercettato dall'angolo su C . Si vede subito che la misura (in radianti) degli angoli di 0, 90, 180, 360 gradi vale risp. 0, $\pi/2$, π , 2π . La misura di un angolo in radianti è sempre un numero reale. Gli angoli saranno sempre misurati in radianti.

1.5 Insiemi

Il concetto di "insieme" si considera primitivo. Denotiamo di solito insiemi generici con le maiuscole: A, B etc.; gli oggetti (elementi) di un insieme con minuscole a, b etc. Si usa il simbolo \in per l'**appartenenza**, quindi $b \in B$ significa che l'oggetto b appartiene all'insieme B . A volte, se è possibile, si denota un insieme elencandone i suoi elementi, per es. se $D = \{1, 5, 12\}$, D contiene esattamente i tre elementi elencati. Si dice che un insieme A è finito se contiene un numero finito n di elementi e si dice che n è la sua **cardinalità**. Si considera anche l'insieme privo di elementi, detto **insieme vuoto** che viene indicato con \emptyset . Si dice che B è un **sottoinsieme** di A (e si scrive $B \subset A$) se ogni elemento di B è anche un elemento di A . Notare che $B \subset A$ e $A \subset B$ implica $A = B$. Dati due insiemi A, B si definiscono rispettivamente le operazioni di **unione** e **intersezione** che portano a nuovi insiemi: $x \in A \cup B$ se x appartiene ad A o a B , $x \in A \cap B$ se x appartiene ad A e a B . Vale sempre $A \cap B \subset A \subset A \cup B$ e $A \cap B \subset B \subset A \cup B$. Se $A \cap B = \emptyset$ si dice che A e B sono **disgiunti**. Spesso tutti gli insiemi che si considerano sono sottoinsiemi di un insieme "universo". Dato un insieme A in un universo X , il **complementare** di A (rispetto a X) denotato con A^c è l'insieme degli elementi (appartenenti a X) che non stanno in A . Siano A, B insiemi, il **prodotto cartesiano** di A per B , denotato $A \times B$, è l'insieme i cui elementi sono tutte le **coppie ordinate** (a, b) con primo elemento in A e secondo elemento in B . Osserviamo che se A ha cardinalità m e B ha cardinalità n , allora $A \times B$ ha cardinalità mn . Tratteremo spesso gli insiemi numerici $N \subset Z \subset Q \subset R$ (numeri reali) $\subset C$ (numeri complessi).

Dato un insieme qualsiasi A , una **relazione** in A è una legge denotata con \sim che seleziona alcune coppie di $A \times A$: se la relazione \sim seleziona la coppia (a, b) scriveremo $a \sim b$.

La relazione \sim si dice di **equivalenza** se gode delle tre proprietà seguenti: **riflessiva**: $a \sim a$ per ogni $a \in A$, **simmetrica**: $a \sim b$ implica $b \sim a$ ($a, b \in A$), **transitiva**: $a \sim b$ e $b \sim c$ implica $a \sim c$ ($a, b, c \in A$).

Discutiamo ora l'importante concetto di **insieme quoziente**. Supponiamo che un'urna contenga 50 palline: 10 bianche, 10 nere, 15 rosse e 15 verdi; a questo ente concreto posso associare un insieme astratto A che contiene (per definizione) 50 elementi (le palline); posso però considerare le palline dello stesso colore come un'unica sottofamiglia della famiglia di tutte le palline, questo punto di vista equivale a considerare un altro insieme astratto A^* (che chiameremo insieme quoziente) che possiede esattamente 4 elementi; potrei scrivere

$A^* = \{b, n, r, v\}$. E' importante ricordarsi sempre che gli insiemi A e A^* sono (logicamente) distinti. Faremo ora seguire le definizioni formali.

Sia $a \in A$, l'insieme degli elementi di A equivalenti ad a nella relazione di equivalenza \sim si chiama **classe di equivalenza** determinata da a , questa è il sottoinsieme di A descritto da $\{b \in A : b \sim a\}$. Si verifica facilmente che due classi di equivalenza o coincidono o sono disgiunte.

Definizione. Si chiama **insieme quoziente** (di A rispetto alla relazione di equivalenza \sim) l'insieme A^\sim i cui elementi sono le classi di equivalenza determinate in A dalla relazione di equivalenza \sim .

Nell'esempio dell'urna la relazione di equivalenza \sim è "dello stesso colore", cioè $a \sim b$ se e solo se a è dello stesso colore di b . Dato un insieme A , una famiglia di sottoinsiemi $\{A_i\}$ di A è una **partizione** di A se $\cup_i A_i = A$ e $A_i \cap A_j = \emptyset$ per $i \neq j$. Ogni partizione di A definisce in modo naturale una relazione di equivalenza \sim su A per cui i sottoinsiemi A_i sono le sue classi di equivalenza: basta porre $a \sim b$ se e solo se a e b appartengono a uno stesso sottoinsieme A_i della partizione.

1.6 Operazioni negli insiemi numerici N e Z

Conosciamo l'addizione (o somma) in N : se $a \in N$, $b \in N$ sappiamo in qualche modo calcolare $(a + b)$ che sarà ancora un numero di N . L'addizione gode delle due proprietà:

$a + b = b + a$ **commutativa**, $(a + b) + c = a + (b + c)$ **associativa**.

Si noti che la proprietà associativa consente di definire la somma di un numero qualsiasi di addendi. Se, come spesso si fa, si considera anche lo 0 come appartenente a N , conviene rilevare l'esistenza in N di un elemento neutro, cioè lo zero, rispetto alla somma; si ha infatti per ogni $a \in N$ che $a + 0 = 0 + a = a$. Siano $a, b \in N$, consideriamo l'equazione $a + x = b$: risolvere (in N) l'equazione significa determinare il sottoinsieme (eventualmente vuoto) di N dei numeri di N che sostituiti alla x nell'equazione rendono vera l'uguaglianza. La x chiamasi incognita dell'equazione. Per esempio l'equazione $3 + x = 5$ ha l'unica soluzione $x = 2$; l'equazione $5 + x = 3$ non ha soluzioni (in N). In N si può definire in qualche caso l'operazione inversa della somma ossia la sottrazione: dati a, b in N , $(b - a)$, se esiste, è quel numero che sommato ad a mi dà b , ovvero la soluzione dell'equazione $a + x = b$. Se ampliamo l'insieme N ottenendo l'insieme Z degli interi relativi non occorre più considerare la sottrazione e inoltre l'equazione (in Z) $a + x = b$ ha sempre una e una sola soluzione: $x = (b - a)$. Come si dice rispetto

all'operazione di somma Z è un **gruppo commutativo**, valgono cioè le proprietà: ogni $a \in Z$ ammette (in Z) un unico inverso, denotato con $-a$, che soddisfa $a + (-a) = (-a) + a = 0$, esiste l'elemento neutro rispetto alla somma (lo zero) inoltre la somma è commutativa. In Z è definita anche una seconda operazione, la moltiplicazione (o prodotto): se $a, b \in Z$ sappiamo in qualche modo calcolare ab che sarà ancora un numero di Z . La moltiplicazione gode delle due proprietà: $ab = ba$ commutativa, $(ab)c = a(bc)$ associativa. Si noti che la proprietà associativa consente di definire il prodotto di un numero qualsiasi di fattori. Esiste poi l'elemento neutro rispetto al prodotto che è il numero 1. Le due operazioni sono legate dalla proprietà **distributiva**: $a(b + c) = ab + ac$. Si dimostrano inoltre facilmente: regola dei segni (+ per + = + per - = - per + = -) e la legge di annullamento di un prodotto ($ab = 0$ se e solo se uno almeno fra a e b è uguale a 0).

1.7 Funzioni

Da un punto di vista (molto) astratto una funzione è una tripletta (f, A, B) che però denoteremo nella forma $f : A \rightarrow B$ dove A, B sono due insiemi qualsiasi e f è una "legge di natura qualsiasi" che ad ogni elemento a di A associa uno e un solo elemento, denotato $f(a)$, appartenente a B , A si chiama **dominio** di f e B si chiama **codominio** di f . Si chiama **immagine** di f l'insieme $f(A) = \{f(a), a \in A\}$, cioè l'immagine di f è l'insieme di tutti i valori che prende su A la funzione f , si noti che $f(A) \subset B$ ma non è richiesto che $f(A)$ "riempia" B ; se $f(A) = B$ si dice che la funzione f è **suriettiva**. Si può vedere f come una "legge deterministica". A volte due funzioni si possono "comporre" in modo da definire una terza funzione (la composizione). Date due funzioni $f : A \rightarrow B$ e $g : C \rightarrow D$ se $B \subset C$ è possibile definire la **funzione composta** $g \circ f : A \rightarrow D$ mediante la formula $(g \circ f)(x) = g[f(x)]$. Una funzione $f : A \rightarrow B$ si dice **iniettiva** se $a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2)$ o equivalentemente se $f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2$. Se f è iniettiva allora per ogni $b \in B$ esiste al più un elemento $a \in A$ tale che $f(a) = b$, se poi $b \in f(A)$ esiste esattamente un $a \in A$ tale che $f(a) = b$. Se f è iniettiva si può definire la sua **funzione inversa** cioè la funzione $f^{-1} : f(A) \rightarrow A$ mediante la formula $f^{-1}(y) = x$ dove x è l'unico elemento di A tale che $f(x) = y$. Una funzione $f : A \rightarrow B$ che sia contemporaneamente iniettiva e suriettiva si dice **biiettiva**. Si dice che due insiemi A, B sono in corrispondenza biunivoca se esiste una biiezione tra essi, in tal caso A e B

hanno la stessa cardinalità.

Data una funzione $f : A \rightarrow B$, il suo **grafico** è il sottoinsieme del prodotto cartesiano $A \times B$ così definito: $\text{Gr}(f) = \{(a, f(a)) : a \in A\}$.

Se B è uguale a R o a un suo sottoinsieme si dice che f è una **funzione reale**. Consideriamo funzioni reali definite in uno stesso insieme A , la somma e il prodotto di due tali funzioni f, g sono definiti in modo naturale dalle formule $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$, $(fg)(x) = f(x)g(x)$; il quoziente f/g risulterà definito nel sottoinsieme $A_0 = \{x \in A : g(x) \neq 0\}$ di A dalla formula $(f/g)(x) = f(x)/g(x)$. Se A è un sottoinsieme di R si parlerà di **funzioni reali di variabile reale**.

1.8 Relazione d'ordine

Una **relazione d'ordine** in un insieme A è una relazione \sim che soddisfa le tre proprietà:

riflessiva $a \sim a$, **antisimmetrica** $a \sim b$ e $b \sim a$ implica $a = b$, **transitiva** $a \sim b$ e $b \sim c$ implica $a \sim c$;

un insieme A in cui sia definita una relazione d'ordine si dice **parzialmente ordinato**, se poi per ogni coppia (a, b) vale o $a \sim b$ o $b \sim a$ si dice che A è **totalmente ordinato**.

1.9 Uso degli indici

Una lettera a può rappresentare un numero qualsiasi; avendo più numeri da rappresentare si potrebbero usare più lettere a, b, c, \dots ; dovendo per es. indicare un gruppo di 50 numeri si dovrebbe usare un (lungo) elenco a, b, \dots (di 50 lettere) ma è più conveniente usare la notazione $\{a_i\}_{i=1}^{50}$ che è la scrittura abbreviata per $\{a_1, a_2, \dots, a_{50}\}$. Per esempio $\{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17\}$ lo possiamo scrivere $\{2k - 1\}_{k=1}^9$. L'insieme N dei numeri naturali può essere denotato $\{n\}_{n=1}^{\infty} = \{1, 2, \dots, n, \dots\}$ e il suo sottoinsieme dei numeri pari $\{2n\}_{n=1}^{\infty} = \{2, 4, \dots, 2n, \dots\}$, l'insieme dei reciproci dei numeri naturali $\{1/k\}_{k \in N} = \{1/1, 1/2, \dots, 1/n, \dots\}$.

1.10 Nozioni di calcolo combinatorio

Denoteremo con $\text{card}(A)$ la cardinalità di un insieme A . Ricordiamo che se $\text{card}(A) = p$, $\text{card}(B) = q$, allora $\text{card}(A \times B) = pq$. Vogliamo in un certo

senso generalizzare questa formula. Consideriamo il modello di un'urna U che contiene n palline $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ distinguibili. Si fanno successivamente k estrazioni (di una pallina). Il risultato viene considerato come una k -pla ordinata $\{a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_k}\}$ dove a_{i_s} indica la pallina estratta nella s -ma estrazione ($i_s \in \{1, 2, \dots, n\}$). Le estrazioni si possono fare con due modalità diverse: con rimpiazzamento, senza rimpiazzamento (si noti che nel secondo caso dovrà essere $k \leq n$). Si chiede quanti sono i risultati possibili. Nel primo caso si hanno tanti possibili risultati quanto la cardinalità del prodotto cartesiano di k copie di U , cioè n^k . Nel secondo caso ogni volta l'urna ha una pallina in meno e quindi il risultato sarà $n(n-1)\dots(n-k+1) = D_{n,k}$ (sono k fattori calanti di uno a partire da n); questo numero conta le **disposizioni** di n oggetti k a k . Il numero $D_{n,n}$ conta tutte le **permutazioni** possibili di n oggetti e si indica con $n!$ (n fattoriale). Dunque $n! = n(n-1)\dots 3.2.1$, per definizione si pone $0! = 1$. Consideriamo ora il numero $C_{n,k}$ (**combinazioni**) dei sottoinsiemi distinti di cardinalità k di un insieme di cardinalità n . E' facile vedere che $D_{n,k} = k!C_{n,k}$ e quindi

$$C_{n,k} = \binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Ricordiamo qui la formula per le potenze di un binomio (**binomio di Newton**):

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

2 Gli insiemi numerici Q e R

2.1 I numeri razionali

L'insieme dei numeri razionali Q è l'insieme i cui elementi sono le classi di equivalenza delle frazioni. Richiamiamo le principali proprietà: Q è un gruppo commutativo rispetto alla somma, $Q \setminus \{0\}$ è un gruppo commutativo rispetto al prodotto, vale la proprietà distributiva. Si vede facilmente che Q è totalmente ordinato dalla usuale relazione \leq di minore o uguale. Q è **denso**, questo significa che per ogni coppia a, b con $a \leq b, a \neq b$ (naturalmente scriveremo più semplicemente $a < b$) esiste un c tale che $a < c < b$. (Si prenda $c = (a+b)/2$).

2.2 I numeri reali

Diamo qui un cenno su come si possa definire R come "ampliamento" di Q . Premettiamo delle definizioni riguardanti insiemi totalmente ordinati (che applichiamo a Q e poi a R). Sia A un sottoinsieme non vuoto di Q , un elemento $M \in Q$ è un **maggiorante** per A se $a \leq M$ per ogni $a \in A$; se esistono maggioranti per A si dice che A è **superiormente limitato**. Un insieme superiormente limitato può avere (ma può anche non avere) un **massimo**, cioè un elemento α appartenente ad A tale che $\alpha \geq a$ per ogni $a \in A$. In modo analogo si danno le definizioni di **minorante**, di insieme **inferiormente limitato** e di **minimo**. Se A è nello stesso tempo inferiormente limitato e superiormente limitato si dirà che A è **limitato**.

Definizione. Una coppia (A, B) di sottoinsiemi di Q si dice che è una **sezione** in Q se: A, B sono non vuoti, $A \cup B = Q$ e $A \cap B = \emptyset$ (questo significa che A, B definiscono una partizione non banale di Q) e inoltre $a \in A, b \in B \Rightarrow a < b$.

Si noti che se A ha massimo allora B non può avere minimo, se B ha minimo allora A non può avere massimo (questo segue dal fatto che Q è denso). Per avere le sezioni di questo tipo, dette sezioni di Dedekind, basta fissare un $q \in Q$ e definire $A = \{x \in Q : x \leq q\}$, $B = A^c$ oppure $A = \{x \in Q : x < q\}$, $B = A^c$, in effetti possiamo identificare queste due sezioni oppure chiamare sezioni di Dedekind solo quelle in cui l'insieme a sinistra ammette massimo. Le sezioni di Dedekind (con la convenzione di sopra) sono chiaramente in corrispondenza biunivoca con gli elementi di Q . A prima vista può sembrare sorprendente il fatto che esistano in Q sezioni (A, B) che non sono di Dedekind, tali sono le sezioni per cui non esiste il massimo di A e non esiste il minimo di B : queste sezioni si chiamano **lacune**. E' una lacuna in Q la sezione (A, B) dove $A = \{x \in Q : x \leq 0\} \cup \{x \in Q : x > 0 \text{ e } x^2 < 2\}$, $B = A^c$. L'insieme R dei numeri reali è l'insieme di tutte le sezioni in Q : l'insieme delle sezioni di Dedekind corrisponde all'insieme dei numeri razionali (può essere identificato con Q), le lacune sono dette numeri irrazionali. E' possibile estendere in modo coerente a tutto R le operazioni e la relazione di ordine in Q .

Notiamo qui che una funzione reale $f : A \rightarrow R$ si dice **limitata** se $f(A)$ è un sottoinsieme limitato di R .

2.3 Completezza di R

R gode di tutte le proprietà di Q con in più la fondamentale proprietà di **completezza** che ora descriveremo. Sia A un sottoinsieme non vuoto di R ,

se A non è superiormente limitato diremo che l'**estremo superiore** di A è $+\infty$ ($\sup A = +\infty$); in caso contrario esistono maggioranti per A .

Teorema (completezza di \mathbb{R})

Se A è un sottoinsieme non vuoto di \mathbb{R} superiormente limitato allora esiste (ed è unico) il minimo fra i maggioranti di A che è detto **estremo superiore** di A ($\sup A$).

Vediamo ora come caratterizzare il $\sup A$ (quando A è superiormente limitato). Poniamo $\alpha = \sup A$; poiché α è un maggiorante avremo $a \in A \Rightarrow a \leq \alpha$; poiché α è il minimo maggiorante ogni numero β con $\beta < \alpha$ non può essere un maggiorante per A (porremo $\beta = \alpha - \epsilon$ con $\epsilon > 0$) vale a dire $\exists a_\epsilon \in A$ tale che $\alpha - \epsilon < a_\epsilon (\leq \alpha)$.

Riassumendo avremo che $\alpha = \sup A$ se e solo se

i) $a \leq \alpha \forall a \in A$

ii) $\forall \epsilon > 0 \exists a_\epsilon \in A : \alpha - \epsilon < a (\leq \alpha)$.

Se accade che $\alpha = \sup A \in A$ (cosa che avviene solo in casi particolari) α risulta essere il massimo di A , scriveremo $\alpha = \max A$. Avremo in modo del tutto parallelo:

Sia A un sottoinsieme non vuoto di \mathbb{R} , se A non è inferiormente limitato diremo che l'estremo inferiore di A è $-\infty$ e scriveremo $\inf A = -\infty$; in caso contrario esistono minoranti per A .

Teorema (completezza di \mathbb{R})

Se A è un sottoinsieme non vuoto di \mathbb{R} inferiormente limitato allora esiste (ed è unico) il massimo fra i minoranti di A che è detto **estremo inferiore** di A ($\inf A$).

3 Successioni

3.1 Limite di successioni

Le funzioni reali definite su \mathbb{N} sono chiamate successioni (reali). Per le successioni si usano di solito delle notazioni speciali: la successione $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ si indica con $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ o anche più semplicemente con $\{a_n\}$ (dove a_n sta per $a(n)$) o con $\{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$. Si dice anche che a_n è il termine generale della successione. Introduciamo ora il concetto di **limite**: si dice che $\alpha \in \mathbb{R}$ è

limite di una successione $\{a_n\}$ e si scrive $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$ se

$$(*) \quad \forall \epsilon > 0 \exists \nu(\epsilon) \in \mathbb{N} : n > \nu(\epsilon) \Rightarrow |a_n - \alpha| < \epsilon$$

Si dice che una successione $\{a_n\}$ è **convergente** se esiste un numero reale α tale che la (*) sia soddisfatta. Chiamiamo intorno di centro $c \in \mathbb{R}$ e raggio $\delta > 0$ l'intervallo aperto $(c-\delta, c+\delta)$ ovvero l'insieme $I(c, \delta) = \{x \in \mathbb{R} : c-\delta < x < c + \delta\}$. Si ha subito che una successione convergente è limitata: infatti tutti gli elementi a_n esclusi al più un numero finito di essi appartengono all'intorno $I(\alpha, r)$ dove r è un qualunque fissato numero positivo e α il limite della successione. Si noti però che non tutte le successioni limitate sono convergenti. Si dice che una successione $\{a_n\}$ è **divergente** a $+\infty$ ($-\infty$) se

$$(**) \quad \forall k > 0 \exists \nu(k) \in \mathbb{N} : n > \nu(k) \Rightarrow a_n > k \text{ (} a_n < -k \text{)}$$

Chiaramente una successione $\{a_n\}$ divergente, per es. a $+\infty$, non può essere superiormente limitata: infatti tutti gli elementi a_n esclusi al più un numero finito sono maggiori di un qualunque fissato numero h positivo. Una successione di questi tre tipi (convergente, divergente a $+\infty$, divergente a $-\infty$) è detta **regolare**, ogni altra successione è detta non regolare. Il limite di una successione convergente è **unico**. Supponiamo che $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \beta = \gamma$, si ha successivamente $|\beta - \gamma| = |(\beta - a_n) + (a_n - \gamma)| \leq |\beta - a_n| + |a_n - \gamma|$; poiché le ultime due quantità si possono rendere piccole a piacere, segue subito che $\beta = \gamma$.

3.2 Primi risultati

Sia P una proprietà che può valere o non valere per gli elementi di una successione $\{a_n\}$ (per es. l'essere positivi, essere costanti), se esiste ν tale che per $n > \nu$ gli elementi a_n soddisfano P , si dice che P vale **definitivamente**. Da quanto abbiamo visto segue che se una successione converge ad un numero α allora definitivamente i suoi elementi stanno in ogni intorno $I(\alpha, \delta)$ con $\delta > 0$, se diverge a $+\infty$ allora definitivamente i suoi elementi sono maggiori di ogni numero k .

Definizione: $\text{sign} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (segno) è la funzione così definita: $\text{sign}(x) = 1$ (-1) se $x > 0$ (< 0), $\text{sign}(0) = 0$.

Teorema (permanenza del segno)

i) se $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \neq 0$, allora definitivamente a_n ha il segno di a ($\text{sign}(a_n) = \text{sign}(a)$)

ii) se definitivamente $a_n \geq 0$ (≤ 0) e $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, allora $a \geq 0$ (≤ 0).

Una successione $\{a_n\}$ si dice **crescente** se $p < q \Rightarrow a_p \leq a_q$, se poi $a_p < a_q$ si dirà strettamente crescente; $\{a_n\}$ si dice **decrescente** se $p < q \Rightarrow a_p \geq a_q$, se poi $a_p > a_q$ si dirà strettamente decrescente. Tali successioni si dicono tutte **monotone**.

Teorema

Ogni successione (definitivamente) monotona è regolare.

Dimostrazione

Basterà considerare il caso che la successione $\{a_n\}$ sia (definitivamente) crescente. Sono possibili due casi: $\sup\{a_n\} = \alpha \in R$, oppure $\sup\{a_n\} = +\infty$. Nel primo caso fissato $\epsilon > 0$ per definizione di sup esiste $n(\epsilon) \in N$ tale che $\alpha - \epsilon < a_{n(\epsilon)} (\leq \alpha)$, se poi $n > n(\epsilon)$ si avrà $a_n \geq a_{n(\epsilon)}$ perché la successione è crescente. Dunque abbiamo che per ogni $\epsilon > 0$ esiste $n(\epsilon) \in N$ tale che $n > n(\epsilon)$ implica $\alpha - \epsilon < a_n < \alpha + \epsilon$ e ciò prova che $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$. Nel secondo caso fissato $k > 0$, poiché la successione non è limitata superiormente, esiste $n(k) \in N$ tale che $a_{n(k)} > k$, se poi $n > n(k)$ si avrà $a_n \geq a_{n(k)}$ perché la successione è crescente. Dunque abbiamo che per ogni $k > 0$ esiste $n(k) \in N$ tale che $n > n(k)$ implica $a_n > k$ e ciò prova che $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$.

3.3 Operazioni sulle successioni

Date due successioni $\{a_n\}, \{b_n\}$ la successione somma $\{a_n + b_n\}$ e quella prodotto $\{a_n b_n\}$ sono definite nel modo ovvio, così come per altre operazioni. Per semplicità scriveremo $a_n \rightarrow \alpha$ al posto di $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$. Supponiamo che $a_n \rightarrow \alpha, b_n \rightarrow \beta$, non è difficile provare i seguenti risultati:

$(a_n + b_n) \rightarrow (\alpha + \beta)$; $(a_n b_n) \rightarrow (\alpha \beta)$; se $\beta \neq 0$ si ha anche $a_n/b_n \rightarrow \alpha/\beta$.

Criterio del confronto (dei carabinieri): date tre successioni $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ supponiamo che (definitivamente) $a_n \leq b_n \leq c_n$ e che $a_n \rightarrow k, c_n \rightarrow k$; allora si ha anche $b_n \rightarrow k$. Altro confronto: date due successioni $\{a_n\}, \{b_n\}$ supponiamo che (definitivamente) $a_n \geq b_n$ e che $b_n \rightarrow +\infty$; allora si ha anche $a_n \rightarrow +\infty$.

In alcuni casi si possono fare operazioni anche con successioni divergenti o non regolari. Elenchiamo qualche risultato tralasciandone altri analoghi, sono tutti di facile verifica

i) $a_n \rightarrow a \neq 0, b_n \rightarrow 0$, e b_n definitivamente positivi (negativi), allora

$$a_n/b_n \rightarrow \text{sign}(a)\infty \quad (-\text{sign}(a)\infty)$$

ii) Se $\{a_n\}$ è limitata e $b_n \rightarrow 0$, allora $a_n b_n \rightarrow 0$

iii) Se $\{a_n\}$ è limitata e $b_n \rightarrow +\infty$, allora $a_n/b_n \rightarrow 0$

iv) Se $\{a_n\}$ è limitata e $b_n \rightarrow +\infty$, allora $a_n + b_n \rightarrow +\infty$.

v) $a_n \rightarrow a \neq 0, b_n \rightarrow +\infty$, allora $a_n b_n \rightarrow \text{sign}(a)\infty$.

3.4 Forme indeterminate

Si dice che i simboli $+\infty - (+\infty)$, 0∞ , $0/0$, $(\infty)/(\infty)$ denotano **forme indeterminate**: questa è una scrittura abbreviata e indica che abbiamo due successioni $\{a_n\}, \{b_n\}$ che rispettivamente hanno il comportamento indicato. La forma è indeterminata perché senza ulteriori ipotesi non è possibile determinare il comportamento della successione differenza (primo caso), prodotto (secondo caso) etc. Due successioni $\{a_n\}, \{b_n\}$ possono dar luogo anche a forme indeterminate di tipo esponenziale: $0^0, \infty^0, 1^\infty$. Seguono alcuni esempi (il primo dei quali è di importanza fondamentale).

i) **Il numero e**

Sia $a_n = 1 + 1/n, b_n = n$ allora $a_n^{b_n}$ dà luogo alla forma indeterminata 1^∞ . Posto $e_n = (1 + 1/n)^n$ si dimostra che $\{e_n\}$ è una successione crescente e che $e_n < 3$; per il teorema sulle successioni monotone e_n converge, il suo limite si chiama e (da Eulero), si ha $e = 2, 7182..$

ii) Sia $a_n = n, b_n = 1/n$ allora $a_n^{b_n}$ dà luogo alla forma indeterminata ∞^0 . Dimostriamo che $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$. Se si pone $\sqrt[n]{n} = 1 + h_n$ chiaramente è $h_n > 0$. Dunque si ha usando il binomio di Newton $n = (1 + h_n)^n = 1 + nh_n + \binom{n}{2}h_n^2 + .. + h_n^n$, poiché tutti gli addendi sono positivi si avrà: $n > \binom{n}{2}h_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}h_n^2$; da questa si ottiene $1 < 1 + h_n = \sqrt[n]{n} < 1 + \sqrt{\frac{2}{n-1}}$ e quindi dal teorema di confronto segue la tesi perché $\sqrt{\frac{2}{n-1}} \rightarrow 0$.

iii) Il seguente risultato teorico permette di calcolare diverse forme indeterminate: sia $\{a_n\}$ una successione a termini positivi tale che $a_n/a_{n+1} \rightarrow \alpha$; allora se $\alpha > 1$ $a_n \rightarrow 0$, se $\alpha < 1$ $a_n \rightarrow +\infty$.

Dimostrazione: se vale il primo caso a_n è definitivamente decrescente e quindi (teorema sulle successioni monotone) converge, sia c il suo limite, poiché la successione è positiva sarà $c \geq 0$. Non può essere $c > 0$: se così fosse applicando la formula $\lim(a_n/a_{n+1}) = (\lim a_n)/(\lim a_{n+1})$ si otterrebbe $\alpha = 1/1 = 1$ contro l'ipotesi $\alpha > 1$. Se vale il secondo caso a_n è definitivamente crescente e quindi (teorema sulle successioni monotone) o converge a un numero positivo c o diverge a $+\infty$. Non può essere $a_n \rightarrow c$ perché se così fosse applicando la formula $\lim(a_n/a_{n+1}) = (\lim a_n)/(\lim a_{n+1})$ si otterrebbe $\alpha = 1/1 = 1$ contro l'ipotesi $\alpha < 1$.

Esempio 1 (l'esponenziale "uccide" qualsiasi potenza): sia $b > 1$ e s un numero positivo qualsiasi, mostriamo che $n^s/b^n \rightarrow 0$. Infatti se $a_n = n^s/b^n$ si

ha $a_n/a_{n+1} = b(\frac{n}{n+1})^s \rightarrow b > 1$.

Esempio 2: sia $a_n = \frac{x^n}{n!}$ con $x > 0$, proviamo che $a_n \rightarrow 0$. Si ha $a_n/a_{n+1} = (n+1)/x \rightarrow +\infty$; da qui segue la tesi (il teorema usato è applicabile anche quando $\alpha = +\infty$).

3.5 Criterio di Cauchy

Enunciamo ora un criterio di convergenza per una successione $\{a_n\}$ che non richiede la conoscenza a priori del limite. Premettiamo la seguente definizione: si dice che una successione $\{a_n\}$ è di Cauchy se soddisfa la seguente proprietà

$$\forall \epsilon > 0 \exists \nu(\epsilon) \in \mathbb{N} : p, q > \nu(\epsilon) \Rightarrow |a_p - a_q| < \epsilon$$

Teorema: Una successione $\{a_n\}$ è convergente se e solo se è di Cauchy.

Il fatto che in \mathbb{R} le successioni di Cauchy siano convergenti è una proprietà equivalente alla completezza; questa proprietà non vale in \mathbb{Q} .

Diamo ora il concetto di **sottosuccessione** di una successione data. Sia $\{a_n\}$ una successione in \mathbb{R} e $\{n_1, n_2, \dots, n_k, \dots\}$ una successione strettamente crescente di interi positivi: la successione $\{a_{n_1}, a_{n_2}, \dots, a_{n_k}, \dots\}$ è una sottosuccessione della successione $\{a_n\}$. Si noti che per la sottosuccessione l'indice di successione che abbiamo usato è k mentre per la successione di partenza è n ; si noti poi che i valori della sottosuccessione sono alcuni (in generale non tutti) dei valori assunti dalla successione di partenza (da qui il nome). Si potrebbe dimostrare il seguente

Teorema: da ogni successione limitata si può estrarre una sottosuccessione convergente.

4 Limiti e continuità di funzioni reali di variabile reale

4.1 Limiti

Consideriamo funzioni $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ dove I è un intervallo (anche illimitato) di \mathbb{R} . Sia $a \in I$, diamo subito qualche definizione di limite:

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = c$ sta per $\forall \epsilon > 0 \exists \delta(\epsilon) > 0 : 0 < |x - a| < \delta(\epsilon) \Rightarrow |f(x) - c| < \epsilon$

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ sta per $\forall k > 0 \exists \delta(k) > 0 : 0 < |x - a| < \delta(k) \Rightarrow f(x) > k$

Si considera anche il limite di una funzione in un punto fuori dal suo dominio, bisognerà però che ci siano punti del dominio vicini quanto si vuole a questo

punto. Ci occorre la seguente

Definizione: Sia $A \subset \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}$, si dice che x è un **punto di accumulazione** per A se ogni intorno di x contiene infiniti punti di A .

Si osservi che le due definizioni di sopra si applicano anche per un punto a fuori dall'intervallo I ma di accumulazione per I . Le seguenti sono le definizioni di limite parallele a quelle già date per le successioni (si suppone qui che I contenga una semiretta destra)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = c \text{ sta per } \forall \epsilon > 0 \exists x(\epsilon) > 0 : x > x(\epsilon) \Rightarrow |f(x) - c| < \epsilon$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \text{ sta per } \forall h > 0 \exists x(h) > 0 : x > x(h) \Rightarrow f(x) > h$$

Si descrivono facilmente altri casi simili di limiti e anche si definiscono limiti destri e sinistri. Le operazioni sui limiti procedono come per le successioni, così come la discussione delle forme indeterminate.

4.2 Limiti notevoli

Ecco alcuni limiti notevoli: dal (prevedibile) risultato $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + 1/x)^x = e$ prendendo il logaritmo e cambiando $1/x$ con t si deduce che

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\log(1+t)}{t} = 1$$

Dei seguenti due limiti notevoli

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^n - 1}{x} = n$$

il primo si può verificare con semplici considerazioni geometriche; il secondo usando il binomio di Newton.

4.3 Funzioni monotone

Una funzione $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ (dove I è un intervallo) si dice **crescente** (**decrecente**) se $x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$ ($f(x) \geq f(y)$) se poi $f(x) < f(y)$ ($f(x) > f(y)$) si dirà strettamente crescente (strettamente decrecente). Tutti questi tipi di funzioni si dicono monotone. Le funzioni monotone hanno proprietà di regolarità analoghe a quelle delle successioni monotone. Per esempio vale il

seguinte

Teorema: sia $f : (a, b) \rightarrow R$ crescente e sia $c \in (a, b)$, allora esiste

$$\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = \sup\{f(x) : x \in (a, c)\}.$$

4.4 Continuità

Sia $f : I \rightarrow R$ e $a \in I$, diremo che la funzione f è **continua** nel punto a se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ cioè se

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta(\epsilon) > 0 : |x - a| < \delta(\epsilon) \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon.$$

Si dirà poi che f è continua in un insieme I se è continua in tutti i punti di I . Da quanto sappiamo segue facilmente che somma prodotto e quoziente (quando possibile) di funzioni continue sono continui. Per verificare la continuità di una funzione in un punto si possono usare le successioni.

Teorema: una funzione f è continua in un punto del dominio a se e solo se per ogni successione $\{a_n\}$ convergente ad a si ha che $\{f(a_n)\}$ converge a $f(a)$.

Teorema: la composizione di funzioni continue è continua.

Questo risultato fondamentale si può provare usando il teorema precedente.

Teorema: una funzione invertibile continua ha inversa continua.

Per es. sono continue le seguenti funzioni: **arctan** x (inversa della restrizione di $\tan x$ all'intervallo $(-\pi/2, \pi/2)$), **arcsin** x (inversa della restrizione di $\sin x$ all'intervallo $(-\pi/2, \pi/2)$). Non è difficile verificare che le usuali funzioni elementari sono continue; per esempio sono funzioni continue i polinomi, $|x|$, $\sin x$, $\cos x$, e^x , $\log x$, \sqrt{x} , da queste operando con le operazioni e la composizione si ottiene un gran numero di funzioni continue.

4.5 Proprietà delle funzioni continue su un intervallo chiuso

Sia $f : A \rightarrow R$ una funzione reale:

Definizione Un punto $a \in A$ è un punto di **massimo** (assoluto) per la f se $x \in A \Rightarrow f(x) \leq f(a)$; è un punto di **minimo** (assoluto) per la f se $x \in A \Rightarrow f(x) \geq f(a)$.

In generale una funzione qualsiasi non risulterà limitata e quindi a maggior

ragione non ammetterà estremi assoluti. Anche per una funzione continua senza ipotesi sul dominio non si può affermare nulla sull'esistenza di estremi assoluti. Valgono i seguenti (importanti) teoremi

Teorema (Weierstrass): sia $f : [a, b] \rightarrow R$ una funzione continua, allora f (è limitata) e ammette estremi assoluti (almeno un punto di massimo e almeno un punto di minimo).

Teorema (degli zeri): sia $f : [a, b] \rightarrow R$ una funzione continua e sia $f(a)f(b) < 0$, allora esiste almeno un punto $c \in (a, b)$ tale che $f(c) = 0$.

Quest'ultimo teorema ammette una formulazione equivalente

Teorema (dei valori intermedi): siano h, m con $h < m$ due valori assunti dalla funzione continua in $[a, b]$ cioè per es. $f(\alpha) = h$ e $f(\beta) = m$ con $\alpha, \beta \in [a, b], \alpha < \beta$, allora se $h < q < m$ esiste almeno un punto $c \in (\alpha, \beta)$ tale che $f(c) = q$.

5 Derivate

5.1 Definizione e prime conseguenze

Sia $A \subset R$, si dice che un punto a è **interno** ad A se esiste un intorno di a (un intervallo aperto centrato in a) tutto contenuto in A . Se a è interno ad A , necessariamente $a \in A$.

Sia $f : I \rightarrow R$ continua in un punto x_0 interno ad I , allora se h è un numero reale in valore assoluto sufficientemente piccolo anche $(x_0 + h) \in I$. Diremo che $h = (x_0 + h) - x_0$ è l'incremento della variabile indipendente x quando passa da x_0 a $(x_0 + h)$; mentre diremo che $f(x_0 + h) - f(x_0) = \phi(h)$ è l'incremento della funzione. Se h tende a zero entrambi gli incrementi tendono a zero (si dice che sono infinitesimi simultanei); l'incremento della funzione è infinitesimo perché la funzione è supposta continua in x_0 . Dunque il quoziente $\phi(h)/h$ si presenta come una forma indeterminata $0/0$ (quando h tende a 0).

Definizione (derivabilità): sia $f : I \rightarrow R$ e sia x_0 un punto interno ad I , si dice che f è **derivabile** in x_0 se esiste

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Tale limite si chiama la **derivata** di f nel punto x_0 e si indica con $f'(x_0)$. Osserviamo subito che la continuità di f in x_0 è una condizione necessaria

per la sua derivabilità in x_0 , infatti si ha $f(x_0 + h) - f(x_0) = h \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$ e quando h tende a 0 il secondo membro tende a 0 (limite di un prodotto uguale prodotto dei limiti). La continuità in generale non è sufficiente per la derivabilità: per es. la funzione $f(x) = |x|$ è continua nell'origine ma non è ivi derivabile.

Significato geometrico della derivata. La retta tangente al grafico della funzione f nel punto $(x_0, f(x_0))$ ha la seguente equazione: $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$; pertanto la derivata è il coefficiente angolare di detta tangente.

La derivata per una approssimazione al primo ordine. A volte è noto (numericamente) il valore che prende una funzione f in un punto a e si vuole stimare il suo valore in un punto incrementato $(a + h)$, la sua derivata $f'(a)$ (se si conosce) può essere usata per una stima approssimata di $f(a + h)$ secondo la formula $f(a + h) \sim f(a) + hf'(a)$. Per descrivere il significato esatto di questa approssimazione occorre premettere alcune definizioni. Funzioni che tendono a zero quando la variabile indipendente tende a un fissato valore a si dicono **infinitesimi** (per $x \rightarrow a$); ha interesse "confrontare" infinitesimi, per es. nel fare una derivata si confrontano (per $h \rightarrow 0$) i due infinitesimi $(f(a + h) - f(a))$ e h . Date due funzioni f, g la notazione $f(h) = o(g(h))$ (per $h \rightarrow 0$) significa che $f(h)/g(h) \rightarrow 0$. Particolarmente interessante è il caso $g(h) = h^n$ con $n = 0, 1, 2, \dots$; se $f(h) = o(h^n)$ si dice che f è un infinitesimo di ordine superiore a n , $f(h) = o(1)$ significa semplicemente che f è infinitesimo. Possiamo formulare il seguente

Teorema. Sono affermazioni equivalenti

- i) f è derivabile in un punto a (interno al suo dominio)
- ii) esiste una costante A tale che $f(a + h) - f(a) = Ah + o(h)$

Dimostrazione. i) \Rightarrow ii) : poiché f è derivabile in a si ha

$$[f(a + h) - f(a)]/h = f'(a) + o(1)$$

da cui moltiplicando per h si ottiene

$$f(a + h) - f(a) = f'(a)h + o(h)$$

cioè $A = f'(a)$

ii) \Rightarrow i) : dividendo per h si ottiene $[f(a + h) - f(a)]/h = A + o(1)$ e quindi il limite a primo membro esiste ed è uguale ad A , cioè la funzione è derivabile in a e la sua derivata è uguale a A .

Possiamo dunque scrivere la formula esatta

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + o(h)$$

che precisa in che senso $[f(a) + hf'(a)]$ è una approssimazione di $f(a+h)$.

5.2 Derivate di funzioni fondamentali, regole di derivazione

Sia $f : I \rightarrow R$, se per ogni $x \in I$ esiste la derivata $f'(x)$ diremo che $f' : I \rightarrow R$ è la **funzione derivata** di f , si scrive anche $Df(x)$ per $f'(x)$.

Siano f, g derivabili in un punto a interno al loro comune dominio, allora anche le funzioni $(f+g), fg$ sono derivabili in a e si ha: $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$; $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$; se poi $g(a) \neq 0$ anche f/g è derivabile in a e si ha $(f/g)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}$.

Proviamo per induzione la formula $Dx^n = nx^{n-1}$ dove $n \in N$. E' facile vedere che per $n = 1$ la formula è vera. Supposto la formula vera per n facciamo vedere che vale per $(n+1)$. Si ha $Dx^{n+1} = D(xx^n) =$ (usando la regola del prodotto) $= (Dx)x^n + x(Dx^n) = 1x^n + x(nx^{n-1}) = (n+1)x^n$ che è quello che si doveva dimostrare.

La regola più importante da trovare è quella per la derivata di una funzione composta. Sia f derivabile in a e g derivabile in $f(a)$, vogliamo determinare la derivata in a della funzione composta $g \circ f$. Si ha $(g \circ f)(a+h) - (g \circ f)(a) = g[f(a+h)] - g[f(a)]$, poiché f è derivabile in a si ha $f(a+h) = f(a) + hf'(a) + o(h)$, sostituendo abbiamo: $(g \circ f)(a+h) - (g \circ f)(a) = g[f(a) + hf'(a) + o(h)] - g[f(a)] =$ (poiché g è derivabile in $f(a)$) $= (hf'(a) + o(h))g'[f(a)] + o(hf'(a) + o(h))$. Dividendo per h si ottiene: $\frac{(g \circ f)(a+h) - (g \circ f)(a)}{h} = g'[f(a)]f'(a) + o(1)$. Dunque per la **derivata di funzione composta** si ha la regola (della catena)

$$(g \circ f)'(a) = g'[f(a)]f'(a)$$

Applichiamo questa formula all'identità $f[f^{-1}(x)] = x$ che definisce la funzione inversa: derivando ambo i membri si ottiene $f'[f^{-1}(x)](f^{-1})'(x) = 1$. Si deduce così la regola di **derivata di funzione inversa**

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'[f^{-1}(x)]}$$

Alcuni esempi:

1) Si ha $e^{x+h} - e^x = e^x(e^h - 1)$, dividendo per h dato che $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$, si

ottiene $De^x = e^x$.

2) Sia $a > 0$, poiché $a^x = e^{x \log a}$ si ha $Da^x = e^{x \log a} \log a = a^x \log a$.

3) Sia $x > 0$, si ha $x^\alpha = e^{\alpha \log x}$ per cui $Dx^\alpha = e^{\alpha \log x} \alpha/x = \alpha x^{\alpha-1}$ (abbiamo usato $D \log x = 1/x$).

4) Per la formula di derivata di funzione inversa si ha

$$D \arctan x = 1/(D \tan)(\arctan x)$$

poiché $D \tan y = 1/(\cos y)^2 = 1 + (\tan y)^2$, si ottiene

$$D \arctan x = 1/(1 + x^2)$$

5) Per la formula di derivata di funzione inversa si ha

$$D \arcsin x = 1/(D \sin)(\arcsin x)$$

poiché $D \sin y = \cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y}$ si ottiene

$$D \arcsin x = 1/\sqrt{1 - x^2}$$

5.3 Proprietà delle derivate

Sia f derivabile in un punto a (interno al dominio), ricordando che $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$, se $f'(a) > 0$ il rapporto incrementale $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ per $|h|$ sufficientemente piccolo si mantiene positivo, da questo si vede che $h < 0 \Rightarrow f(a+h) < f(a)$, $h > 0 \Rightarrow f(a+h) > f(a)$. Quando ciò accade si dice che f è **localmente crescente** in a ; analoga sarà la definizione di **localmente decrescente** in a . Abbiamo dunque il seguente risultato: $f'(a) > 0 (< 0) \Rightarrow f$ localmente crescente (decrescente) in a . Se invece si ha che $f'(a) = 0$ diremo che a è un **punto stazionario** per la f , in questo caso l'incremento $[f(a+h) - f(a)]$ è un infinitesimo di ordine superiore ad h (da ciò il nome). Riguardo al rapporto incrementale $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ possiamo vedere se esistono i limiti destro e sinistro, se esistono sono detti rispett. **derivata destra** e **derivata sinistra** della f in a . Una funzione è derivabile se e solo se la derivata destra e sinistra esistono e sono uguali. Per es. la funzione continua $|x|$ nell'origine ha derivata destra uguale a 1 e derivata sinistra uguale a -1 (e quindi non è ivi derivabile), il suo grafico presenta in $(0, 0)$ un punto angoloso ovvero uno

spigolo. Ricordiamo che se una funzione f è derivabile in tutti i punti di un intervallo I , la funzione $x \rightarrow f'(x)$ definita in I si chiama derivata (prima) della f ; per $n \in \mathbb{N}$ la derivata n -ma della f , denotata $f^{(n)}$ è per definizione la derivata prima della derivata $(n-1)$ -ma della f . La notazione $C^k(I)$ ($k \in \mathbb{N}$) indica l'insieme di tutte le funzioni definite su I che hanno la derivata k -ma continua; invece di $C^0(I)$ per le funzioni continue in I si scrive semplicemente $C(I)$. Si osservi che tutti questi insiemi $C^k(I)$ sono spazi vettoriali.

5.4 I classici teoremi sulle derivate

Le funzioni derivabili su un intervallo godono di importanti proprietà che ora illustreremo.

Teorema di Rolle. Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, se

- i) f è continua in $[a, b]$,
- ii) f è derivabile in (a, b) ,
- iii) $f(a) = f(b)$;

allora esiste $c \in (a, b)$ tale che $f'(c) = 0$.

Dimostrazione. La prima ipotesi implica (per il teorema di Weierstrass) che f ammette minimo e massimo (assoluti), esistono cioè $u, v \in [a, b]$ con $m = f(u) \leq f(x) \leq f(v) = M$ per ogni $x \in [a, b]$. Se $m = M$ la funzione è costante in $[a, b]$ e la tesi è soddisfatta in ogni punto di (a, b) . Sia dunque $m < M$, per la terza ipotesi non può essere $\{u, v\} = \{a, b\}$, supponiamo per esempio che $u \in (a, b)$. Mostriamo che u è un punto stazionario per la f . Per l'ipotesi iii) la f è derivabile, poiché u è interno per $|h|$ suff. piccolo $(u+h) \in (a, b)$ e poiché u è un punto di minimo si ha $[f(u+h) - f(u)] \geq 0$: questo comporta che la derivata destra (sinistra) in u è ≥ 0 (≤ 0), pertanto la derivata deve essere uguale a 0. **(c.d.d.)**

Se si indebolisce una qualsiasi delle tre ipotesi del teorema di Rolle (mantenendo le altre due) la sua tesi cessa di valere come mostreremo con tre controesempi.

L'ipotesi iii) si può indebolire solo prendendo $f(a) \neq f(b)$, come controesempio si prenda $f(x) = x$, $[a, b] = [0, 1]$: i) e ii) sono soddisfatte ma la tesi è falsa essendo sempre $f'(x) = 1$.

L'ipotesi ii) si può indebolire escludendo la derivabilità anche in un solo punto, come controesempio si prenda $f(x) = |x|$, $[a, b] = [-1, 1]$: i) e iii) sono soddisfatte ma la tesi è falsa essendo $f'(x)$ sempre diversa da 0 dove esiste.

L'ipotesi i) si può indebolire solo togliendo la continuità della funzione in un estremo dell'intervallo (questo perché la derivabilità implica la continuità), come controesempio si prenda $f(x) = x$ per $x \in [0, 1)$ e $f(1) = 0$: ii) e iii)

sono soddisfatte ma la tesi è falsa essendo $f'(x) = 1$ per $x \in (0, 1)$.

Definizione: sia $f : A \rightarrow R$ una funzione (qualsiasi) e sia il punto a **interno** ad A : si dice che a è un punto di **minimo relativo** per la f se esiste un intorno $J(a) \subset A$ tale che $f(x) \geq f(a)$ per ogni $x \in J(a)$; si dice che a è un punto di **massimo relativo** per la f se esiste un intorno $J(a) \subset A$ tale che $f(x) \leq f(a)$ per ogni $x \in J(a)$; tali punti si chiamano in generale **estremi relativi** per la f . E' importante ricordare sempre che la definizione richiede che il punto in questione sia interno al dominio della f .

Teorema di Fermat. Sia a un estremo relativo per una funzione f , se f è derivabile in a allora a è **stazionario**, cioè $f'(a) = 0$.

Dimostrazione. L'argomento è identico a quello usato nella dimostrazione del teorema di Rolle. (c.d.d.)

Il teorema di Rolle è strumentale per dimostrare il

Teorema di Lagrange. Sia $f : A \rightarrow R$, se

i) f è continua in $[a, b]$,

ii) f è derivabile in (a, b) ;

allora esiste $c \in (a, b)$ tale che $f(b) - f(a) = (b - a)f'(c)$.

Dimostrazione. Consideriamo la funzione ausiliaria $G(x) = f(x) - kx$ e cerchiamo di determinare il parametro k in modo che la G soddisfi le ipotesi del teorema di Rolle. Basterà imporre la condizione $G(b) = G(a)$. Si ottiene il valore $k = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, per il teorema di Rolle esiste $c \in (a, b)$ tale che $0 = G'(c) = f'(c) - k$; uguagliando i valori di k si ottiene la tesi. (c.d.d.)

Mostriamo ora varie applicazioni del teorema di Lagrange.

1) **Stima numerica:** sia f derivabile in un intorno di x , allora (per $|h|$ suff. piccolo) $f(x + h) - f(x) = hf'(x) + o(h)$ (per la derivabilità in x) e anche $f(x + h) - f(x) = hf'(x + \theta h)$ con $0 < \theta < 1$ (per il teorema di Lagrange). La prima formula dà solo una informazione locale e teorica, non può essere usata per una stima numerica. Non così la seconda formula, infatti se abbiamo una maggiorazione globale per la derivata prima nell'intorno di x come $|f'(x)| \leq M$ potremo scrivere che $|f(x + h) - f(x)| \leq M|h|$.

2) **Funzioni con derivata nulla:** sia f una funzione con derivata nulla in un intervallo I , allora se a è interno ad I e x è un punto qualsiasi di I si ha per il teorema di Lagrange $f(x) - f(a) = (x - a)f'(a + \theta(x - a))$ ($0 < \theta < 1$). Essendo la derivata nulla in ogni punto interno ad I , otteniamo che per ogni x si ha $f(x) = f(a)$: funzioni con derivata nulla in un intervallo sono ivi costanti. Osserviamo che in generale non è vero che funzioni con derivata

nulla sono costanti. Controesempio: ogni funzione definita sull'unione di due intervalli aperti disgiunti, costante in ciascun intervallo ma con costanti diverse.

3) **Calcolo di limiti:** calcoliamo un limite "difficile" usando il teorema di Lagrange. Si cerchi il $\lim_{x \rightarrow +\infty} [\sin(\sqrt{x+a}) - \sin(\sqrt{x})]$ (a costante positiva) (Si noti che questa non è nemmeno una forma indeterminata: ogni addendo è privo di limite). Appliciamo il teorema di Lagrange alla funzione $f(x) = \sin(\sqrt{x})$ relativamente ai punti x e $(x+a)$: $f(x+a) - f(x) = a f'(c_x)$ dove $x < c_x < x+a$. Si ha $f'(x) = \frac{\cos(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}$; a questo punto è facile vedere che il limite richiesto vale 0.

4) **Monotonia globale:** Se $f'(x) > 0$ (< 0) in un intervallo, allora la f è ivi strettamente crescente (strettamente decrescente). Sia infatti $x < y$, per il teorema di Lagrange si ha $f(y) - f(x) = (y-x)f'(c)$ con $x < c < y$, per le ipotesi fatte risulterà $f(y) - f(x) > 0$ ($f(y) - f(x) < 0$).

Teorema di Cauchy. Siano f, g continue in $[a, b]$, derivabili in (a, b) e sia $g(b) \neq g(a)$, inoltre le loro derivate non si annullino contemporaneamente; allora esiste $c \in (a, b)$ tale che $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$

Dimostrazione. Come per il teorema di Lagrange, si considera una funzione ausiliaria: $f(x) - kg(x)$. (c.d.d.)

5.5 Estremi relativi: condizioni sufficienti

Teorema. Sia f derivabile in un intorno di un punto a e sia $f'(a) = 0$: se f' cambia segno attraversando la radice a , questa è un estremo relativo per la f ; se f' non cambia segno (è positiva oppure negativa intorno ad a) allora non c'è estremo in a .

Dimostrazione. Se f' è positiva a sinistra e negativa a destra di a allora f cresce a sinistra e decresce a destra di a che è quindi un massimo relativo. (Nel caso simmetrico si avrà un minimo relativo). Se f' non cambia segno la f sarà crescente oppure decrescente in un intorno di a che quindi non è un estremo relativo. (c.d.d.)

Teorema. Supponiamo che in un punto a si abbia $f'(a) = 0$, $f''(a) \neq 0$, allora a è un estremo relativo per la f .

Dimostrazione. Usiamo l'ipotesi superflua che la f'' sia continua in a . Se per es. $f''(a) > 0$ per la permanenza del segno sarà $f''(x) > 0$ in un intorno di a e quindi $f'(x)$ strettamente crescente in questo intorno; d'altra parte è

$f'(a) = 0$ per cui f' sarà negativa a sinistra e positiva a destra di a e quindi per il teorema precedente a è un punto di minimo relativo per la f . (c.d.d.) Nulla si può concludere se si ha $f'(a) = 0, f''(a) = 0$, basta considerare il comportamento nell'origine delle due funzioni x^3 e x^4 .

5.6 I teoremi di l'Hôpital

Teorema (l'Hôpital). Siano f, g derivabili in (a, b) ed entrambe infinitesime per $x \rightarrow a$, sia inoltre $g'(x) > 0$ (oppure $g'(x) < 0$); supponiamo infine (è la cosa più importante) che esista il $\lim_{x \rightarrow a} f'(x)/g'(x)$. Allora il rapporto $f(x)/g(x)$ ammette limite e si ha

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Dimostrazione. Possiamo supporre $f(a) = g(a) = 0$. Usando il teorema di Cauchy si ha successivamente $f(x)/g(x) = [f(x) - f(a)]/[g(x) - g(a)] = f'(c_x)/g'(c_x)$ con $a < c_x < x$ da queste segue subito la tesi osservando che $x \rightarrow a \Rightarrow c_x \rightarrow a$. (c.d.d.)

Ci sono diversi altri teoremi di l'Hôpital e tutti riguardano forme indeterminate del tipo $0/0$ o ∞/∞ . In pratica l'esistenza del limite del rapporto delle derivate implica l'esistenza del limite del rapporto delle funzioni. Questi teoremi danno una regola semplice per risolvere alcune forme indeterminate, vanno però usati con cautela per evitare errori. Diamo qualche esempio.

1) $\lim_{x \rightarrow 0} (x \log x)$: si ha una forma indeterminata $0 \cdot \infty$ per renderla nella forma di un quoziente scriviamo $x \log x = \frac{\log x}{1/x}$ (avendo cura di passare a denominatore la funzione più semplice). Il quoziente delle derivate vale $\frac{-1/x^2}{-1/x^2} = -x$ e tende a 0 per $x \rightarrow 0$, pertanto anche il quoziente delle funzioni tende a zero; in definitiva $x \log x \rightarrow 0$.

2) $\lim_{x \rightarrow 0} (1/x - 1/\sin x)$: si ha una forma indeterminata $\infty - \infty$ per renderla nella forma di un quoziente scriviamo $(1/x - 1/\sin x) = \frac{\sin x - x}{x \sin x} = f(x)/g(x)$ (una forma $0/0$). Si ha $f'(x)/g'(x) = \frac{\cos x - 1}{\sin x + x \cos x}$ (ancora una forma $0/0$), si ha ancora $f''(x)/g''(x) = \frac{-\sin x}{2 \cos x - x \sin x}$, quest'ultima frazione non dà luogo a una forma indeterminata ma tende a 0; in definitiva $(1/x - 1/\sin x) \rightarrow 0$.

3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sin x + x)/x$: un ovvio calcolo mostra che questo limite vale 1, comunque la frazione presenta la forma indeterminata ∞/∞ . Se uno tentasse di usare la regola di l'Hôpital calcolerebbe $f'(x)/g'(x) = (1 + \cos x)/1$ e

questa frazione non ammette limite (ma lo ammette la frazione $f(x)/g(x)$). Se non esiste il limite del rapporto delle derivate non si può usare il teorema di l'Hôpital perché non è verificata l'ipotesi fondamentale; il quoziente delle funzioni può avere limite o può non averlo.

4) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log x/x^a$: per $a > 0$ abbiamo una forma indeterminata ∞/∞ ; il rapporto delle derivate vale $(1/x)/ax^{a-1} = 1/ax^a$ che tende a 0 per $x \rightarrow +\infty$. Dunque $\log x/x^a \rightarrow 0$ per ogni $a > 0$. (Il logaritmo va all'infinito più "piano" di qualunque radice).

5) Se $f(x)$ è derivabile in a sappiamo che $f(a+h) - f(a) - hf'(a) = o(h)$, è quindi naturale chiedersi se esiste il $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a) - hf'(a)}{h^2}$ che è una forma indeterminata $0/0$. Se supponiamo la f derivabile in un intorno di a , per la regola di l'Hôpital siamo indotti a considerare il $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(a+h) - f'(a)}{2h}$, se supponiamo che la f abbia derivata seconda in a questo rapporto ha limite $f''(a)/2$ e dunque per la regola di l'Hôpital $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a) - hf'(a)}{h^2} = f''(a)/2$. Pertanto si ha la formula (del secondo ordine)

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2}f''(a) + o(h^2).$$

6 Il polinomio di Taylor e sue applicazioni

6.1 Definizione

Sia f una funzione derivabile n volte in un punto a , il polinomio nella variabile h (di grado minore o uguale a n)

$$P_n^f(h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2!}f''(a) + \frac{h^3}{3!}f^{(3)}(a) + \dots + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(a)$$

si chiama polinomio di Taylor di ordine n della f relativo al punto a . Nel caso che si prenda $a = 0$ e $h = x$ il polinomio viene a volte chiamato di Mac Laurin e si scriverà

$$P_n^f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \frac{x^3}{3!}f^{(3)}(0) + \dots + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0)$$

Conviene conoscere i polinomi di Mac Laurin delle funzioni elementari, ecco un elenco:

$$e^x : \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}; \quad \sin x : \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}; \quad \cos x : \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

$$(1+x)^\alpha : \sum_{k=0}^n \binom{\alpha}{k} x^k; \quad \log(1+x) : \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k}; \quad \arctan x : \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$$

6.2 Formula di Taylor

Teorema (Formula di Taylor). Sia f una funzione derivabile $(n-1)$ volte in un intorno di un punto a e avente derivata n -ma in a , allora vale la formula

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2!} f''(a) + \dots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(a) + o(h^n).$$

Dimostrazione. Si procede come nell'esempio 5) di **6.6. (c.d.d.)**

Il polinomio di Taylor di una funzione è unico nel seguente senso:

Teorema. Supponiamo che per una funzione f derivabile p volte in un intorno dell'origine si sappia che $f(x) = A(x) + o(x^p)$ con A polinomio di grado minore o uguale a p , allora A è il polinomio di Taylor di ordine p della f intorno all'origine, cioè $A(x) = \sum_{k=0}^p \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0)$.

Dimostrazione. Se P_p^f è il polinomio di Taylor di ordine p della f si ha $f(x) = P_p^f(x) + o(x^p)$ ma anche per l'ipotesi fatta $f(x) = A(x) + o(x^p)$ da cui si ottiene $P_p^f(x) - A(x) = o(x^p)$, ma un polinomio di grado minore o uguale a p che sia $o(x^p)$ è il polinomio identicamente nullo, quindi $A = P_p^f$. **(c.d.d.)** Basandosi su questo risultato si può calcolare il polinomio di Taylor di una funzione "complicata" senza passare per la definizione.

Esempio. Si cerchi (intorno all'origine) P_7^f dove $f = \frac{x \sin(x^2)}{\sqrt[3]{1+x^4}}$; per le formule sopra si ha $\sin t = t - t^3/6 + o(t^3)$ e quindi $\sin(x^2) = x^2 - x^6/6 + o(x^6)$; $(1+t)^{-1/3} = 1 - t/3 + o(t)$ e quindi $(1+x^4)^{-1/3} = 1 - x^4/3 + o(x^4)$. Si ha allora $f(x) = (x^2 - x^6/6 + o(x^6))(x - x^5/3 + o(x^5)) = x^3 - x^7/3 - x^7/6 + o(x^7) = x^3 - x^7/2 + o(x^7)$. Pertanto il teorema di sopra ci dice che $P_7^f(x) = x^3 - x^7/2$.

6.3 L'errore nella formula di Taylor

La differenza $[f(a+h) - P_n^f(h)]$ rappresenta l'errore $E_n^f(h)$ che si commette sostituendo al valore $f(a+h)$ il polinomio di Taylor della funzione. La formula di Taylor ci dice che (nelle ipotesi messe) $E_n^f(h)$ è un infinitesimo di ordine superiore a n (è $o(h^n)$). A questo errore si può dare una forma tipo Lagrange utile per maggiorazioni.

Teorema. Se la f ha derivate fino all'ordine $(n+1)$ in un intorno di a allora

$$f(a+h) - P_n^f(h) = \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a+\theta h) \text{ dove } 0 < \theta < 1.$$

6.4 Convessità

Definizione. Sia f una funzione definita in un intervallo $[a, b]$ e derivabile in (a, b) , diremo che f è **convessa** in (a, b) se per ogni $x \in (a, b)$ la retta tangente al grafico di f nel punto $(x, f(x))$ resta sempre al di sotto del grafico; diremo che f è **concava** in (a, b) se per ogni $x \in (a, b)$ la retta tangente al grafico di f nel punto $(x, f(x))$ resta sempre al di sopra del grafico.

Teorema. Sia f derivabile due volte in (a, b) , se per ogni $x \in (a, b)$ $f''(x) \geq 0$ ($f''(x) \leq 0$) allora la funzione è convessa (concava) in (a, b) .

Dimostrazione. La differenza fra le ordinate della funzione e della retta tangente al grafico di f nel punto $(x, f(x))$ è data al variare di h dall'espressione $f(x+h) - f(x) - hf'(x)$ che vale $\frac{h^2}{2!} f''(x+\theta h)$. La tesi segue subito dall'ipotesi che la derivata seconda ha sempre segno costante. (c.d.d.)

Definizione. Si dice che un punto a è di **flesso** per la f se la retta tangente al grafico di f nel punto $(a, f(a))$ attraversa in questo punto il grafico di f . Dalla discussione fatta segue che i punti di flesso per una funzione f sono da ricercarsi tra le radici dell'equazione $f''(x) = 0$. Una condizione sufficiente a che un tale punto sia di flesso è che $f'''(a) \neq 0$. Se per un punto di flesso a si ha $f'(a) = 0$ si dice che a è un **flesso orizzontale**, in caso contrario si dirà che è un **flesso obliquo**. Osserviamo che si considera anche il concetto di convessità (o concavità) locale: le definizioni sono parallele a quelle di crescita o decrescenza locale.

6.5 Estremi relativi e assoluti

La formula di Taylor ci permette di perfezionare i risultati sull'esistenza di estremi relativi.

Teorema. Se una funzione f (regolare quanto occorre) ha derivata nulla in un punto (interno) a e la sua derivata p -ma è la prima derivata non nulla in a ($f(a) = f'(a) = \dots = f^{(p-1)}(a) = 0, f^{(p)}(a) \neq 0$) allora se p è pari a è un estremo relativo (minimo se $f^{(p)}(a) > 0$, massimo se $f^{(p)}(a) < 0$); se p è dispari a non è un estremo relativo (la funzione cresce in a se $f^{(p)}(a) > 0$, decresce se $f^{(p)}(a) < 0$).

Dimostrazione. Con le nostre ipotesi la formula di Taylor di ordine p si scrive

$$f(a+h) - f(a) = \frac{f^{(p)}(a)}{p!} + o(h^p) = h^p \left[\frac{f^{(p)}(a)}{p!} + o(1) \right],$$

se $|h|$ è sufficientemente piccolo l'espressione $\left[\frac{f^{(p)}(a)}{p!} + o(1) \right]$ ha il segno di $f^{(p)}(a)$. Se p è pari il fattore h^p non influisce sul segno, l'incremento $[f(a+h) - f(a)]$ non cambia segno e quindi avremo un estremo. Se p è dispari h^p cambia segno passando per l'origine e lo stesso farà l'incremento $[f(a+h) - f(a)]$ e dunque la funzione sarà crescente o decrescente in a . (c.d.d.)

Si noti che non sempre esiste la prima derivata non nulla (di una funzione infinite volte derivabile), per tali funzioni il criterio non è applicabile. E' possibile dare l'esempio di una funzione infinitamente derivabile (in R) diversa da zero fuori dall'origine ma ivi uguale a zero con tutte le sue derivate.

Cenno sulla ricerca degli estremi assoluti di una funzione: consideriamo il caso di una funzione f continua definita in un intervallo $[a, b]$. Per il teorema di Weierstrass esistono punti di massimo e di minimo assoluti, dove li dobbiamo cercare? Da quanto visto sinora dovrebbe essere chiaro che gli estremi assoluti vanno ricercati tra i seguenti punti: gli estremi a e b dell'intervallo, i punti dove la funzione non è derivabile, gli zeri della derivata prima. Una volta trovati questi punti basta valutare in essi la funzione per decidere col confronto quali sono di massimo e quali di minimo assoluto. (Non occorre determinare se i punti stazionari siano o no estremi relativi). Con qualche accorgimento a volte il metodo si può estendere a intervalli aperti o illimitati.

7 Calcolo delle primitive

7.1 Considerazioni generali

Definizione. Sia g una funzione definita in un intervallo limitato I , si dice che una funzione G definita in I è una **primitiva** di g se per ogni $x \in I$ si ha $G'(x) = g(x)$ (agli eventuali estremi di I si intenderà derivata destra o sinistra). Si vede subito che se $G(x)$ è una primitiva di $g(x)$ in I anche $(G(x) + c)$, dove c è una costante arbitraria, è una primitiva. Se G_1 e G_2 sono due primitive di g allora $(G_1 - G_2)$ è una funzione costante, questo perché funzioni con ugual derivata differiscono per una costante. Dunque se una funzione g ammette una primitiva G allora ne ammette infinite e sono tutte della forma $(G(x) + c)$ con c costante arbitraria. Il seguente teorema verrà dimostrato in seguito:

Teorema. Ogni funzione continua in un intervallo $[a, b]$ ammette primitive. Per un'infelice tradizione l'insieme delle primitive di una data funzione f viene a volte chiamato "integrale indefinito" e denotato $\int f(x) dx$ (la ragione di questa notazione sarà chiara in seguito). Se di f si conosce esplicitamente una primitiva F si suole scrivere $\int f(x) dx = F(x) + c$; adatteremo per le primitive di una f la notazione $\int f(x)$ e per semplicità ometteremo di scrivere la costante: per esempio scriveremo $\int \cos x = \sin x$, inoltre l'intervallo di definizione si intende sottinteso.

7.2 Prime regole di calcolo

Il nostro scopo è quello di trovare delle regole per istituire un calcolo di primitive. La prima regola è semplicemente "leggere alla rovescia" (ma con qualche accorgimento) qualsiasi tabella di derivate. Ecco un elenco di primitive che conviene conoscere a memoria

$$\int x^\alpha = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \quad \alpha \neq -1; \quad \int x^{-1} = \log x; \quad \int e^x = e^x; \quad \int \sin x = -\cos x$$
$$\int \cos x = \sin x; \quad \int \frac{1}{1+x^2} = \arctan x; \quad \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x$$

Anche le seguenti formule si deducono leggendo alla rovescia regole di derivazione, ma per poter essere usate richiedono un minimo di fantasia:

$$\int f'(g(x))g'(x) = f(g(x))$$

che particolareggiata dà luogo alle seguenti

$$\int f'(ax) = \frac{f(ax)}{a}; \int \frac{f'(x)}{f(x)} = \log(f(x)); \int e^{f(x)} f'(x) = e^{f(x)}; \int f(x)^p f'(x) = \frac{f(x)^{p+1}}{p+1}$$

Applicando queste formule si provano per esempio i seguenti risultati

$$\int \tan x = -\log(\cos x); \int xe^{-x^2} = e^{-x^2}/2; \int \frac{\log x}{x} = (\log x)^2/2$$

Tradizionalmente si espongono tre metodi di calcolo di primitive: per decomposizione, per parti e per sostituzione.

Primitive per decomposizione. Si tratta semplicemente di questo: se f è la funzione da integrare, scriviamo $f = f_1 + f_2$ e poi $\int f(x) = \int f_1(x) + \int f_2(x)$. Esempio: $\frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$ per cui $\int \frac{1}{x(x+1)} = \log x - \log(x+1)$.

Primitive per parti. Poiché $[f(x)g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ da questa integrando si ottiene la formula di integrazione per parti

$$\int f(x)g'(x) = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)$$

Per es. prendendo nella formula $g(x) = x$ e $f(x) = \log x$ oppure $\arctan x$ si ottiene rispett.

$$\int \log x = x \log x - x; \int \arctan x = x \arctan x - \frac{\log(1+x^2)}{2}.$$

Per calcolare $J = \int e^x \cos x$ occorrono due successive integrazioni per parti:

$$J = \int e^x (\sin x)' = e^x \sin x - \int \sin x e^x = e^x \sin x + \int e^x (\cos x)' = e^x \sin x + e^x \cos x - J$$

da qui risolvendo l'equazione si ricava $J = \frac{\sin x + \cos x}{2} e^x$.

Primitive per sostituzione. Dovendosi calcolare $\int f(x)$ a volte risulta conveniente un cambio di variabile. Poniamo $x = u(t)$, dove u è una funzione invertibile, e supponiamo di conoscere una primitiva $P(t)$ della funzione

$f[u(t)]u'(t)$, allora la funzione $P(u^{-1}(x))$ è una primitiva di $f(x)$: ciò è verificato dal seguente calcolo: $[P(u^{-1}(x))] = f[u(u^{-1}(x))]u'(u^{-1}(x))(u^{-1}(x))' = f(x)$. (Si ricordi la regola di derivata di funzione inversa).

Come esempio calcoliamo una primitiva di $f(x) = \sqrt{a^2 - x^2}$ dove a è una costante. Facciamo la sostituzione $x = a \sin t$ e cerchiamo una primitiva di $f(a \sin t) \cos t$. Abbiamo successivamente $\int \sqrt{a^2 - a^2(\sin t)^2} a \cos t = a^2 \int (\cos t)^2 = (a^2/2)(t + \sin t \cos t) = P(t)$. La primitiva richiesta è $P(\arcsin(x/a))$. Nell'espressione di $P(t)$ si metta $\arcsin(x/a)$ al posto di t , x/a al posto di $\sin t$ e $(1 - x^2/a^2)$ al posto di $\cos t$. Avremo il risultato

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} = (a^2/2) \arcsin(x/a) + (x/2)\sqrt{a^2 - x^2}$$

7.3 Integrazione delle funzioni razionali

Il metodo di sostituzione verrà usato sistematicamente allo scopo di ridurre, quando possibile, il calcolo di una primitiva a quello di primitive di funzioni razionali. Mostriamo un modo canonico di rappresentare le funzioni razionali conveniente per determinarne le primitive. Sia $T(x) = P(x)/Q(x)$ una funzione razionale. Se il grado di P è maggiore o uguale al grado di Q effettuiamo la divisione con resto, otterremo una rappresentazione $T(x) = A(x) + R(x)/Q(x)$ dove A, R sono polinomi e il grado di R è (strettamente) minore del grado di Q . Possiamo quindi limitarci a considerare funzioni razionali in cui il polinomio a numeratore ha grado minore del polinomio a denominatore. Sia dunque $t(x) = r(x)/q(x)$ una tale funzione, la forma delle primitive di $t(x)$ dipende solo dal denominatore $q(x)$, più precisamente dalla sua fattorizzazione.

A tal proposito premettiamo le nozioni contenute nella sezione che segue.

7.4 Fattorizzazione dei polinomi

Vale il seguente teorema fondamentale

Teorema. Sia P un polinomio nel campo complesso di grado maggiore o uguale a 1, allora esiste $a \in C$ tale che $P(a) = 0$, ovvero P ammette almeno una radice in C .

Sia P un polinomio di grado n , per il teorema di sopra esiste una radice, sia essa a_1 , per la regola di Ruffini avremo $P(z) = (z - a_1)P_1(z)$ con grado di $P_1 = n - 1$; potremo applicare il teorema fondamentale al polinomio P_1 e continuare. Si dimostra così il

Corollario: fattorizzazione in C . Sia P un polinomio di grado n in C , esistono n numeri complessi a_1, a_2, \dots, a_n e una costante non nulla c tali che $P(z) = c(z - a_1)(z - a_2)\dots(z - a_n)$.

Si osservi che gli a_i non sono necessariamente distinti. Raggruppando le radici coincidenti la fattorizzazione avrà la forma $P(z) = c(z-a_1)^{n_1}(z-a_2)^{n_2}\dots(z-a_p)^{n_p}$ dove le molteplicità n_i sono tali che $n_1 + n_2 + \dots + n_p = n$.

Teorema. Sia P un polinomio a coefficienti reali, allora se P ammette la radice α ammette anche la radice coniugata $\bar{\alpha}$.

Dimostrazione. Ricordiamo che in C valgono per il coniugio le proprietà: $\overline{(z+w)} = \bar{z} + \bar{w}$, $\overline{(zw)} = \bar{z}\bar{w}$. Tenuto conto di questo segue che $\overline{P(z)} = P(\bar{z})$, infatti per ogni monomio $c_i z^i$ di $P(z)$ essendo c_i reale si ha $\overline{c_i z^i} = c_i (\bar{z})^i$. c.d.d.

Corollario: fattorizzazione in R . Sia P un polinomio di grado n a coefficienti in R , allora P si fattorizza nel campo reale con fattori lineari (corrispondenti alle radici reali) e fattori quadratici (corrispondenti alle radici non reali) nel modo seguente

$$P(x) = c(x-a_1)^{r_1}\dots(x-a_s)^{r_s}(x^2+p_1x+q_1)^{k_1}\dots(x^2+p_tx+q_t)^{k_t}$$

dove $r_1 + \dots + r_s + 2k_1 + \dots + 2k_t = n$ e tutti i trinomi hanno discriminante negativo.

Dimostrazione. Segue da quanto visto e dal fatto che le radici non reali vengono a coppie coniugate, basta osservare che se u è una radice non reale si ha $(x-u)(x-\bar{u}) = (x^2 - 2\Re u x + |u|^2)$.

7.5 Decomposizione in frazioni semplici

Sia dunque

$$q(x) = c(x-a_1)^{r_1}\dots(x-a_s)^{r_s}(x^2+p_1x+q_1)^{k_1}\dots(x^2+p_tx+q_t)^{k_t},$$

allora $t(x)$ si può rappresentare come somma di frazioni semplici di questi soli due tipi

$$\frac{A}{(x-a)^r} \quad \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^s}$$

dove la prima frazione corrisponde a una radice reale a e la seconda a un trinomio con " Δ " negativo. Gli esponenti positivi r, s tengono conto della molteplicità delle radici. Le costanti A, B, C devono essere determinate. Se a è una radice di molteplicità $p \geq 1$, ad essa corrisponde nella rappresentazione di $t(x)$ la somma di p frazioni $\frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \dots + \frac{A_p}{(x-a)^p}$; a un trinomio di molteplicità h corrisponde la somma di h frazioni $\frac{B_1x+C_1}{(x^2+px+q)} + \frac{B_2x+C_2}{(x^2+px+q)^2} + \dots + \frac{B_hx+C_h}{(x^2+px+q)^h}$. Per determinare le costanti bisogna usare il principio di identità dei polinomi.

7.6 Calcolo delle primitive

Per quanto si è visto per calcolare le primitive delle funzioni razionali basta saper calcolare le primitive di frazioni del tipo $\frac{1}{(x-a)^r}$, $\frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^s}$. Per la funzione $\frac{1}{(x-a)^r}$ se $r = 1$ una primitiva è $\log(|x-a|)$, se $r > 1$ una primitiva è $\frac{(x-a)^{-r+1}}{-r+1}$. Per l'altra funzione consideriamo il caso $s = 1$, con un po' di calcoli si trova $\int \frac{Bx+C}{x^2+px+q} = (B/2) \log(x^2 + px + q) + \frac{2C-Bp}{K} \arctan \frac{2x+p}{K}$ dove $K = \sqrt{4q - p^2}$. Se $s > 1$ con semplici passaggi il calcolo di primitive per $\frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^s}$ si riduce a quello di $\frac{2x+p}{(x^2+px+q)^s}$ e di $\frac{1}{(x^2+px+q)^s}$. Per la prima funzione una primitiva è $\frac{(x^2+px+q)^{-s+1}}{-s+1}$; per la seconda con la sostituzione $(2x+p)/K = t$ il calcolo si riporta alla determinazione di $I_k = \int \frac{1}{(1+t^2)^k}$. Sappiamo che $I_1 = \arctan t$, nel modo che segue troveremo una formula ricorrente per I_k . Si ha $\frac{1}{(1+t^2)^k} = \frac{1+t^2-t^2}{(1+t^2)^k} = \frac{1}{(1+t^2)^{k-1}} - \frac{t^2}{(1+t^2)^k}$ per cui $I_k = I_{k-1} - (1/2) \int \frac{t}{(1+t^2)^k} (1+t^2)'$. Si esegue l'integrazione per parti e con semplici passaggi si trova $I_k = \frac{t}{2(k-1)(1+t^2)^{k-1}} + \frac{2k-3}{2k-2} I_{k-1}$.

7.7 Metodi di razionalizzazione

Dal momento che si sanno determinare esplicitamente le primitive delle funzioni razionali, un metodo potente per calcolare $\int f(x)$ consiste nell'effettuare una sostituzione $x = \phi(t)$ in modo che la funzione $f[\phi(t)]\phi'(t)$ risulti razionale. **Funzioni trigonometriche:** se si pone $\tan(x/2) = t$ ossia $x = 2 \arctan t = \phi(t)$, sappiamo dalla trigonometria che $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$; inoltre $\phi'(t) = \frac{2}{1+t^2}$. Pertanto se $F(x)$ è una qualsiasi espressione razionale negli argomenti $\sin x$ e $\cos x$ questa sostituzione riduce il calcolo di $\int F(x)$ alla ricerca di una primitiva di una funzione razionale. Ad es. per calcolare $\int \frac{1}{\sin x}$ si deve considerare $\int \frac{1+t^2}{2t} \frac{2}{1+t^2} = \int \frac{1}{t} = \log t$; e quindi si ha $\int \frac{1}{\sin x} = \log[\tan(x/2)]$. **Radici quadrate:** mostriamo ora come si calcola una primitiva di una funzione razionale negli argomenti x e $\sqrt{ax^2 + bx + c}$. Se $a > 0$ poniamo $\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{a}(x+t)$ da cui si ricava $x = \frac{at^2-c}{b-2at} = \phi(t)$ e quindi $\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{a} \frac{-at^2+bt+c}{b-2at}$; $\phi'(t) = \frac{-2a(at^2-bt+c)}{(b-2at)^2}$. Tutto ciò mostra che alla fine si tratterà di calcolare una primitiva di una funzione razionale. Se $a < 0$ osserviamo che il radicale è reale solo se x varia nell'intervallo $[\alpha, \beta]$ delle radici del trinomio, cioè $ax^2 + bx + c = a(x-\alpha)(x-\beta)$. Si può scrivere $\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{-a}(x-\alpha)\sqrt{\frac{\beta-x}{x-\alpha}}$, si vede da qui che la sostituzione

$t = \sqrt{\frac{\beta-x}{x-\alpha}}$ razionalizza l'integrale.

Esponenziali: Sia $R(u)$ una funzione razionale della variabile u e si voglia calcolare $\int R(e^x)$: la sostituzione $e^x = t$ ovvero $x = \log t$ razionalizza l'integrale, dovendosi infatti calcolare $\int R(t)/t$.

Ci sono anche altri casi in cui si può applicare questo metodo, però naturalmente non sempre è possibile razionalizzare. Ci sono anche varie altre tecniche particolari per il calcolo di primitive. Per concludere si tenga presente che esistono diverse funzioni "semplici" per cui non è possibile esprimere una loro primitiva in termini delle funzioni che usiamo abitualmente (ovviamente ciò non significa che queste funzioni non ammettano primitive: ogni funzione continua ammette primitive!); ecco qualche esempio:

$$\frac{e^x}{x}, e^{-x^2}, \sin(x^2), \frac{\sin x}{x}$$

8 L'integrale di Riemann

8.1 Partizioni

Sia $[a, b]$ ($a < b$) un intervallo (chiuso e limitato) in R : una **partizione** \mathcal{P} di $[a, b]$ è un sottoinsieme finito di $[a, b]$ che contenga sia a che b . Conveniamo di scrivere sempre in ordine strettamente crescente gli elementi di \mathcal{P} ; useremo perciò la notazione $\mathcal{P} = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$. Date due partizioni $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$ di $[a, b]$ diremo che \mathcal{P}_2 è più fine di \mathcal{P}_1 se (come insiemi) $\mathcal{P}_1 \subset \mathcal{P}_2$. Naturalmente in generale due partizioni \mathcal{P}, \mathcal{Q} non saranno confrontabili, però la partizione $\mathcal{P} \cup \mathcal{Q}$ è una partizione più fine sia di \mathcal{P} che di \mathcal{Q} .

8.2 Somme di Riemann

Tra le funzioni $f : [a, b] \rightarrow R$ **limitate** definiremo quelle **integrabili** secondo Riemann su $[a, b]$.

Data una tale funzione f e una partizione $\mathcal{P} = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$ definiamo le somme di Riemann per difetto e per eccesso rispettivamente

$$s(\mathcal{P}, f) = \sum_{k=1}^n l_k(x_k - x_{k-1}), \quad S(\mathcal{P}, f) = \sum_{k=1}^n L_k(x_k - x_{k-1})$$

dove $l_k = \inf\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}$, $L_k = \sup\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}$.

Teorema. Qualunque siano le partizioni \mathcal{P} , \mathcal{Q} si ha $s(\mathcal{P}, f) \leq S(\mathcal{Q}, f)$.

Dimostrazione. Si osservi preliminarmente che:

- i) per ogni partizione \mathcal{A} si ha $s(\mathcal{A}, f) \leq S(\mathcal{A}, f)$
- ii) $\mathcal{P}_1 \subset \mathcal{P}_2 \Rightarrow s(\mathcal{P}_1, f) \leq s(\mathcal{P}_2, f)$, $S(\mathcal{P}_1, f) \geq S(\mathcal{P}_2, f)$.

Le seguenti disuguaglianze

$$s(\mathcal{P}, f) \leq s(\mathcal{P} \cup \mathcal{Q}, f) \quad , \quad S(\mathcal{P} \cup \mathcal{Q}, f) \leq S(\mathcal{Q}, f)$$

provano la tesi. **(c.d.d.)**

Poniamo ora $s(f) = \sup_{\mathcal{P}} \{s(\mathcal{P}, f)\}$, $S(f) = \inf_{\mathcal{Q}} \{S(\mathcal{Q}, f)\}$, per quanto provato per ogni f limitata in $[a, b]$ vale la disuguaglianza

$$s(f) \leq S(f).$$

I numeri $s(f)$, $S(f)$ sono chiamati rispettivamente **integrale per difetto** e **integrale per eccesso** della f su $[a, b]$.

8.3 L'integrale di Riemann

Definizione. Si dirà che f è **integrabile** (secondo Riemann) su $[a, b]$ se $s(f) = S(f)$ e il valore comune di questi numeri è per definizione l'integrale (definito) su $[a, b]$ della f e si denota con $\int_a^b f(x)dx$.

Si riconosce facilmente un significato geometrico dell'integrale nel caso di una funzione f positiva. L'insieme $T = \{(x, y) : a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$ viene detto trapezoide definito dalla f , allora $\int_a^b f(x)dx$ vale l'area di T e le somme di Riemann per difetto e per eccesso valgono rispettivamente l'area di un plurirettangolo contenuto in T e l'area di uno contenente T e approssimano per difetto e per eccesso l'area di T .

Criterio di integrabilità: condizione necessaria e sufficiente a che una funzione limitata f su $[a, b]$ sia ivi integrabile è che

$$\forall \epsilon > 0 \exists \mathcal{P}_\epsilon : S(\mathcal{P}_\epsilon, f) - s(\mathcal{P}_\epsilon, f) < \epsilon$$

Esistono funzioni limitate non integrabili. Esempio: sia $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ così definita: $f(x) = 1$ se x è razionale e $f(x) = 0$ altrimenti. Si vede che per qualsiasi partizione di $[0, 1]$ le somme per difetto valgono sempre 0 e le somme per eccesso 1, pertanto $s(f) = 0$, $S(f) = 1$ e quindi la f non è integrabile.

Mostriamo che per ogni $p > 0$ la funzione $f(x) = x^p$ è integrabile su $[0, 1]$ e calcoliamone l'integrale. Sia $\mathcal{P}_n = \{0 < 1/n < \dots < k/n < \dots < 1\}$ allora

$$(x_k - x_{k-1}) = 1/n, \quad l_k = [(k-1)/n]^p, \quad L_k = [k/n]^p$$

$$S(\mathcal{P}_n, f) - s(\mathcal{P}_n, f) = \sum_{k=1}^n ([k/n]^p - [(k-1)/n]^p)(1/n) = 1/n$$

pertanto per il criterio di sopra la f risulta integrabile. Questi stessi calcoli mostrano che $\int_0^1 f(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} s(\mathcal{P}_n, f) = \lim_{n \rightarrow +\infty} S(\mathcal{P}_n, f) = 1/(p+1)$ dove

abbiamo usato la formula $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1/(n^{p+1}) \sum_{k=1}^n k^p = 1/(p+1)$.

Definizione. Data una partizione $\mathcal{P} = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$ di $[a, b]$ si chiama **parametro** di \mathcal{P} il numero $\delta_{\mathcal{P}} = \max_i (x_i - x_{i-1})$.

Teorema. Una funzione monotona in $[a, b]$ è ivi integrabile.

Dimostrazione. Si osservi che una tale funzione f risulta automaticamente limitata. Sia $\mathcal{P} = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$ una partizione di $[a, b]$. Per fissare le idee supponiamo f crescente. Per la differenza fra le somme integrali per eccesso e per difetto si ha (cfr. l'esempio sopra)

$$\begin{aligned} S(\mathcal{P}, f) - s(\mathcal{P}, f) &= \sum_{k=1}^n [(f(x_k) - f(x_{k-1}))](x_k - x_{k-1}) \leq \\ &\leq \delta_{\mathcal{P}} \sum_{k=1}^n [f(x_k) - f(x_{k-1})] = \delta_{\mathcal{P}} [f(b) - f(a)] \end{aligned}$$

Poiché $\delta_{\mathcal{P}}$ si può prendere piccolo a piacere la tesi è provata. (**c.d.d.**)

Definizione. Una funzione $f : A \rightarrow R$ si dice **uniformemente continua** se

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta(\epsilon) > 0 : |x - y| < \delta(\epsilon) \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon \quad (x, y \in A)$$

E' facile vedere che una funzione uniformemente continua in A è ivi continua, esistono però funzioni continue che non sono uniformemente continue. Si deve a Cantor il seguente

Teorema. Una funzione continua in un intervallo chiuso e limitato è ivi uniformemente continua.

Il teorema di Cantor permette di provare facilmente il

Teorema. Una funzione continua in un intervallo $[a, b]$ è ivi integrabile.

Consideriamo ora altri tipi di somme integrali. Sia dunque $f : [a, b] \rightarrow R$

una funzione limitata e $\mathcal{P} = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$ una partizione di $[a, b]$ e sia $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$, detto $C = (c_1, \dots, c_n)$, poniamo $\sigma(\mathcal{P}, C, f) = \sum_{k=1}^n f(c_k)(x_k - x_{k-1})$. Si noti che qualunque sia C si ha:

$$s(\mathcal{P}, f) \leq \sigma(\mathcal{P}, C, f) \leq S(\mathcal{P}, f) .$$

Definizione. Si dice che le somme $\sigma(\mathcal{P}, C, f)$ convergono (quando il parametro $\delta_{\mathcal{P}}$ tende a 0) se esiste un numero reale α (il limite) tale che

$$\forall \epsilon > 0 \exists h(\epsilon) > 0 : \forall \mathcal{P} \text{ con } \delta_{\mathcal{P}} < h(\epsilon) \text{ e } \forall C \text{ si ha } |\sigma(\mathcal{P}, C, f) - \alpha| < \epsilon .$$

Teorema (Darboux-Riemann). Una funzione f limitata in $[a, b]$ è ivi integrabile se e solo se le somme $\sigma(\mathcal{P}, C, f)$ convergono, il loro limite essendo il valore dell'integrale.

L'insieme delle funzioni (limitate) integrabili su $[a, b]$ sarà indicato con $\mathcal{R}[a, b]$.

8.4 Proprietà dell'integrale di Riemann

Il seguente teorema ci dice che $\mathcal{R}[a, b]$ è uno spazio vettoriale e che l'integrale è lineare su $\mathcal{R}[a, b]$.

Teorema Se $f, g \in \mathcal{R}[a, b]$ e c è un numero reale, allora $(f + g), cf \in \mathcal{R}[a, b]$ e inoltre

$$\int_a^b (f + g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx \quad , \quad \int_a^b cf(x)dx = c \int_a^b f(x)dx .$$

La dimostrazione segue facilmente dal teorema di Darboux-Riemann.

Teorema $f \in \mathcal{R}[a, b] \Rightarrow |f| \in \mathcal{R}[a, b]$.

Dimostrazione. Per ogni partizione \mathcal{P} di $[a, b]$ si ha $[S(\mathcal{P}, |f|) - s(\mathcal{P}, |f|)] \leq [S(\mathcal{P}, f) - s(\mathcal{P}, f)]$. **(c.d.d.)**

Il seguente teorema si enuncia dicendo che l'integrale di Riemann è monotono.

Teorema. Se $f, g \in \mathcal{R}[a, b]$ e $f(x) \leq g(x), x \in [a, b]$, allora $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$.

Dimostrazione. Si osservi che dalla definizione di integrale segue immediatamente che l'integrale di una funzione positiva è positivo. Per ipotesi si ha $0 \leq [g(x) - f(x)] = h(x)$, per cui $0 \leq \int_a^b h(x)dx = \int_a^b g(x)dx - \int_a^b f(x)dx$ cioè $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$. **(c.d.d.)**

Corollario. Sia $f \in \mathcal{R}[a, b]$: vale la disuguaglianza $|\int_a^b f(x)dx| \leq \int_a^b |f(x)|dx$

(segue dal fatto che $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$).

Teorema della media integrale Sia $f \in \mathcal{R}[a, b]$, allora esiste un numero $\bar{f} \in [\inf f, \sup f]$ tale che

$$\int_a^b f(x)dx = (b - a)\bar{f}$$

se f è continua per il teorema dei valori intermedi \bar{f} è un valore assunto, cioè esiste $c \in [a, b]$ tale che

$$\int_a^b f(x)dx = (b - a)f(c)$$

Dimostrazione. Basta osservare che $\inf f \leq f(x) \leq \sup f$ e applicare la monotonia dell'integrale. **(c.d.d.)**

La quantità $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$ viene chiamata **valore medio** della f in $[a, b]$.

Teorema. Se $f \in \mathcal{R}[a, b]$ e $[c, d] \subset [a, b]$ allora la restrizione \tilde{f} di f a $[c, d]$ è in $\mathcal{R}[c, d]$.

Dimostrazione. Fissiamo $\epsilon > 0$, poiché $f \in \mathcal{R}[a, b]$ esiste una partizione \mathcal{P} di $[a, b]$ tale che $[S(\mathcal{P}, f) - s(\mathcal{P}, f)] < \epsilon$. Sia $\mathcal{Q} = \mathcal{P} \cup \{c, d\}$, dato che \mathcal{Q} è più fine di \mathcal{P} si ha pure $[S(\mathcal{Q}, f) - s(\mathcal{Q}, f)] < \epsilon$. Sia $\mathcal{T} = \mathcal{Q} \cap [c, d]$, allora \mathcal{T} è una partizione di $[c, d]$. Si ha infine $[S(\mathcal{T}, \tilde{f}) - s(\mathcal{T}, \tilde{f})] < \epsilon$ perché gli addendi di queste somme sono alcuni degli addendi delle somme precedenti (tutti gli addendi sono positivi). **(c.d.d.)**

Il seguente importante teorema ha una evidente interpretazione geometrica:

Teorema (Additività dell'integrale). Sia $f \in \mathcal{R}[a, b]$ e $a < c < b$, allora

$$(*) \quad \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Dimostrazione. Per calcolare $\int_a^b f(x)dx$ non è restrittivo considerare solo partizioni che abbiano un nodo in c , tenuto conto di questo si prova facilmente la tesi. **(c.d.d.)**

Definizione. Sia $f \in \mathcal{R}[a, b]$ e siano $u < v$ due punti di $[a, b]$, allora si pone per definizione $\int_v^u f(x)dx = -\int_u^v f(x)dx$. Con questa posizione la formula (*) vale qualunque sia l'ordine dei numeri a, b, c .

Definizione. Sia $f \in \mathcal{R}[a, b]$, per ogni $x \in [a, b]$ si definisca $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ (la definizione è corretta perché f è integrabile in ogni sottointervallo di $[a, b]$), la funzione $F(x)$ si chiama **funzione integrale** della f . Si noti che $F(a) = 0, F(b) = \int_a^b f(t)dt$; se f è positiva allora F è crescente.

Teorema $F \in C[a, b]$.

Dimostrazione. Sia $y \in (a, b)$ e mostriamo la continuità in y (la dimostrazione con le ovvie modifiche vale anche agli estremi dell'intervallo). Per $|h|$ sufficientemente piccolo anche $(y + h) \in (a, b)$, si ha $|F(y + h) - F(y)| = |\int_y^{y+h} f(t)dt| \leq |h|M$, dove M è un maggiorante per $|f(t)|$ (esiste perché f è limitata). Questa disuguaglianza prova l'asserto. (c.d.d.)

Teorema fondamentale del calcolo integrale. Sia f una funzione continua in $[a, b]$, allora la sua funzione integrale F è una primitiva di f .

Dimostrazione. Sia $y \in (a, b)$ e mostriamo che $F'(y) = f(y)$ (la dimostrazione con le ovvie modifiche vale anche agli estremi dell'intervallo). Per $|h|$ sufficientemente piccolo anche $(y + h) \in (a, b)$, si ha $[F(y + h) - F(y)] = \int_y^{y+h} f(t)dt$. Applicando il teorema della media integrale alla funzione continua f si può scrivere $[F(y + h) - F(y)] = hf(y + \theta_h h)$ dove $0 \leq \theta_h \leq 1$, facendo tendere h a zero il punto $(y + \theta_h h)$ tende al punto y e quindi per la continuità $f(y + \theta_h h)$ tende a $f(y)$. Abbiamo dunque $F'(y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(y + h) - F(y)}{h} = f(y)$ e la tesi è provata. (c.d.d.)

Si noti che è con questo teorema che si dimostra che le funzioni continue ammettono primitive. Vediamo una immediata ma importante conseguenza di questo teorema. Sia P una qualunque primitiva di f in $[a, b]$, allora P e F avendo la stessa derivata differiscono per una costante: $P(x) = \int_a^x f(t)dt + c$, facendo $x = a$ si ottiene $P(a) = c$ e quindi $P(x) - P(a) = \int_a^x f(t)dt$; facendo $x = b$ si ottiene la così detta

Formula fondamentale del calcolo integrale

$$\int_a^b f(t)dt = P(b) - P(a)$$

dove, ripetiamo, P è una qualsiasi primitiva di f in $[a, b]$.

Non è in contraddizione col teorema fondamentale del calcolo integrale questo fatto: esistono funzioni integrabili su $[a, b]$ che non ammettono primitive. Per poter dare un esempio premettiamo il

Teorema. Se una funzione g definita in $[a, b]$ è la derivata di un'altra funzione, allora g ha la proprietà dei valori intermedi.

Dimostrazione. Sia $a \leq \alpha < \beta \leq b$ e sia per esempio $g(\alpha) < c < g(\beta)$, dobbiamo provare che esiste $\gamma \in [\alpha, \beta]$ con $g(\gamma) = c$. Sia G una primitiva di g , e consideriamo la funzione $H(x) = G(x) - cx$, si ha $H'(\alpha) = [g(\alpha) - c] < 0$, $H'(\beta) = [g(\beta) - c] > 0$ per cui la funzione H è decrescente in α e crescente in β ; ma H essendo continua in $[\alpha, \beta]$ ammette ivi minimo

che dovrà essere assunto in un punto interno γ ; per il teorema di Fermat la sua derivata è nulla in questo punto. Si ha pertanto $0 = H'(\gamma) = g(\gamma) - c$. (c.d.d.)

Esempio. La funzione $f(x) = \operatorname{sgn} x$ è integrabile in $[-1, 1]$ ma non ammette ivi primitive. Infatti essendo f crescente e limitata, $f \in \mathcal{R}[-1, 1]$; non avendo f la proprietà dei valori intermedi (prende il valore 0 e il valore 1 ma nessun valore intermedio) non può ammettere primitive. Il teorema fondamentale del calcolo integrale non si applica perché f non è continua. Si noti che ogni funzione limitata e monotona in $[a, b]$ che sia discontinua fornisce un controesempio. Esistono funzioni limitate in $[a, b]$, non monotone e discontinue che risultano integrabili: si potrebbe infatti dimostrare il

Teorema. Se f è una funzione limitata in $[a, b]$ e ivi continua con l'eccezione al più di un numero finito di punti, allora $f \in \mathcal{R}[a, b]$.

8.5 Calcolo di integrali

Dovendo calcolare integrali di funzioni continue si può usare la formula fondamentale del calcolo integrale e di conseguenza avvalersi delle regole di calcolo per le primitive. L'integrazione per parti non richiede particolari commenti: per quanto già visto si ha la formula

$$\int_a^b f(t)g'(t)dt = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'(t)g(t)dt$$

Per quanto riguarda il metodo di sostituzione, dovendo calcolare $\int_a^b f(x)dx$, sappiamo che entra in gioco $\int f[g(t)]g'(t)dt$ dove $x = g(t)$ è la sostituzione. Mostriamo che si possono determinare α, β in modo tale che $\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f[g(t)]g'(t)dt$. Sia $P(x)$ una primitiva di $f(x)$; allora $P[g(t)]$ è una primitiva di $f[g(t)]g'(t)$ come si verifica subito derivando. Per la formula fondamentale del calcolo integrale si ha

$$\int_a^b f(x)dx = P(b) - P(a), \quad \int_\alpha^\beta f[g(t)]g'(t)dt = P[g(\beta)] - P[g(\alpha)]$$

Le due espressioni saranno uguali se $g(\beta) = b, g(\alpha) = a$. Pertanto la formula di sostituzione per gli integrali con la sostituzione $x = g(t)$ è

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f[g(t)]g'(t)dt$$

dove α, β devono solo soddisfare la condizione $g(\beta) = b, g(\alpha) = a$.

Si noti che **non occorre** che la funzione $g(t)$ sia invertibile.

Negli esempi che seguono si considerano solo funzioni continue.

1) Le funzioni f, g siano rispettivamente pari e dispari, h sia periodica di periodo $T > 0$ e $y \in R$ si ha

$$\int_{-a}^a f(x)dx = 2 \int_0^a f(x)dx, \quad \int_{-a}^a g(x)dx = 0, \quad \int_y^{y+T} h(x)dx = \int_0^T h(x)dx$$

$\int_{-a}^a f(x)dx = \int_{-a}^0 f(x)dx + \int_0^a f(x)dx$; con la sostituzione $x = -t$ si ottiene $\int_{-a}^0 f(x)dx = -\int_a^0 f(-t)dt = \int_0^a f(t)dt$ e la prima formula è provata.

$\int_{-a}^a g(x)dx = \int_{-a}^0 g(x)dx + \int_0^a g(x)dx$; con la sostituzione $x = -t$ si ottiene $\int_{-a}^0 g(x)dx = -\int_a^0 g(-t)dt = -\int_0^a g(t)dt$ e la seconda formula è provata.

$\int_y^{y+T} h(x)dx = \int_y^0 h(x)dx + \int_0^T h(x)dx + \int_T^{y+T} h(x)dx$; con la sostituzione $x = T + t$ si ottiene $\int_T^{y+T} h(x)dx = \int_0^y h(T+t)dt = -\int_y^0 h(t)dt$ e la terza formula è provata.

2) Sia p un intero positivo, si calcolino $\int_0^{\pi/2} (\sin x)^p dx$, $\int_0^{\pi/2} (\cos x)^p dx$.

Notiamo che con la sostituzione $x = (\pi/2 - t)$ si ha

$$\int_0^{\pi/2} (\cos x)^p dx = -\int_{\pi/2}^0 [\cos(\pi/2 - t)]^p dt = \int_0^{\pi/2} (\sin t)^p dt$$

e quindi i due integrali richiesti hanno lo stesso valore. Calcoliamo il primo integrale:

$$\begin{aligned} J_p &= \int_0^{\pi/2} (\sin x)^p dx = -\int_0^{\pi/2} (\sin x)^{p-1} (\cos x)' dx = \\ &= -(\sin x)^{p-1} (\cos x) \Big|_0^{\pi/2} + (p-1) \int_0^{\pi/2} (\sin x)^{p-2} (\cos x)^2 dx = \\ &= (p-1) \int_0^{\pi/2} (\sin x)^{p-2} [1 - (\sin x)^2] dx = (p-1) J_{p-2} - (p-1) J_p \end{aligned}$$

da cui si ottiene la formula ricorrente $J_p = \frac{p-1}{p} J_{p-2}$. Per $p = 2$, tenuto conto che $J_0 = \pi/2$, si ottiene $J_2 = \int_0^{\pi/2} (\sin x)^2 dx = \int_0^{\pi/2} (\cos x)^2 dx = \pi/4$.

3) Si calcoli $\int_0^R \sqrt{R^2 - x^2} dx$: con la sostituzione $x = R \sin t$ si ottiene $\int_0^R \sqrt{R^2 - x^2} dx = R^2 \int_0^{\pi/2} (\cos t)^2 dt = (\pi/4) R^2$.

4) Consideriamo l'integrale $\int_1^n \frac{dx}{x} = \log n$. Sia \mathcal{P}_n la partizione $\{1, 2, \dots, n\}$ dell'intervallo $[1, n]$, avremo

$$s(\mathcal{P}_n, 1/x) = \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} < \log n < S(\mathcal{P}_n, 1/x) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}.$$

Posto $H_n = (1 + 1/2 + \dots + 1/n)$ abbiamo $H_n - 1 < \log n < H_n - 1/n$ ovvero $\log n + 1/n < H_n < \log n + 1$: per n grande $H_n \sim \log n$.

5) Consideriamo l'integrale $\int_1^n \frac{dx}{x^2} = (1 - 1/n)$. Sia \mathcal{P}_n la partizione $\{1, 2, \dots, n\}$ dell'intervallo $[1, n]$, avremo

$$s(\mathcal{P}_n, \frac{1}{x^2}) = \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^2} < (1 - 1/n) < S(\mathcal{P}_n, \frac{1}{x^2}) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^2}.$$

Posto $D_n = (1 + 1/2^2 + \dots + 1/n^2)$ abbiamo $D_n - 1 < (1 - 1/n) < D_n - 1/n^2$ ovvero $(1 - 1/n + 1/n^2) < D_n < 2 - 1/n$: questo implica, poiché la successione $\{D_n\}$ è crescente, che D_n converge a un numero compreso fra 1 e 2 (questo numero è $\pi^2/6$).

8.6 Calcolo di aree, volumi e lunghezze

Aree. Il contorno di una figura piana A è a volte determinato dal grafico di due funzioni regolari: in tal caso l'area di A (denotata $m(A)$) può essere calcolata come differenza di due integrali. Per esempio se

$$A = \{(x, y) : a \leq x \leq b, f(x) \leq y \leq g(x)\}, \text{ allora } m(A) = \int_a^b [g(x) - f(x)] dx.$$

Se A è la regione limitata dall'asse x , dalle parallele all'asse y per a e per b e dal grafico di una funzione f (che può cambiare segno); allora

$$A = \{(x, y) : a \leq x \leq b, \min(f(x), 0) \leq y \leq \max(f(x), 0)\}, m(A) = \int_a^b |f(x)| dx.$$

Adoperando accorgimenti opportuni si può calcolare l'area di una figura piana in vari altri casi.

Esempio: l'equazione canonica dell'ellisse di semiassi a e b si scrive $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, posto $f(x) = (b/a)\sqrt{a^2 - x^2}$, si ha per il quarto di ellisse A che sta nel primo quadrante

$$A = \{(x, y) : 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq f(x)\}, m(A) = \int_0^a f(x) dx = (1/4)\pi ab$$

e quindi l'area di tutta l'ellisse vale πab .

Volumi. Sia A un solido compreso tra i piani $z = a$ e $z = b$, indichiamo con $S(z)$ l'area della sua sezione alla quota z , allora il suo volume si calcola con la formula $\text{vol}(A) = \int_a^b S(z)dz$ (la "fetta" $S(z)$ di spessore infinitesimo dz è assimilata a un cilindro il cui volume è appunto $S(z)dz$, il volume del solido si ottiene sommando tutte le fette, cioè facendo l'integrale).

Esempio: per una sfera A di raggio R centrata nell'origine si ha $S(z) = \pi(R^2 - z^2)$ per cui $\text{vol}(A) = 2\pi \int_0^R (R^2 - z^2)dz = (4/3)\pi R^3$.

Lunghezze. Sia A un arco di curva nel piano, definiamo lunghezza di A (denotata $l(A)$) l'estremo superiore dei perimetri delle spezzate inscritte nell'arco A . Consideriamo il caso che A sia il grafico di una $f \in C^1[a, b]$. Sia $\mathcal{P} = \{a = x_0, x_1, \dots, x_n = b\}$ una partizione di $[a, b]$, allora i punti di coordinate $(x_i, f(x_i))$ stanno sul grafico di f e per il perimetro p della spezzata che li unisce si ha $p = \sum_i \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2}$. Per il teorema di Lagrange si ha $(f(x_i) - f(x_{i-1})) = (x_i - x_{i-1})f'(c_i)$ dove $x_{i-1} < c_i < x_i$. Possiamo quindi scrivere $p = \sum_i (x_i - x_{i-1})\sqrt{1 + f'(c_i)^2}$. Vediamo che p è una somma integrale per la funzione $h(x) = \sqrt{1 + f'(x)^2}$, cioè $p = \sigma(\mathcal{P}, C, h)$: questo prova la formula

$$l(A) = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx .$$

9 Integrali impropri

9.1 Definizioni

Primo tipo. Consideriamo qui le funzioni che soddisfano a

$$(1) \quad f : (a, b] \rightarrow \mathbb{R} \quad \forall \alpha \in (a, b] \quad f \in \mathcal{R}[\alpha, b] .$$

Vogliamo estendere (in qualche caso) la definizione di integrale di Riemann su $[a, b]$ a questo tipo di funzioni. Sia $G(x) = \int_x^b f(t)dt$ ($G(x)$, a parte il segno, è la funzione integrale di f): consideriamo la possibile esistenza di $\lim_{x \rightarrow a^+} G(x) = A$. Se il limite esiste diremo che A è l'**integrale improprio** di f su $[a, b]$ e scriveremo (come prima) $A = \int_a^b f(t)dt$. Osseviamo subito che questa è effettivamente un'estensione coerente dell'integrale di Riemann, infatti se $f \in \mathcal{R}[a, b]$, poiché la funzione integrale di una funzione integrabile è continua,

si ha che A coincide con l'usuale integrale (di Riemann) $\int_a^b f(t)dt$. Tuttavia l'integrale improprio può esistere anche se la funzione f non è limitata a destra di a , sia per esempio $(a, b] = (0, 1]$, $f(x) = 1/\sqrt{x}$, allora $G(x) = \int_x^1 1/\sqrt{t}dt = 2(1 - \sqrt{x})$. Il limite per x che tende a 0^+ esiste ed è uguale a 2. Quando il limite di $G(x)$ esiste in R diremo che l'integrale converge, quando il limite di $G(x)$ vale $+\infty$ oppure vale $-\infty$ diremo che l'integrale diverge (in entrambi i casi l'integrale è regolare). Se nell'intervallo dell'esempio di sopra si prende la funzione $1/x$ si ha il caso di un integrale divergente a $+\infty$. Se il limite di $G(x)$ non esiste diremo che l'integrale non è regolare (non esiste). In modo del tutto analogo si definisce $\int_a^b f(t)dt$ per una $f : [a, b) \rightarrow R$ tale che per ogni β con $a \leq \beta < b$ sia $f \in \mathcal{R}[a, \beta]$.

Secondo tipo. Consideriamo qui le funzioni che soddisfano a

$$(2) \quad f : [a, +\infty) \rightarrow R \quad \forall k \geq a \quad f \in \mathcal{R}[a, k].$$

Vogliamo estendere (in qualche caso) la definizione di integrale di Riemann a questo tipo di funzioni. Sia $G(x) = \int_a^x f(t)dt$ ($G(x)$ è la funzione integrale di f): consideriamo la possibile esistenza di $\lim_{x \rightarrow +\infty} G(x) = A$. Se il limite esiste diremo che A è l'**integrale improprio** di f su $[a, +\infty)$ e scriveremo $A = \int_a^{+\infty} f(t)dt$. Quando il limite di $G(x)$ esiste in R diremo che l'integrale converge, quando il limite di $G(x)$ vale $+\infty$ oppure vale $-\infty$ diremo che l'integrale diverge (in entrambi i casi l'integrale è regolare). Se il limite di $G(x)$ non esiste diremo che l'integrale non è regolare (non esiste). In modo del tutto analogo si definisce $\int_{-\infty}^b f(t)dt$ per una $f : (-\infty, b] \rightarrow R$ tale che per ogni h con $h \leq b$ sia $f \in \mathcal{R}[h, b]$.

Sia ora $f : (-\infty, \infty) \rightarrow R$ tale che per ogni h, k con $h < k$ sia $f \in \mathcal{R}[h, k]$, vogliamo definire (quando sarà possibile) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$. Sia c un numero reale qualsiasi, per definizione si pone $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = \int_{-\infty}^c f(t)dt + \int_c^{+\infty} f(t)dt$ e il primo integrale esiste se e solo se esistono entrambi gli integrali a secondo membro.

Consideriamo degli esempi:

- i) Sia $p > 0$, si verifica facilmente che $\int_1^{+\infty} 1/x^p dx$ converge per $p > 1$ e diverge a $+\infty$ per $p \leq 1$
- ii) Si vede facilmente che $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$ converge.

9.2 Criteri di convergenza

Sia $f : [a, +\infty) \rightarrow R$ e soddisfi l'ipotesi (2); sia $G(x) = \int_a^x f(t)dt$: per definizione $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ esiste se e solo se esiste $\lim_{x \rightarrow +\infty} G(x)$ e questo limite esiste se e solo se

$$(*) \quad \forall \epsilon > 0 \quad \exists H(\epsilon) : H(\epsilon) < u, v \Rightarrow |G(u) - G(v)| = \left| \int_u^v f(t)dt \right| < \epsilon$$

Un criterio del tutto analogo sussiste per l'esistenza degli altri tipi descritti di integrali impropri.

Criteri di confronto. Poiché si ha $|\int_u^v f(t)dt| \leq \int_u^v |f(t)|dt$, dalla (*) deduciamo il seguente

Teorema. Siano f e g definite in $[a, +\infty)$ e sia g ivi integrabile in senso improprio, se si ha definitivamente $|f(x)| \leq g(x)$, allora anche f è integrabile in senso improprio in $[a, +\infty)$.

Sussiste un criterio di confronto del tutto analogo per l'esistenza degli altri tipi di integrali impropri.

Dal momento che si ha sempre $f(x) \leq |f(x)|$, da quanto visto segue

Teorema. Per gli integrali impropri vale la proprietà: $|f|$ integrabile $\Rightarrow f$ integrabile.

Mostreremo invece l'esistenza di una funzione f integrabile in senso improprio con $|f|$ non integrabile in senso improprio. Si osservi che per l'usuale integrale di Riemann la situazione è del tutto opposta !

Teorema. Le funzioni f e g definite in $[a, +\infty)$ soddisfino le ipotesi dichiarate sopra e sia $f(x) \geq g(x) \geq 0$ definitivamente: se $\int_a^{+\infty} g(t)dt = +\infty$ allora anche $\int_a^{+\infty} f(t)dt = +\infty$.

Sussiste un criterio di confronto del tutto analogo per gli altri tipi di integrali impropri.

Esempi:

1) Dimostriamo che l'integrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ converge. In 0 non c'è nessuna singolarità, basterà mostrare che converge $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$. Per la formula di integrazione per parti si può scrivere $\int_1^k \frac{\sin t}{t} dt = -\frac{\cos k}{k} + \cos 1 - \int_1^k \frac{\cos t}{t^2} dt$; per $k \rightarrow +\infty$ si ottiene $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \cos 1 - \int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2} dt$. L'ultimo integrale converge per il criterio del confronto: infatti $|\frac{\cos t}{t^2}| \leq \frac{1}{t^2}$ e l'integrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ come abbiamo visto converge.

2) Dimostriamo che l'integrale $\int_0^{+\infty} |\frac{\sin t}{t}| dt$ diverge. In 0 non c'è nessuna singolarità, basterà mostrare che diverge $\int_1^{+\infty} |\frac{\sin t}{t}| dt$. Si ha la disuguaglianza

$|\frac{\sin x}{x}| \geq \frac{(\sin x)^2}{x} = \frac{1-\cos 2x}{2x}$. Poiché l'integrale fra 1 e $+\infty$ di $1/2x$ diverge e quello di $\cos 2x/2x$ converge (si comporta come $\sin x/x$) ne segue la divergenza di $\int_1^{+\infty} |\frac{1-\cos 2t}{2t}| dt$ e per il criterio del confronto la divergenza di $\int_1^{+\infty} |\frac{\sin t}{t}| dt$.

Enunciamo ora i criteri di confronto più comunemente usati per provare convergenza o divergenza degli integrali impropri dei due tipi, basterà enunciare un caso per ogni tipo gli altri casi essendo analoghi.

i) Sia $f : (a, b] \rightarrow R$ e soddisfi l'ipotesi (1); se per un $0 < p < 1$ e una costante A in un intorno destro di a vale la disequaglianza $|f(x)| \leq A(x-a)^p$, allora f è integrabile in senso improprio. Se per un $p \geq 1$ e una costante B in un intorno destro di a vale la disequaglianza $f(x) \geq B(x-a)^p$, allora $\int_a^b f(t) dt = +\infty$.

ii) Sia $f : [a, +\infty) \rightarrow R$ e soddisfi l'ipotesi (2); se per un $p > 1$ e una costante A vale definitivamente la disequaglianza $|f(x)| \leq Ax^p$, allora f è integrabile in senso improprio. Se per un $p \leq 1$ e una costante B vale definitivamente la disequaglianza $f(x) \geq Bx^p$, allora $\int_a^{+\infty} f(t) dt = +\infty$.

Concludiamo questo capitolo con qualche osservazione. Sia f una funzione definita su un intervallo I (anche non limitato) con la possibile eccezione di un numero finito di punti dove in un intorno può risultare non limitata. Dividendo I in sottointervalli in modo opportuno, per la restrizione della f a ciascun sottointervallo ci si troverà in uno dei casi prima considerati. Si dirà che f è integrabile su I in senso improprio se **tutti** gli integrali estesi ai sottointervalli sono convergenti.

Consideriamo il caso di $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$. Abbiamo visto che per definizione questo integrale esiste se e solo se esistono $\int_{-\infty}^c f(t) dt$ e $\int_c^{+\infty} f(t) dt$ dove c è un numero qualsiasi; cioè se e solo se esistono

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{-x}^c f(t) dt, \quad \lim_{y \rightarrow +\infty} \int_c^y f(t) dt$$

Può capitare che esista il $\lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{-k}^k f(t) dt$ senza che esista $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$, come esempio si prenda la funzione $f(x) = \text{sgn}(x)$: per questa si ha

$$\int_{-\infty}^c f(t) dt = -\infty, \quad \int_c^{+\infty} f(t) dt = +\infty, \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{-k}^k f(t) dt = 0$$

Il $\lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{-k}^k f(t) dt$ quando esiste viene chiamato **valore principale di Cauchy**.

Sia $f(x) \geq 0$ in $[a, +\infty)$ e sia convergente $\int_a^{+\infty} f(t) dt$: si potrebbe credere che

necessariamente $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, questo però è in generale falso. Il risultato è vero se si aggiunge l'ipotesi che f sia definitivamente monotona: sia infatti $k = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ (il limite k esiste per la monotonia di f ed è $k \geq 0$); se fosse $k > 0$ sarebbe definitivamente $f(x) \geq k/2$ e quindi l'integrale divergerebbe.

Analisi Matematica

a.a. 2008-2009 cdl EDI (Ingegneria Edile) prof. C. Franchetti

Parte Seconda

N.B. I capitoli **10**, **11**, **13**, **14** che seguono sono riprodotti (con poche modifiche o aggiunte) dalle lezioni della prof.ssa M.P. Pera, a.a. 2007-2008.

Paragrafi stampati in piccolo come questo sono da considerarsi complementari e non indispensabili

10 Funzioni di più variabili

10.1 Lo spazio R^n

Lo spazio R^2 è l'insieme delle coppie ordinate di numeri reali; ossia delle coppie di numeri (x, y) , con $x, y \in R$. Analogamente, lo spazio R^3 è l'insieme delle terne ordinate di numeri reali. Più in generale, dato $n \in N$, con R^n si denota l'insieme delle n -uple di numeri reali. Gli elementi di R^n si dicono punti (o vettori). Dato un punto $P = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n$, i numeri x_1, x_2, \dots, x_n sono le coordinate di P (la prima, la seconda, ... la n -esima). Il punto di R^n con componenti tutte nulle si chiama origine di R^n (o vettore nullo) e si indica con 0 (come lo 0 dei reali).

R^n è uno **spazio vettoriale** (sui reali): dati $P = (x_1, x_2, \dots, x_n), Q = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ e $\alpha \in R$ la somma è definita da $(P + Q) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$; la moltiplicazione per uno scalare da $\alpha P = (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n)$. Se $P = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ è un punto di R^n , la sua **norma** (o modulo) è il numero $\|P\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$ che rappresenta la distanza di P dall'origine di R^n . La distanza tra due punti P e Q di R^n è, per definizione, il numero $d(P, Q) = \|P - Q\|$.

Nello spazio R^n (e, in particolare, in R^3 e R^2) si definisce il **prodotto scalare** di due vettori $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ e $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, denotato col simbolo $\langle x y \rangle$, ponendo $\langle x y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$. In R^3 o R^2 questo è il significato geometrico: il prodotto scalare tra due vettori x e y è dato dal prodotto delle loro norme per il coseno dell'angolo ϕ compreso (tra i due vettori). Dato che $\langle x y \rangle = \|x\| \|y\| \cos \phi \leq \|x\| \|y\|$, si deduce la disuguaglianza di Cauchy

- Schwarz (che vale in R^n): $|\langle xy \rangle| \leq \|x\| \|y\|$. Si osservi che la norma di un vettore $x \in R^n$ può essere definita anche attraverso il prodotto scalare. Si ha infatti $\|x\|^2 = \langle xx \rangle$.

Dati $Q \in R^n$ e $r > 0$, l'**intorno** (sferico) di centro Q e raggio r è l'insieme $I(Q, r) = \{P \in R^n : \|P - Q\| < r\}$ dei punti $P \in R^n$ che distano da Q meno di r . Dato $A \subset R^n$ e $Q \in R^n$, si dice che Q è un **punto di accumulazione** per A se ogni suo intorno contiene punti di A distinti da Q . Un punto $Q \in A$ si dice **isolato** se non è di accumulazione per A . Si dice che Q è di frontiera per A se ogni suo intorno contiene sia punti di A sia punti del complementare di A . L'insieme dei punti di frontiera di A è detto la **frontiera** di A si denota con ∂A . Discende dalla definizione che un insieme e il suo complementare hanno la stessa frontiera. Infine, si dice che Q è **interno** ad A se esiste un intorno di Q contenuto in A . Un sottoinsieme A di R^n si dice **aperto** se ogni suo punto è interno; si dice **chiuso** se il suo complementare è aperto. Si prova che un insieme è chiuso se e solo se contiene tutti i suoi punti di accumulazione. Dato $A \subset R^n$ la chiusura di A (denotata \bar{A}) è l'insieme $\bar{A} = A \cup \partial A$. Si può provare che un insieme è chiuso se e solo se coincide con la sua chiusura, inoltre la chiusura di un insieme A si ottiene aggiungendo ad A tutti i suoi punti di accumulazione.

Una successione $\{P_n\}_{n \in N}$ in R^2 (o, più in generale, in R^k) è un'applicazione che associa ad ogni $n \in N$ il punto $P_n \in R^2$ (risp. $P_n \in R^k$). Si dice che una successione $\{P_n\}$ di punti di R^2 (di R^k) tende (o converge) ad un punto $P \in R^2$ ($P \in R^k$), e si scrive $P_n \rightarrow P$ (per $n \rightarrow +\infty$), se e solo se $\|P_n - P\| \rightarrow 0$. Se una successione $\{P_n\}$ converge ad un punto P , si dice che P è il limite di $\{P_n\}$ e si scrive $\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n = P$ o in breve $\lim P_n = P$.

Teorema. Una successione $\{P_n\} = \{(x_n, y_n)\}$ di punti di R^2 converge a $P = (x, y)$ se e solo se $x_n \rightarrow x$ e $y_n \rightarrow y$. Più in generale, una successione $\{P_n\}$ in R^k converge a P se e solo se ogni componente di P_n converge alla corrispondente componente di P . Si dice che una successione $\{P_n\}$ di punti di R^2 (di R^k) tende a ∞ , e si scrive $P_n \rightarrow \infty$ (per $n \rightarrow +\infty$), se e solo se la norma di P_n tende a $+\infty$.

10.2 Funzioni di più variabili

Una funzione $f : A \rightarrow R$ si dice reale di due (di tre, di k) variabili reali se il suo dominio A è un sottoinsieme di R^2 (di R^3 , di R^k). Se f è una funzione

di k variabili, il valore che assume in un punto (x_1, x_2, \dots, x_k) si denota con $f(x_1, x_2, \dots, x_k)$ o, più semplicemente, con $f(P)$, dove P sta per (x_1, x_2, \dots, x_k) . Il **grafico** di una funzione di due variabili è il sottoinsieme di R^3 dato da $\{(x, y, f(x, y)) : (x, y) \in A\}$. Analogamente il grafico di una funzione di k variabili sarà un sottoinsieme di R^{k+1} .

Il dominio di una funzione f di più variabili può essere determinato esaminando l'espressione analitica della f . Per fare questo osserviamo che in alcuni casi le funzioni reali si possono comporre. Ad esempio si può comporre la funzione reale di due variabili reali $f(x, y) = (9 - x^2 - y^2)$ con la funzione reale di variabile reale $g(x) = \sqrt{x}$, ottenendo così la funzione $(g \circ f)(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$. Il dominio, in questo caso, è l'insieme dei punti (x, y) per cui ha senso scrivere $\sqrt{9 - x^2 - y^2}$, cioè il cerchio di raggio $r = 3$ con il centro situato nell'origine di R^2 . In generale il dominio della composizione di una funzione reale di due variabili reali $f(x, y)$ con una funzione reale di variabile reale $g(x)$ è l'insieme dei punti $(x, y) \in \text{Dom } f$ tali che $f(x, y) \in \text{Dom } g$. Esempio. Il dominio della funzione di due variabili $f(x, y) = \log(\sqrt{2x^2 + y^2} - 3 - 1)$ è l'insieme $\{(x, y) \in R^2 : x^2/2 + y^2/4 > 1\}$, che è la parte di piano esterna all'ellisse di equazione $x^2/2 + y^2/4 = 1$. Tale dominio è un insieme aperto e non limitato. La frontiera è l'ellisse mentre la chiusura è l'insieme $\{(x, y) : x^2/2 + y^2/4 \geq 1\}$.

Talvolta, invece di rappresentare il grafico (tridimensionale) di una funzione di due variabili si preferisce tracciare nel piano gli insiemi $S_c = \{(x, y) \in A : f(x, y) = c\}$, dove c è una costante reale. Tali insiemi sono detti insiemi (o linee) di livello di f . Esempio. Determiniamo le linee di livello della funzione di due variabili: $(x^2 + y^2 - 4x)$. Fissato $c \in R$ scriviamo $x^2 + y^2 - 4x = c$ nella forma $(x - 2)^2 + y^2 = c + 4$; se $c > -4$ l'insieme di livello S_c è la circonferenza di centro $(2, 0)$ e raggio $\sqrt{c + 4}$, se $c = -4$ si ha $S_c = \{(2, 0)\}$, mentre se $c < -4$ si ha $S_c = \emptyset$.

10.3 Limiti e continuità

Sia $f : A \rightarrow R$ una funzione reale di due variabili reali e sia $Q = (a, b)$ un punto di accumulazione per il dominio A di f . Si dice che $f(x, y)$ tende ad un numero reale h per $P = (x, y)$ che tende a Q e si scrive $\lim_{P \rightarrow Q} f(x, y) = h$ (o brevemente $f(x, y) \rightarrow h$ per $P \rightarrow Q$) se

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta = \delta(\epsilon) : P \in A, 0 < \|P - Q\| < \delta \Rightarrow |f(x, y) - h| < \epsilon.$$

Si dice che $f(x, y)$ tende a $+\infty$ [$-\infty$] per $P = (x, y)$ che tende a Q e si scrive $\lim_{P \rightarrow Q} f(x, y) = +\infty$ [$-\infty$] (in breve $f(x, y) \rightarrow +\infty$ [$-\infty$] per $P \rightarrow Q$) se

$$\forall M > 0 \exists \delta = \delta(M) : P \in A, 0 < \|P - Q\| < \delta \Rightarrow |f(x, y)| > M \text{ [$< -M$]}$$

Analoghe definizioni valgono se $f : A \rightarrow R$ è una funzione reale di k variabili reali.

Si chiama direzione un qualunque vettore di R^n di norma 1. Se $n = 2$, $v = (h, k)$ è una direzione se $h^2 + k^2 = 1$. Sia $f : A \subset R^2 \rightarrow R$ e sia P_0 interno a A , si dice che f ammette limite nella direzione $v = (h, k)$ per P tendente a $P_0 = (x_0, y_0)$ se esiste il

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(x_0 + th, y_0 + tk) = \lim_{t \rightarrow 0} f(P_0 + tv)$$

Si osservi che se esiste il limite per $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$ di $f(x, y)$, allora esiste ed è uguale al precedente il limite direzionale $\lim_{t \rightarrow 0} f(P_0 + tv)$ per ogni direzione v .

Di conseguenza, se il limite direzionale (in P_0) dipende dalla direzione (o non esiste per qualche direzione), allora $f(P)$ non ammette limite per $P \rightarrow P_0$. Tuttavia anche se per ogni direzione esiste il limite direzionale ed ha sempre lo stesso valore ciò non garantisce l'esistenza del limite. Consideriamo ad esempio la funzione $f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$. Il limite direzionale

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(th, tk) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2 h^2 tk}{t^4 h^4 + t^2 k^2} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{th^2 k}{k^2 + t^2 h^4}$$

esiste ed è uguale a 0 lungo ogni direzione (h, k) , $h^2 + k^2 = 1$. Per l'osservazione precedente, se esistesse il limite della funzione per $(x, y) \rightarrow (0, 0)$, esso sarebbe necessariamente uguale a 0. D'altra parte, considerando il limite della restrizione della funzione data alla curva $y = x^2$, si ottiene

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, x^2) = \frac{x^4}{2x^4} = 1/2$$

e quindi il limite considerato non esiste.

Per le funzioni di più variabili si hanno teoremi analoghi a quelli già incontrati nel caso di una variabile. Con le opportune modifiche, valgono infatti i seguenti risultati: teorema sulle operazioni tra limiti; teorema di unicità del limite; teorema della permanenza segno; teorema dei carabinieri (e del carabinieri). Diremo che una funzione $f : A \rightarrow R$, definita su un sottoinsieme A

di R^2 (o, più in generale, di R^k), è limitata [limitata superiormente, limitata inferiormente] se lo è la sua immagine. Una funzione f è limitata se e solo se esiste una costante $M > 0$ tale che $|f(P)| \leq M$ per ogni $P \in A$. Corollario (del teorema dei carabinieri). Siano f e g due funzioni reali definite in un sottoinsieme A di R^k . Supponiamo che f sia limitata e che $g(P) \rightarrow 0$ per $P \rightarrow P_0$. Allora $f(P)g(P) \rightarrow 0$ per $P \rightarrow P_0$.

La continuità di una funzione di più variabili si definisce analogamente al caso di una sola variabile: Definizione (di continuità in un punto). Data $f : A \rightarrow R$, con $A \subset R^k$, e dato un punto $P_0 \in A$ diremo che f è continua in P_0 se $f(P) \rightarrow f(P_0)$ per $P \rightarrow P_0$. Sia B un sottoinsieme del dominio A di f . Si dice che f è continua in B se è continua in ogni punto di B . Osserviamo che una funzione di una sola variabile $g(x)$, dove x appartiene a un sottoinsieme I di R , può essere pensata anche come una funzione di due variabili (costante rispetto alla seconda variabile y). Precisamente, la funzione $g(x)$, pensata definita in $I \times R \subset R^2$, è quella legge che ad ogni punto $(x, y) \in I \times R$ associa il numero $g(x)$.

Teorema (continuità delle funzioni composte). Se una funzione reale di una o più variabili reali si ottiene combinando funzioni continue mediante operazioni di somma, prodotto, quoziente e composizione, allora è continua.

Teorema di Weierstrass in R^k . Sia $f : A \rightarrow R$ una funzione continua definita in un sottoinsieme chiuso e limitato A di R^k . Allora f ammette minimo e massimo assoluti in A .

10.4 Derivate parziali

Sia $f(x, y)$ una funzione reale di due variabili reali. Se si fissa una delle due variabili, ad esempio se si fissa $y = y_0$, si ottiene la funzione di una sola variabile $x \rightarrow f(x, y_0)$, detta funzione parziale della x (per $y = y_0$). In modo analogo si può fare per funzioni di k variabili. Sia $f : A \rightarrow R$ una funzione reale definita su un aperto $A \subset R^2$ e sia $P_0 = (x_0, y_0)$ un punto di A . La derivata parziale nel punto P_0 di f rispetto alla x (o meglio, rispetto alla prima variabile) è (se esiste) la derivata in x_0 della funzione parziale (reale di variabile reale) $x \rightarrow f(x, y_0)$ e si denota con uno dei seguenti simboli:

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}, \quad \frac{\partial f(P_0)}{\partial x}, \quad f_x(x_0, y_0), \quad f_x(P_0)$$

Avremo pertanto che

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

In modo analogo si definisce la derivata parziale rispetto alla seconda variabile y . Diremo poi che f è derivabile (parzialmente) rispetto ad x se è derivabile (rispetto ad x) in ogni punto del dominio. In questo caso risulta ben definita la funzione, detta derivata rispetto ad x , che ad ogni punto (x, y) di A associa il numero $f_x(x, y)$. La definizione della funzione derivata rispetto a y è analoga. Si dice che f è derivabile se è derivabile sia rispetto ad x sia rispetto ad y .

A differenza di quanto accade per le funzioni di una sola variabile, una funzione di due (o più) variabili può essere derivabile senza che risulti continua: si consideri per esempio la funzione f che vale 1 lungo gli assi e 0 altrove, (come si vede facilmente) la f è derivabile nell'origine ed entrambe le sue derivate parziali sono ivi nulle, chiaramente la f non è continua nell'origine. Sia $f : A \rightarrow R$ definita su un aperto $A \subset R^2$ e sia $P_0 = (x_0, y_0) \in A$. Fissata una qualunque direzione v , cioè un vettore $v = (h, k) \in R^2$ tale che $\|v\| = 1$, la derivata (direzionale) di f in P_0 lungo la direzione v è (se esiste) il

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + th, y_0 + tk) - f(x_0, y_0)}{t}, = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial v}$$

Le derivate parziali di f in P_0 sono le derivate direzionali di f in P_0 lungo le direzioni degli assi. Più precisamente, $f_x(P_0)$ si ottiene per $v = (1, 0)$, mentre $f_y(P_0)$ si ottiene per $v = (0, 1)$.

Introduciamo ora il concetto di differenziabilità. Definizione. Sia $f : A \rightarrow R$ una funzione reale definita su un aperto $A \subset R^2$ e siano $P = (x, y), P_0 = (x_0, y_0)$ punti di A . Supponiamo che esistano $f_x(P_0)$ e $f_y(P_0)$. Diremo che f è **differenziabile** in P_0 , se

$$f(P) = f(P_0) + f_x(P_0)(x - x_0) + f_y(P_0)(y - y_0) + o(\|P - P_0\|)$$

Il polinomio omogeneo di primo grado

$$\langle df(P_0), P - P_0 \rangle = f_x(P_0)(x - x_0) + f_y(P_0)(y - y_0)$$

si chiama il differenziale della funzione f calcolato in P_0 e applicato al vettore incremento $P - P_0 = (x - x_0, y - y_0)$. Osserviamo che, se una funzione è

differenziabile in P_0 , il suo differenziale calcolato in P_0 e applicato al vettore incremento $P - P_0$ approssima l'incremento $f(x, y) - f(x_0, y_0)$ di f in modo tale che la differenza tende a zero più velocemente rispetto alla norma dell'incremento stesso. Geometricamente l'equazione

$$z = f(x_0, y_0) + f_x(P_0)(x - x_0) + f_y(P_0)(y - y_0)$$

rappresenta un piano passante per il punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ che è chiamato piano tangente al grafico di f in $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.

Se $f(x_1, x_2, \dots, x_k)$ è una funzione di k variabili che ammette derivate parziali in un punto P_0 di un aperto $A \subset R^k$, il **gradiente** di f in P_0 è il vettore $\text{grad}f(P_0) = (f_{x_1}(P_0), f_{x_2}(P_0), \dots, f_{x_k}(P_0))$ indicato anche con $\nabla_f(P_0)$. Avendo introdotto la nozione di gradiente, possiamo dire, in maniera equivalente alla definizione data, che f è differenziabile in P_0 se e solo se

$$\lim_{P \rightarrow P_0} \frac{f(P) - f(P_0) - \langle \nabla_f(P_0), P - P_0 \rangle}{\|P - P_0\|} = 0$$

Per funzioni reali di una variabile reale derivabilità e differenziabilità in un punto x_0 sono equivalenti; in più variabili non è più vero che l'esistenza delle derivate parziali (o anche delle derivate direzionali) in un punto implichi la differenziabilità in quel punto.

Teorema. Sia $f : A \rightarrow R$ una funzione reale definita su un aperto $A \subset R^k$ differenziabile in $P_0 \in A$; allora f è continua in P_0 .

Teorema (del differenziale totale). Sia $f : A \rightarrow R$ una funzione reale definita su un aperto $A \subset R^k$ con le derivate parziali continue in $P_0 \in A$; allora f è differenziabile (e quindi anche continua) in P_0 .

La differenziabilità di una funzione fornisce anche un'utile formula per il calcolo delle derivate direzionali:

Teorema. Sia $f : A \rightarrow R$ una funzione reale definita su un aperto $A \subset R^k$ differenziabile in $P_0 \in A$; allora f ammette derivate direzionali in P_0 lungo ogni direzione v e si ha

$$\frac{\partial f(P_0)}{\partial v} = \langle \nabla_f(P_0), v \rangle$$

Osservazione. Il gradiente di una funzione, nei punti in cui è non nullo, indica la direzione di massima e minima crescita della funzione stessa. Infatti, la massima variazione di f si ha in quelle direzioni v nelle quali $\text{grad}f(P_0)$

e v sono paralleli. In particolare la direzione di massima crescita si ha quando $v = \frac{\text{grad}f(P_0)}{\|\text{grad}f(P_0)\|}$ (cioè $\text{grad}f(P_0)$ e v concordi) mentre quella di minima crescita si ha quando $v = -\frac{\text{grad}f(P_0)}{\|\text{grad}f(P_0)\|}$ (cioè $\text{grad}f(P_0)$ e v discordi).

Definizione. Sia $f : A \rightarrow R$ una funzione reale definita in un sottoinsieme A di R^k , un punto P_0 interno ad A si dice di minimo [di massimo] relativo (o locale) per f in A se esiste un intorno $I(P_0, \delta)$ di centro P_0 e raggio $\delta > 0$ tale che $f(P) \geq f(P_0)$ [$f(P) \leq f(P_0)$] per ogni $P \in I(P_0, \delta)$. Un punto di minimo o di massimo relativo per f (in A) si dice estremante per f (in A).

Teorema di Fermat (per funzioni di due variabili). Sia $f : A \rightarrow R$ una funzione reale di due variabili reali e sia $(x_0, y_0) = P_0 \in A$ un punto estremante per f in A ; se f è derivabile in P_0 allora $\nabla_f(P_0) = (f_x(P_0), f_y(P_0)) = (0, 0)$.

Dimostrazione. Consideriamo la funzione parziale $x \rightarrow f(x, y_0)$: essendo il punto P_0 interno ad A , essa risulta definita almeno in un intervallo aperto di R contenente x_0 ; la funzione parziale è derivabile in x_0 e x_0 è estremante. Il Teorema di Fermat per funzioni di una variabile implica che $f_x(x_0, y_0) = 0$; in modo analogo si prova che in (x_0, y_0) si annulla anche la derivata parziale di f rispetto ad y .

Un punto $P_0 \in A$ tale che $f_x(P_0) = f_y(P_0) = 0$ è detto punto **critico** per f . Un punto critico che non è estremante è detto punto di **sella**.

Osserviamo che i punti estremanti di una funzione $f(x, y)$ vanno cercati tra le seguenti tre categorie: punti di frontiera; punti in cui la funzione non è derivabile; punti in cui si annullano entrambe le derivate parziali. Nella ricerca dei punti estremanti di una funzione di due variabili definita in un insieme $A \subset R^2$ si procede per esclusione: come primo provvedimento, tenendo conto del Teorema di Fermat, si escludono tutti i punti interni ad A in cui la funzione risulta derivabile ed una delle due derivate parziali è diversa da zero. Rimangono da analizzare i punti di frontiera, i punti interni in cui la funzione non è derivabile e i punti interni in cui si annullano entrambe le derivate. Per escludere altri punti di frontiera si tiene conto del fatto che se $P \in \partial A$ non è estremante per la restrizione di f alla frontiera di A , allora non lo è neppure per f in A . Di solito, lo studio della restrizione di f a ∂A consente di escludere la grande maggioranza dei punti di frontiera. Con tale procedimento quasi sempre rimangono pochi punti "sospetti" che possono essere analizzati a parte con metodi vari; ad esempio, se si cercano gli estremi assoluti di una funzione continua f in un insieme chiuso e limitato

A , si può procedere direttamente mediante il confronto dei valori assunti.

Definizione. Se la derivata di f rispetto ad x è di nuovo derivabile rispetto ad x , allora f si dice derivabile due volte rispetto ad x (o che ammette derivata seconda rispetto ad x due volte). La derivata rispetto ad x della derivata rispetto ad x di f calcolata in un punto (x, y) si indica con uno dei seguenti simboli: $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y)$, $f_{xx}(x, y)$. In maniera analoga, la derivata rispetto ad y della derivata rispetto ad x di f calcolata in un punto (x, y) si indica con uno dei simboli: $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y)$, $f_{xy}(x, y)$. In modo simile si definiscono le altre derivate seconde $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y)$.

Definizione (di funzione di classe C^n). Una funzione $f(x, y)$ si dice di classe C^0 se è continua; si dice di classe C^1 se è derivabile e le sue derivate parziali sono C^0 . In generale, si dice che f è di classe C^n se è derivabile e le sue derivate parziali sono di classe C^{n-1} . Infine, si dice che f è di classe C^∞ se è C^n per ogni $n \in \mathbb{N}$. La nozione di funzione di classe C^n si estende banalmente a funzioni di tre o più variabili. Vale il seguente

Teorema. Se f è una funzione di classe C^1 , allora è anche di classe C^0 .

Come conseguenza si hanno le seguenti proprietà: se f è una funzione di classe C^n , allora è anche di classe C^{n-1} ; la somma, il prodotto, il quoziente e la composizione di funzioni C^n , quando (e dove) ha senso, è ancora una funzione C^n . Si osservi che in \mathbb{R}^2 le funzioni costanti e le funzioni coordinate x e y sono di classe C^∞ e quindi anche i polinomi (e le funzioni razionali) di due variabili sono funzioni C^∞ .

Teorema di Schwarz. Se $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione di classe C^2 su un aperto A di \mathbb{R}^2 , allora

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y), \quad \forall (x, y) \in A.$$

Se una funzione è sufficientemente regolare, il Teorema di Schwarz ci permette di scambiare l'ordine di due qualunque delle sue derivate. Abbiamo visto che, nel caso di funzioni di una variabile aventi derivata seconda continua, il segno della derivata seconda in un punto critico fornisce informazioni sulla natura di tale punto. In analogia, per una funzione di due variabili, vogliamo ora dare una condizione sulle derivate seconde sufficiente a stabilire la natura di un punto critico. Sia $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione di classe C^2 su un aperto A di

\mathbb{R}^2 e sia $P_0 \in A$; consideriamo la matrice

$$H_f(P_0) = \begin{pmatrix} f_{xx}(P_0) & f_{xy}(P_0) \\ f_{yx}(P_0) & f_{yy}(P_0) \end{pmatrix}$$

che è detta la matrice hessiana di f in P_0 . Notiamo che, in conseguenza del Teorema di Schwarz, si ha $f_{xy}(P_0) = f_{yx}(P_0)$, pertanto la matrice è simmetrica. Si ha il seguente

Teorema. Sia $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione di classe C^2 su un aperto A di \mathbb{R}^2 ; supponiamo che in un punto $P_0 \in A$ si annullino le due derivate parziali di f . Se il determinante della matrice hessiana in P_0 , cioè il numero $\det H_f(P_0) = f_{xx}(P_0)f_{yy}(P_0) - (f_{xy}(P_0))^2$, è positivo, allora P_0 è un punto estremante. Se è negativo, P_0 non è estremante. In particolare se $\det H_f(P_0)$ è positivo, P_0 è di minimo relativo o di massimo relativo a seconda che la derivata $f_{xx}(P_0)$ sia positiva o negativa.

Si noti che se $\det H_f(P_0) = 0$ non si ha nessuna informazione sulla natura del punto critico P_0 .

10.5 Derivata di funzione composta

Sia $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione di classe C^1 su un aperto A di \mathbb{R}^2 , sia $(u(t), v(t)), t \in J$ l'equazione parametrica di una curva γ contenuta in A , allora la funzione

$$g : J \rightarrow \mathbb{R} \quad g(t) = f(u(t), v(t)), t \in J$$

è la restrizione di f a γ . Vale il seguente

Teorema (Derivata di funzione composta). La derivata di g è data dalla formula

$$g'(t) = f_x(u(t), v(t))u'(t) + f_y(u(t), v(t))v'(t)$$

10.6 Approssimazione al secondo ordine

Sia $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione di classe C^2 su un aperto A di \mathbb{R}^2 e siano $P_0 = (x_0, y_0)$ e $P = (x_0 + h, y_0 + k)$ punti di A , allora, considerando la restrizione della f al segmento di estremi P_0 e P , si ottiene l'espressione del polinomio di Taylor di ordine 2 per la f centrato in P_0 .

Teorema (Formula di Taylor al secondo ordine) Nelle ipotesi sopra dichiarate si ha

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + hf_x(x_0, y_0) + kf_y(x_0, y_0) + \\ + 1/2[h^2 f_{xx}(x_0, y_0) + 2hk f_{xy}(x_0, y_0) + k^2 f_{yy}(x_0, y_0)] + o(h^2 + k^2)$$

Prendendo $P = (x, y)$, $P_0 = O = (0, 0)$ la formula di Taylor si scrive

$$f(P) = f(O) + xf_x(O) + yf_y(O) + 1/2[x^2 f_{xx}(O) + 2xy f_{xy}(O) + y^2 f_{yy}(O)] + o(\|P\|^2)$$

Usando il gradiente e la matrice hessiana della f l'ultima formula si può scrivere

$$f(P) = f(O) + \langle \nabla_f(O), P \rangle + 1/2 \langle H_f(O)P, P \rangle + o(\|P\|^2)$$

dove con $H_f(O)P$ si intende il prodotto righe per colonne della matrice 2×2 $H_f(O)$ col vettore colonna P .

Osserviamo che per ogni matrice $n \times n$ M e vettore colonna P l'espressione $\langle H_f(O)P, P \rangle$ definisce quella che si chiama una **forma quadratica** di ordine n (di solito M è una matrice simmetrica), si tratta di un polinomio omogeneo di ordine due nelle n componenti del vettore P .

11 Equazioni differenziali ordinarie

11.1 Generalità

Sia $F : \Omega \rightarrow R$ una funzione continua su un aperto $\Omega \subset R^3$. Un'uguaglianza del tipo $F(x, y, y') = 0$ si chiama equazione differenziale (ordinaria del prim'ordine).

Definizione. Una funzione reale di una variabile $y : J \rightarrow R$ definita in un intervallo non banale J e di classe C^1 in J è una soluzione dell'equazione differenziale $F(x, y, y') = 0$ se, per ogni $x \in J$, si ha $(x, y(x), y'(x)) \in \Omega$ e $F(x, y(x), y'(x)) = 0$.

L'insieme di tutte le soluzioni di un'equazione differenziale si dice soluzione generale o integrale generale.

Il più banale esempio di equazione differenziale è $y' = f(x)$, dove f è una funzione continua definita in un intervallo $I \subset R$. In questo caso si ha $F(x, y, y') = y' - f(x)$ e la soluzione generale è data dall'insieme delle primitive di f . Un altro esempio semplice di equazione differenziale si ha quando ci poniamo il problema di cercare una funzione definita in un intervallo che ivi coincida con la sua derivata, cioè $y = y'$. In questo caso si ha $F(x, y, y') = y - y'$ e una funzione che risolve tale equazione è ovviamente $y(x) = e^x$. Si verifica immediatamente che anche $y(x) = c e^x$ è soluzione

qualunque sia la costante $c \in R$. Come nell'esempio precedente, anche in questo caso troviamo infinite soluzioni, dipendenti da una costante $c \in R$. Come vedremo meglio in seguito questo fatto non è casuale ma ha un preciso riscontro teorico.

Osserviamo che, data una soluzione $y : J \rightarrow R$, la sua restrizione ad un sottointervallo non banale di J è ancora una soluzione. Tra tutte le soluzioni, quelle che non sono restrizione di altre soluzioni si dicono massimali (o non prolungabili). Si potrebbe dimostrare che ogni soluzione non massimale è la restrizione di una massimale. In altre parole, ogni soluzione non massimale si può prolungare fino ad ottenere una soluzione massimale.

Talvolta la funzione $F(x, y, y')$ è del tipo $y' - f(x, y)$, con f definita (e continua) in un aperto $A \subset R^2$. Si osservi che in questo caso l'aperto Ω in cui è definita la funzione F è $A \times R$ e l'equazione può essere scritta nella forma $y' = f(x, y)$, detta **forma normale**. Da ora in avanti, a meno che non sia altrimenti specificato, ci occuperemo di equazioni differenziali in forma normale.

Sia $y' = f(x, y)$ un'equazione differenziale del prim'ordine in forma normale e sia $A \subset R^2$ l'aperto in cui è definita la funzione f . Dato un punto $(x_0, y_0) \in A$, ci si pone il problema di trovare, tra tutte le soluzioni y dell'equazione, quella che verifica (o quelle che verificano) la condizione $y(x_0) = y_0$. In altre parole, tra tutte le soluzioni, si cercano quelle il cui grafico contiene il punto (x_0, y_0) assegnato. Tale problema viene detto **Problema di Cauchy**. La condizione $y(x_0) = y_0$ si chiama condizione di Cauchy o anche condizione iniziale. Il punto x_0 si dice punto (o istante) iniziale (della soluzione cercata) e y_0 è il valore iniziale.

Teorema (di esistenza di Peano). Sia $f : A \rightarrow R$ una funzione continua su un aperto $A \subset R^2$. Allora, per ogni $(x_0, y_0) \in A$, l'equazione $y' = f(x, y)$ ammette almeno una soluzione che verifica la condizione $y(x_0) = y_0$.

Esempio (di non unicità della soluzione di un problema di Cauchy). Si osservi che le funzioni $y_1(x) = 0$ e $y_2(x) = x^3$ sono due soluzioni (massimali) dell'equazione differenziale $y' = 3\sqrt[3]{y^2}$ e verificano entrambe la condizione di Cauchy $y(0) = 0$.

Teorema (di esistenza e unicità per le equazioni del prim'ordine). Consideriamo l'equazione differenziale $y' = f(x, y)$, dove f è una funzione continua in un aperto $A \subset R^2$. Se f è derivabile rispetto ad y e la derivata parziale f_y è continua, allora, per ogni $(x_0, y_0) \in A$, l'equazione ammette un'unica soluzione massimale che verifica la condizione $y(x_0) = y_0$.

Dal teorema di esistenza e unicità si deduce un'importante conseguenza:

Corollario. Consideriamo l'equazione differenziale $y' = f(x, y)$, dove f è una funzione continua in un aperto $A \subset \mathbb{R}^2$. Supponiamo che f sia derivabile rispetto ad y con derivata continua. Allora i grafici di due differenti soluzioni massimali non possono intersecarsi.

11.2 Equazione a variabili separabili

Un'equazione differenziale del tipo $y' = a(x)h(y)$, dove a e h sono funzioni di una variabile definite in aperti di \mathbb{R} , si dice a **variabili separabili**. Supponiamo a continua e h di classe C^1 . Con tali ipotesi la funzione $f(x, y) = a(x)h(y)$ soddisfa le condizioni del teorema di esistenza e unicità. Supponiamo inoltre che a si annulli soltanto in punti isolati. Se $c \in \mathbb{R}$ è un punto tale che $h(c) = 0$, allora la funzione costante $y(x) = c$ è chiaramente una soluzione dell'equazione differenziale. Viceversa, (avendo supposto che a si possa annullare soltanto in punti isolati), ogni soluzione costante $y(x) = c$ è tale che $h(c) = 0$. Le soluzioni costanti sono quindi in corrispondenza biunivoca con gli zeri di h . Occupiamoci quindi di determinare le soluzioni non costanti. Se $y(x)$ è una tale soluzione, per il teorema di esistenza e unicità si deve avere $h(y(x)) \neq 0$ per ogni x nell'intervallo J in cui è definita y (altrimenti il grafico di y intersecerebbe il grafico di una soluzione costante). Dividendo l'uguaglianza $y'(x) = a(x)h(y(x))$ per $h(y(x))$ si ha $\frac{y'(x)}{h(y(x))} = a(x)$. Integrando entrambi i membri dell'uguaglianza si ottiene $\int \frac{y'(x)}{h(y(x))} dx = \int a(x) dx$. Dunque, denotando con $H(y)$ una primitiva di $1/h(y)$ (in un intervallo in cui h non si annulla) e con $A(x)$ una primitiva di $a(x)$, si ottiene $H(y(x)) = A(x) + c$, dove c è un'arbitraria costante. (Per verificare che $H(y(x))$ è una primitiva di $y'(x)/h(y(x))$, occorre tener conto del teorema di derivazione di una funzione composta). Ricavando la y (osserviamo esplicitamente che H è iniettiva perché la stiamo considerando in un intervallo in cui la sua derivata $H'(y) = 1/h(y)$ ha segno costante) si ha la formula

$$y(x) = H^{-1}(A(x) + c)$$

che dà le soluzioni non costanti dell'equazione a variabili separabili considerata. Si verifica poi che ogni funzione del tipo $y(x) = H^{-1}(A(x) + c)$, purché la si consideri definita in un intervallo, è effettivamente una soluzione

dell'equazione differenziale $y' = a(x)h(y)$.

Il metodo tradizionale (ma poco ortodosso) per risolvere l'equazione differenziale $y' = a(x)h(y)$ consiste nello scrivere l'equazione $\frac{1}{h(y)}dy = a(x)dx$ (cioè "separando le variabili") e poi nell'integrare entrambi i membri: $\int \frac{1}{h(y)}dy = \int a(x)dx$ da cui, con le notazioni introdotte sopra, si ottiene $H(y) = A(x) + c$ ovvero $y = H^{-1}(A(x) + c)$.

11.3 Equazioni lineari del prim'ordine

Una classe particolarmente importante di equazioni differenziali del prim'ordine in forma normale sono le equazioni lineari. Un'equazione differenziale del prim'ordine si dice lineare se è della forma $y' = a(x)y + b(x)$, dove a e b sono due funzioni continue definite in un intervallo J . In particolare, quando il termine noto b è identicamente nullo, l'equazione si dice lineare omogenea, e in questo caso la funzione identicamente nulla è soluzione dell'equazione differenziale (si chiama soluzione banale o nulla). Cominciamo con lo studiare l'equazione lineare omogenea. Il teorema seguente descrive l'integrale generale di tale equazione.

Teorema. Sia a una funzione continua in un intervallo $J \subset R$. Le soluzioni (massimali) dell'equazione (lineare omogenea del prim'ordine) $y' = a(x)y$ sono le funzioni del tipo $y(x) = ce^{A(x)}$, dove $A(x)$ è una primitiva di $a(x)$ in J e c un'arbitraria costante.

Dimostrazione. L'equazione è a variabili separabili. Si osserva che l'unica soluzione costante è quella banale (cioè la funzione identicamente nulla). Per trovare le soluzioni non costanti separiamo le variabili. Sia $y(x)$ una soluzione non costante. Per quanto osservato in precedenza, si ha $y(x) \neq 0$ per ogni x ; dividendo si ottiene $\frac{y'(x)}{y(x)} = a(x)$, da cui, $\int \frac{y'(x)}{y(x)}dx = \int a(x)dx$. Quindi $\log |y(x)| = A(x) + k$, dove $A(x)$ è una primitiva di $a(x)$ e k è un'arbitraria costante. Pertanto $|y(x)| = e^{A(x)+k} = e^k e^{A(x)}$, cioè $y(x) = \pm e^k e^{A(x)}$ o, equivalentemente, tenendo conto che e^k è un'arbitraria costante positiva, una qualunque soluzione non costante è data da $y(x) = c e^{A(x)}$, con $c \neq 0$. Poiché ponendo $c = 0$ nella precedente equazione si ottiene la soluzione banale (che avevamo considerato a parte), si può affermare che la soluzione generale dell'equazione differenziale $y' = a(x)y$ è data da $y(x) = c e^{A(x)}$, con c costante arbitraria, anche nulla.

Consideriamo ora l'equazione lineare non omogenea.

Teorema. Supponiamo che \bar{y} sia una soluzione dell'equazione differenziale lineare $y' = a(x)y + b(x)$, dove a e b sono funzioni continue in un intervallo $J \subset \mathbb{R}$. Allora la soluzione generale dell'equazione non omogenea si ottiene aggiungendo ad \bar{y} la soluzione generale dell'equazione omogenea associata $y' = a(x)y$, cioè ogni soluzione dell'equazione non omogenea è del tipo $y(x) = \bar{y}(x) + ce^{A(x)}$, $c \in \mathbb{R}$.

Dimostrazione. Proviamo prima che se u è una soluzione dell'equazione omogenea, allora la funzione $\bar{y} + u$ è soluzione della non omogenea. Dalle uguaglianze

$$\bar{y}'(x) = a(x)\bar{y}(x) + b(x) \quad , \quad u'(x) = a(x)u(x)$$

segue

$$\bar{y}'(x) + u'(x) = a(x)(\bar{y}(x) + u(x)) + b(x)$$

Ciò prova che $\bar{y} + u$ è soluzione della non omogenea. Rimane da provare che se z è una qualunque soluzione dell'equazione non omogenea, allora esiste una soluzione v dell'omogenea tale che $z = \bar{y} + v$. In altre parole, rimane da provare che, posto $v(x) = z(x) - \bar{y}(x)$, la funzione v è soluzione dell'equazione omogenea; questo si verifica facilmente.

Abbiamo visto che per trovare la soluzione generale di un'equazione lineare non omogenea occorre prima trovarne almeno una (comunemente detta soluzione particolare). Un metodo per trovare una soluzione particolare è il cosiddetto metodo di variazione della costante (per equazioni di ordine superiore al primo si chiama metodo di variazione delle costanti). Consideriamo l'equazione $y' = a(x)y + b(x)$. Sappiamo che la soluzione generale dell'omogenea associata è data da $u(x) = ce^{A(x)}$, dove A è una primitiva di a e c una costante arbitraria. Il metodo consiste nel cercare una soluzione particolare dell'equazione non omogenea, pensando "variabile" la costante c . In altre parole, si cerca una soluzione del tipo

$$\bar{y}(x) = c(x)e^{A(x)}.$$

Derivando si ottiene

$$\bar{y}'(x) = c'(x)e^{A(x)} + c(x)a(x)e^{A(x)}.$$

Sostituendo l'espressione trovata nell'equazione differenziale, si ha

$$c'(x)e^{A(x)} + c(x)a(x)e^{A(x)} = a(x)c(x)e^{A(x)} + b(x)$$

da cui si deduce che \bar{y} è soluzione se (e solo se)

$$c'(x) = e^{-A(x)}b(x)$$

ossia se (e solo se) $c(x)$ è una primitiva di $e^{-A(x)}b(x)$. Di conseguenza, la soluzione generale dell'equazione non omogenea è data da

$$y(x) = k e^{A(x)} + e^{A(x)} \int e^{-A(x)}b(x) dx ,$$

dove k è un'arbitraria costante, ed è definita nell'intervallo J .

11.4 Equazioni differenziali di ordine superiore al primo

Un'espressione del tipo $y'' = f(x, y, y')$, dove f è una funzione continua definita su un aperto $A \subset R^3$, si dice un'equazione differenziale del second'ordine (in forma normale).

Le soluzioni di questa equazione si cercano nell'insieme delle funzioni definite in un intervallo e aventi derivata seconda continua in tale intervallo. Una tale funzione y si dirà una soluzione se per ogni x appartenente all'intervallo J in cui è definita risulta

$$(x, y(x), y'(x)) \in A \text{ e } y''(x) = f(x, y(x), y'(x)).$$

Dal punto di vista fisico, un'equazione del secondo ordine può rappresentare la legge di moto di un punto materiale di massa unitaria, vincolato a muoversi in una retta e sottoposto ad una forza f dipendente dal tempo (in questo caso la variabile indipendente "tempo" si denota con t invece che con x), dalla posizione e dalla velocità (denotate rispettivamente con x e con \dot{x}). Questa non è l'unica interpretazione fisica: un'equazione del second'ordine ne può avere molte altre; molti fenomeni fisici (e non solo di dinamica) sono governati da equazioni differenziali del second'ordine (e non solo del second'ordine). Più in generale, un'equazione differenziale di ordine n (in forma normale) è un'espressione del tipo

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}),$$

dove $f : A \rightarrow R$ è una funzione continua da un aperto $A \subset R^{n+1}$ in R . Una soluzione è una funzione y definita in un intervallo J , con derivata n -esima

continua in J e tale che

$$\forall x \in J, (x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x)) \in A \quad \text{e} \quad y^{(n)}(x) = f(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x)).$$

Come per le equazioni del prim'ordine, anche per quelle di ordine n il problema di Cauchy consiste nella ricerca delle soluzioni che "passano" per un punto assegnato dell'aperto A in cui è definita la f . In altre parole, dato un punto $P = (x_0, y_0, y_1, \dots, y_{n-1}) \in A$, tra tutte le soluzioni y dell'equazione $y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$, si cerca quella che verifica (o quelle che verificano) le n condizioni $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$. Anche per le equazioni di ordine n vale un teorema di esistenza e unicità. Ci limitiamo a dire che se la funzione di $n+1$ variabili $f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ è continua e se è derivabile rispetto alle n variabili $y, y', \dots, y^{(n-1)}$ con derivate continue, allora il problema di Cauchy ammette una ed una sola soluzione massimale. Tornando all'esempio fisico dell'equazione di moto di un punto vincolato ad una retta, ciò significa che se ad un certo istante t_0 si assegna la posizione x_0 e la velocità \dot{x}_0 , il moto è determinato.

11.5 Equazioni differenziali lineari del second'ordine

Un'equazione differenziale del second'ordine si dice lineare se è del tipo

$$y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x),$$

dove a_0, a_1 e b sono funzioni continue in un intervallo J . Le funzioni a_0 e a_1 si dicono i coefficienti dell'equazione e b rappresenta il termine noto. Quando $b(x) = 0$, l'equazione si dice omogenea.

Per le equazioni lineari vale il teorema di esistenza e unicità e si potrebbe dimostrare che ogni soluzione massimale è definita in tutto l'intervallo J in cui sono definite le funzioni a_0, a_1 e b .

Ricordiamo che due funzioni y_1, y_2 definite in un intervallo $J \subset R$ sono linearmente indipendenti se dall'uguaglianza $c_1y_1(x) + c_2y_2(x) = 0, \forall x \in J$ segue $c_1 = c_2 = 0$, ossia se l'unica combinazione lineare che dà la funzione (identicamente) nulla è quella con i coefficienti tutti nulli.

Teorema L'insieme delle soluzioni dell'equazione omogenea $y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$ è uno spazio vettoriale di dimensione 2.

La tesi del teorema significa che per determinare l'integrale generale dell'equazione basta trovare due soluzioni indipendenti (questo può essere non semplice) e

scrivere la generica combinazione lineare.

Teorema Tutte le soluzioni dell'equazione differenziale lineare non omogenea $y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x)$ si ottengono sommando ad una soluzione particolare dell'equazione non omogenea tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata.

11.6 Equazioni differenziali lineari del second'ordine a coefficienti costanti

Cominciamo a considerare l'equazione omogenea $y'' + a_1y' + a_0y = 0$, dove a_1 e a_0 sono costanti.

Definizione Si chiama polinomio caratteristico associato all'equazione di sopra il polinomio di secondo grado

$$P(\rho) = \rho^2 + a_1\rho + a_0$$

Teorema Sia $y'' + a_1y' + a_0y = 0$ un'equazione omogenea del second'ordine a coefficienti (reali) costanti.

Se il polinomio caratteristico $P(\rho) = \rho^2 + a_1\rho + a_0$ ha due radici reali e distinte β_1 e β_2 , allora

$$e^{\beta_1 x} \quad , \quad e^{\beta_2 x}$$

sono due soluzioni linearmente indipendenti dell'equazione differenziale.

Se $P(\rho)$ ha una radice doppia β , allora due soluzioni linearmente indipendenti sono

$$e^{\beta x} \quad , \quad x e^{\beta x}$$

Se $P(\rho)$ ha una radice complessa $\lambda + i\mu$ (con $\mu \neq 0$) allora ammette anche la radice coniugata $\lambda - i\mu$, e le funzioni reali

$$e^{\lambda x} \cos(\mu x) \quad , \quad e^{\lambda x} \sin(\mu x)$$

sono due soluzioni linearmente indipendenti.

Esempio. Consideriamo l'equazione differenziale $y'' - y = 0$. Il polinomio caratteristico è $P(\rho) = \rho^2 - 1$ che ha le due radici reali e distinte $\rho_1 = -1$ e $\rho_2 = 1$. Pertanto ogni soluzione dell'equazione è del tipo

$$y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^x$$

con c_1 e c_2 costanti arbitrarie.

Esempio. Consideriamo l'equazione differenziale $y'' - 2y' + y = 0$. Il polinomio caratteristico è $P(\rho) = (\rho - 1)^2$ che ha la sola radice (di molteplicità due) $\rho = 1$. Pertanto ogni soluzione dell'equazione è del tipo

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 x e^x$$

con c_1 e c_2 costanti arbitrarie.

Esempio (equazione del moto armonico). Consideriamo l'equazione differenziale $y'' + \omega^2 y = 0$, $\omega \in \mathbb{R}$. Il polinomio caratteristico è $P(\rho) = \rho^2 + \omega^2$ che ha le due radici complesse e coniugate $-i\omega$ e $+i\omega$. Pertanto ogni soluzione è del tipo

$$y(x) = c_1 \cos(\omega x) + c_2 \sin(\omega x)$$

con c_1 e c_2 costanti arbitrarie. Da elementari considerazioni di trigonometria si deduce che ogni soluzione può essere scritta anche nella forma

$$y(x) = A \sin(\omega x + \phi)$$

dove le costanti reali $A \geq 0$ e ϕ (dette, rispettivamente, **ampiezza** e **fase** della oscillazione) sono arbitrarie e ω (detta **pulsazione**) è assegnata.

Esempio (equazione delle oscillazioni smorzate). Consideriamo l'equazione differenziale $y'' + 2\epsilon y' + \omega^2 y = 0$, dove $0 < \epsilon < \omega$. Il polinomio caratteristico è $P(\rho) = \rho^2 + 2\epsilon\rho + \omega^2$, le cui radici sono $-\epsilon \pm i\sqrt{\omega^2 - \epsilon^2}$. Dunque la soluzione generale è data da

$$y(x) = c_1 e^{-\epsilon x} \cos(\sqrt{\omega^2 - \epsilon^2} x) + c_2 e^{-\epsilon x} \sin(\sqrt{\omega^2 - \epsilon^2} x)$$

o (come osservato nell'esempio precedente) da

$$y(x) = A e^{-\epsilon x} \sin(\sqrt{\omega^2 - \epsilon^2} x + \phi)$$

dove A e ϕ sono costanti arbitrarie.

Sappiamo che l'integrale generale dell'equazione differenziale non omogenea

$$y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x),$$

si ottiene sommando a una sua soluzione particolare l'integrale generale dell'equazione differenziale omogenea associata; se quest'ultimo è noto è sempre possibile determinare una soluzione particolare dell'equazione non omogenea col metodo di variazione delle costanti (già visto nel caso di equazioni

del prim'ordine). Tratteremo solo un caso speciale: l'equazione è a coefficienti costanti e il termine noto $b(x)$ ha una forma particolare. Supponiamo che il termine noto sia della forma

$$b(x) = e^{ax}[p(x) \cos(bx) + q(x) \sin(bx)]$$

dove a e b sono due numeri reali (eventualmente nulli), mentre $p(x)$ e $q(x)$ sono polinomi (eventualmente di grado zero, cioè costanti). Si potrebbe dimostrare che, in questo caso, otteniamo una soluzione particolare ancora dello stesso tipo. Daremo soltanto una "regola pratica" (per determinare una soluzione particolare). Supponiamo dunque che il termine noto $b(x)$ sia del tipo $e^{ax}[p(x) \cos(bx) + q(x) \sin(bx)]$, dove $p(x)$ e $q(x)$ sono due polinomi di grado minore o uguale a k (non occorre che abbiano lo stesso grado) e $a, b \in R$.

i) Se $a + ib$ non è radice del polinomio caratteristico, allora si cerca una soluzione particolare della forma $e^{ax}[r(x) \cos(bx) + s(x) \sin(bx)]$, dove $r(x)$ e $s(x)$ sono polinomi di grado minore o uguale a k , i cui coefficienti sono da determinare.

ii) Se $a + ib$ è radice semplice del polinomio caratteristico, allora si cerca una soluzione moltiplicando per x la forma relativa al caso precedente.

iii) Se $a + ib$ è radice doppia del polinomio caratteristico, allora si cerca una soluzione moltiplicando per x la forma relativa al caso precedente (cioè moltiplicando per x^2 quella in cui $a + ib$ non è radice).

In tutti i casi si tratta perciò di determinare i coefficienti dei polinomi r e s . Illustriamo ora con qualche esempio l'applicazione di questo metodo.

Esempio. Determiniamo una soluzione particolare dell'equazione

$$y'' - y = 2e^{cx}.$$

Il polinomio caratteristico ha le due radici reali 1 e -1. Se $c \neq \pm 1$ cerchiamo una soluzione dell'equazione non omogenea nella forma (si ha $b = 0$, $p(x) = 2$) $\bar{y}(x) = ke^{cx}$, $k \in R$. Derivando e sostituendo nell'equazione si ottiene $c^2 ke^{cx} - ke^{cx} = 2e^{cx}$, che porta all'equazione algebrica (lineare) $(c^2 - 1)k = 2$. In conclusione, si ricava

$$\bar{y}(x) = \frac{2}{c^2 - 1} e^{cx}.$$

Se invece si ha l'equazione

$$y'' - y = 2e^x$$

ci troviamo nel caso in cui 1 è radice semplice del polinomio caratteristico. Cerchiamo perciò la soluzione nella forma

$$\bar{y}(x) = kxe^x$$

Con calcolo analogo al precedente, si ottiene $2ke^x + kxe^x - kxe^x = 2e^x$, da cui $2ke^x = 2e^x$ e quindi $k = 1$. Consideriamo infine l'equazione

$$y'' - y = (x + 3)e^x$$

Questa volta il polinomio p non è costante ma è il polinomio di primo grado $p(x) = x + 3$. Si pone perciò $\bar{y}(x) = x(hx + k)e^x$, $h, k \in R$. Derivando e sostituendo si ha $(2hx + 2h + k)e^x + (hx^2 + 2hx + kx + k)e^x - x(hx + k)e^x = (x + 3)e^x$, da cui si ottiene il sistema lineare nelle due incognite h e k :

$$4h = 1 \quad , \quad 2h + 2k = 3$$

che ha per soluzione $h = 1/4$ e $k = 5/4$.

Esempio. Tra tutte le soluzioni dell'equazione differenziale $y'' = xe^{-x}$, vogliamo determinare quella che verifica le condizioni $y(0) = y'(0) = 0$. L'equazione omogenea associata è $y'' = 0$ e il suo polinomio caratteristico, $P(\rho) = \rho^2$, ha 0 come radice doppia. Quindi la soluzione generale dell'equazione omogenea è $u(x) = c_1 + c_2x$. Occorre trovare una soluzione particolare dell'equazione non omogenea. Osserviamo che -1 non è radice del polinomio caratteristico. Si cerca quindi una soluzione del tipo $\bar{y}(x) = (ax + b)e^{-x}$. Si ha $\bar{y}''(x) = (b - 2a)e^{-x} + axe^{-x}$. Quindi $\bar{y}(x)$ è soluzione se (e solo se) è verificata la condizione $(b - 2a)e^{-x} + (a - 1)xe^{-x} = 0$, $\forall x \in R$, ossia se (e solo se) $b - 2a = 0$ e $a - 1 = 0$. La funzione $\bar{y}(x) = (x + 2)e^{-x}$ è dunque una soluzione dell'equazione non omogenea. Pertanto, la soluzione generale dell'equazione in esame è

$$y(x) = c_1 + c_2x + (x + 2)e^{-x}$$

Determiniamo ora c_1 e c_2 in modo che siano soddisfatte le condizioni assegnate. Si ha $y'(x) = c_2 + e^{-x} - (x + 2)e^{-x}$, e quindi $y(0) = c_1 + 2$ e $y'(0) = c_2 - 1$. Ponendo $y(0) = y'(0) = 0$ si ricava $c_1 = -2$ e $c_2 = 1$. Dunque la soluzione che cerchiamo è

$$y(x) = -2 + x + (x + 2)e^{-x}$$

Osservazione. Una soluzione particolare dell'equazione differenziale

$$y'' + a_1y' + a_0y = b_1(x) + b_2(x)$$

si può ottenere sommando una soluzione di $y'' + a_1y' + a_0y = b_1(x)$ con una soluzione di $y'' + a_1y' + a_0y = b_2(x)$.

Esempio. Troviamo tutte le soluzioni dell'equazione

$$y'' + 9y = 3x + e^x.$$

Il polinomio caratteristico ha le due radici complesse (e coniugate) $\pm 3i$. La soluzione dell'equazione omogenea è perciò $c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x$. Per l'osservazione precedente per determinare una soluzione dell'equazione non omogenea possiamo cercare separatamente una soluzione particolare \bar{y}_1 di $y'' + 9y = 3x$ e una \bar{y}_2 di $y'' + 9y = e^x$ e poi sommarle. Si vede subito che si può prendere $\bar{y}_1(x) = x/3$; cerchiamo poi \bar{y}_2 nella forma $\bar{y}_2(x) = ke^x$. Si trova $k = (1/10)$ e quindi $\bar{y}_2(x) = (1/10)e^x$, perciò l'integrale generale dell'equazione data è

$$y(x) = c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x + x/3 + (1/10)e^x$$

Esempio (Oscillatore armonico con termine forzante, senza o con risonanza). Consideriamo l'equazione non omogenea

$$y'' + \omega^2 y = \sin(\alpha x),$$

come sappiamo l'integrale generale dell'equazione omogenea associata è

$$c_1 \sin(\omega x) + c_2 \cos(\omega x).$$

Supponiamo $\alpha \neq \omega$, una soluzione particolare dell'equazione non omogenea si può cercare nella forma

$$\bar{y}(x) = A \sin(\alpha x) + B \cos(\alpha x);$$

con facili calcoli si trova $B = 0$ e $A = 1/(\omega^2 - \alpha^2)$ e quindi l'integrale generale dell'equazione considerata è

$$(*) \quad y(x) = c_1 \sin(\omega x) + c_2 \cos(\omega x) + \frac{\sin(\alpha x)}{\omega^2 - \alpha^2}$$

Quando $\alpha = \omega$ si dice che c'è **risonanza**. In questo caso una soluzione particolare dell'equazione

$$(**) \quad y'' + \omega^2 y = \sin(\omega x)$$

va cercata nella forma

$$\bar{y}(x) = x[A \sin(\omega x) + B \cos(\omega x)];$$

e la soluzione risulta sempre **non limitata** a causa del fattore x (vibrazione forzata).

Determineremo una soluzione dell'equazione (**) per altra via.

Fra le soluzioni di (*) scegliamo la soluzione y_α che soddisfa le condizioni iniziali $y_\alpha(0) = y'_\alpha(0) = 0$. Con facili calcoli si trova

$$y_\alpha = \frac{\alpha \sin(\omega x) - \omega \sin(\alpha x)}{\omega(\alpha^2 - \omega^2)}.$$

Questa soluzione è definita per ogni valore $\alpha \neq \omega$, possiamo però cercare di calcolare (se esiste) il limite per α tendente a ω di y_α . Si ha

$$\lim_{\alpha \rightarrow \omega} y_\alpha = \lim_{\alpha \rightarrow \omega} \frac{\alpha \sin(\omega x) - \omega \sin(\alpha x)}{\omega(\alpha^2 - \omega^2)} = \frac{1}{2\omega^2} \lim_{\alpha \rightarrow \omega} \frac{\alpha \sin(\omega x) - \omega \sin(\alpha x)}{\alpha - \omega}$$

Applicando la regola di de l'Hôpital si trova

$$\lim_{\alpha \rightarrow \omega} y_\alpha = \frac{1}{2\omega^2} \lim_{\alpha \rightarrow \omega} \frac{\sin(\omega x) - x\omega \cos(\alpha x)}{1} = \frac{\sin(\omega x) - x\omega \cos(\omega x)}{2\omega^2} = y_\omega(x)$$

Con un facile calcolo diretto si può verificare che la funzione y_ω soddisfa l'equazione (**) e le condizioni iniziali $y_\omega(0) = y'_\omega(0) = 0$.

12 Serie numeriche

12.1 Generalità

Sia $\{a_n\}$ una successione di numeri reali, a questa successione associamo un'altra successione $\{s_n\}$ così definita: $s_1 = a_1$, $s_{k+1} = s_k + a_{k+1}$ cioè $s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$. La successione $\{s_n\}$ si chiama successione delle **somme**

parziali o delle **ridotte** della successione $\{a_n\}$. L'espressione formale di somma di una successione infinita di addendi $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$ si chiama **serie**; si dice che a_n è il termine generale della serie. **Carattere** della serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ è il carattere della successione $\{s_n\}$: pertanto se la successione $\{s_n\}$ è convergente (divergente (a $+\infty$ o a $-\infty$)) si dirà che la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ è convergente (divergente). In ogni altro caso si dirà che la serie è non regolare. Se poi $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$ si dirà che la serie ha per somma s e si scriverà $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = s$: la somma di una serie è il limite delle sue somme parziali.

Quelli che seguono sono esempi di serie importanti

i) **Serie geometrica.** Sia $q \in R$ e consideriamo la serie, detta geometrica, $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$, per questa serie si ha: se $q = 1, s_n = n$ altrimenti $s_n = 1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1} = \frac{1-q^n}{1-q} = \frac{1}{1-q} - \frac{1}{1-q}q^n$ pertanto $|q| < 1 \Rightarrow s_n \rightarrow \frac{1}{1-q}, q \geq 1 \Rightarrow s_n \rightarrow +\infty$ e in ogni altro caso la successione delle somme parziali è non regolare. In conclusione la serie geometrica converge se e solo se $|q| < 1$ e si ha in tal caso $\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$

ii) **Serie esponenziale.** Sia $x \in R$ e consideriamo la serie, detta esponenziale, $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$, per questa serie si ha $s_{n+1} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$ che coincide col polinomio di Taylor $P_n^f(x)$ intorno all'origine di ordine n della funzione $f(x) = e^x$. Usando per l'errore nella formula di Taylor la forma di Lagrange è facile dimostrare che per ogni x $P_n^f(x) = s_{n+1}$ converge a $f(x) = e^x$. In conclusione la serie esponenziale converge per ogni x , cioè $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x$.

iii) **Serie armonica.** Consideriamo la serie, detta armonica, $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k$, per questa serie si ha $s_n = 1 + 1/2 + \dots + 1/n$. Poiché sappiamo (vedi pag. 42) che $s_n > \log n$, ne segue che la serie armonica diverge: $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k = +\infty$.

E' facile trovare una condizione necessaria per la convergenza di una serie:

supponiamo che $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = s$, poiché $a_n = (s_n - s_{n-1})$ da $s_n \rightarrow s$ segue $a_n \rightarrow 0$.

Vale quindi il

Teorema. Se una serie converge il suo termine generale tende a 0.

L'esempio iii) mostra che questa condizione in generale non è sufficiente per la convergenza di una serie.

12.2 Serie a termini positivi

Si dice che una serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ è a termini positivi se il termine generale a_n è (definitivamente) positivo. Tali serie godono di proprietà speciali per cui si studiano più facilmente. (Una teoria del tutto identica si può fare per le serie a termini negativi). Sia dunque $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ una serie a termini positivi, come

è evidente la successione $\{s_n\}$ delle sue somme parziali è crescente e perciò regolare, risulterà convergente se superiormente limitata. Dunque vale il

Teorema. Una serie a termini positivi è sempre regolare: o converge o diverge a $+\infty$. È convergente se e solo se le sue somme parziali sono (superiormente) limitate.

Date due serie a termini positivi $\sum a_k, \sum b_k$ si dice che la serie $\sum b_k$ è una **maggiorante** della serie $\sum a_k$ (ovvero che la serie $\sum a_k$ è una **minorante** della serie $\sum b_k$) se (definitivamente) $a_n \leq b_n$.

Teorema(Criterio del confronto). Serie minoranti di serie convergenti sono convergenti; serie maggioranti di serie divergenti sono divergenti (N.B. riguarda solo serie a termini positivi!).

Dimostrazione. Sia $\sum a_k$ una minorante di $\sum b_k$, dette s_n e t_n le somme parziali di, rispettivamente, $\sum a_k$ e $\sum b_k$, poiché $a_k \leq b_k$ si ha la disuguaglianza $s_n \leq t_n$. Se la maggiorante converge le somme t_n sono limitate e quindi anche le somme s_n lo sono e quindi la serie $\sum a_k$ converge. Se la minorante diverge le somme s_n non sono limitate e quindi non sono limitate nemmeno le somme t_n e quindi la serie $\sum b_k$ diverge. (c.d.d.)

Risulta molto utile il seguente

Criterio del confronto asintotico. Date due serie (a termini positivi) $\sum a_k, \sum b_k$, supponiamo che esista $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}$. Se tale limite è un numero reale maggiore di 0 allora le due serie hanno lo stesso carattere.

Dimostrazione. Sia c tale limite allora valgono definitivamente le seguenti disuguaglianze $c/2 < a_n/b_n < 3c/2$ e quindi $(c/2)b_n < a_n < (3c/2)b_n$: la serie $\sum a_k$ è maggiorante della serie $\sum (c/2)b_k$ ed è minorante della serie $\sum (3c/2)b_k$ (N.B. qualunque sia $A > 0$ le serie $\sum Ab_k$ e $\sum b_k$ hanno lo stesso carattere), analogo risultato si prova per la serie $\sum b_k$. La tesi segue dal criterio del confronto. **(c.d.d.)**

Si osservi che se il limite di a_n/b_n è 0 si può dire solo che la serie $\sum a_k$ è minorante della serie $\sum b_k$; se il limite di a_n/b_n è $+\infty$ si può dire solo che la serie $\sum a_k$ è maggiorante della serie $\sum b_k$.

Vogliamo ora dare dei criteri intrinseci di convergenza (o divergenza) per una serie a termini positivi, criteri cioè che dipendano solo dal termine generale della serie in questione.

Criterio del rapporto. Data la serie $\sum a_k$ se (definitivamente) $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q < 1$ la serie converge; se (definitivamente) $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$ la serie diverge.

Dimostrazione. Dalla disuguaglianza $a_{n+1} \leq qa_n$ segue facilmente che $a_{n+1} \leq a_1 q^n$ e quindi la serie converge perché minorante di una serie geometrica convergente. Nel secondo caso la serie diverge perché il termine generale non tende a zero. **(c.d.d.)**

Da questo criterio non è difficile dedurre come corollario il

Criterio del rapporto asintotico. Data la serie $\sum a_k$ supponiamo che esista $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$. Se tale limite è minore di 1 la serie converge, se è maggiore di 1 la serie diverge (se è uguale a 1 non si può decidere).

Criterio della radice. Data la serie $\sum a_k$ se (definitivamente) $\sqrt[n]{a_n} \leq q < 1$ la serie converge; se (definitivamente) $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$ la serie diverge.

Dimostrazione. Elevando alla potenza n -ma si ottiene $a_n \leq q^n$ e quindi la serie converge perché minorante di una serie geometrica convergente. Nel secondo caso la serie diverge perché il termine generale non tende a zero. **(c.d.d.)**

Da questo criterio non è difficile dedurre come corollario il

Criterio asintotico della radice. Data la serie $\sum a_k$ supponiamo che esista $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}$. Se tale limite è minore di 1 la serie converge, se è maggiore di 1 la serie diverge (se è uguale a 1 non si può decidere).

Il criterio seguente utilizza risultati ottenuti per integrali impropri.

Criterio integrale. Data la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, supponiamo che il termine generale a_n sia decrescente; sia poi la funzione $f : [1, +\infty)$ una estensione decrescente

della successione (cioè f decresce e $f(k) = a_k$ per ogni k) allora la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ e l'integrale $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ hanno lo stesso carattere.

Dimostrazione. Poiché la funzione f è decrescente, se \mathcal{P}_n è la partizione $\{1, 2, \dots, n\}$ dell'intervallo $[1, n]$ si ha

$$s(\mathcal{P}_n, f) = \sum_{k=2}^n f(k) = \sum_{k=2}^n a_k \leq \int_1^n f(x)dx \leq \sum_{k=1}^{n-1} a_k = \sum_{k=1}^{n-1} f(k) = S(\mathcal{P}_n, f)$$

e quindi, se s_n indica la somma parziale n -ma della serie $\sum a_k$, si ha

$$s_n - a_1 \leq \int_1^n f(x)dx \leq s_n - a_n.$$

La tesi segue da queste ultime disequaglianze. (c.d.d.)

Con un calcolo diretto di primitive si vede che gli integrali

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^a} dx, \quad \int_2^{+\infty} \frac{1}{x(\log x)^a}$$

convergono per $a > 1$ e divergono per $a \leq 1$. Pertanto dal criterio integrale si deduce che le serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^a}, \quad \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(\log k)^a}$$

convergono per $a > 1$ e divergono per $a \leq 1$. Si noti che per queste serie i criteri del rapporto e della radice sono inefficaci.

12.3 Serie a termini qualsiasi

Per trovare un criterio di convergenza per ogni serie basterà applicare il criterio di Cauchy alla successione delle somme parziali. Sia $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ una serie, la successione delle sue somme parziali $\{s_n\}$ risulterà convergente se e solo se

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \nu(\epsilon) : n > \nu(\epsilon), p \in N \Rightarrow |s_{n+p} - s_n| < \epsilon$$

Posto $R_{n,p} = (s_{n+p} - s_n) = (a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+p})$, possiamo enunciare il

Teorema. La serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge se e solo se

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \nu(\epsilon) : n > \nu(\epsilon), p \in N \Rightarrow |R_{n,p}| < \epsilon$$

Per esercizio usiamo questo criterio per ritrovare la divergenza della serie armonica. Per questa serie si ha

$$R_{n,n} = 1/(n+1) + 1/(n+2) + \dots + 1/(2n) > 1/(2n) + 1/(2n) + \dots + 1/(2n) = n/(2n) = 1/2$$

se si sceglie $\epsilon < 1/2$ non può esistere alcun $\nu(\epsilon)$ che soddisfi le condizioni del criterio: dunque la serie diverge.

Un ruolo particolare hanno le **serie a segni alternati**. Sia $a_n > 0$, si dice che la serie $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} a_k = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots$ è a segni alternati. Un semplice criterio di convergenza vale per queste serie:

Criterio di Leibnitz. Se la successione positiva $\{a_n\}$ decresce e converge a 0, allora la serie $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} a_k$ converge. Inoltre se s è la sua somma e se s_n sono le sue somme parziali si ha $|s - s_n| < a_{n+1}$ e l'approssimazione (di s_n a s) è per difetto se n è pari ed è per eccesso se n è dispari.

Dimostrazione. Si ha $s_{2n+1} - s_{2n-1} = (a_{2n+1} - a_{2n}) < 0$, $s_{2n+2} - s_{2n} = (-a_{2n+2} + a_{2n+1}) > 0$ per cui le somme di indice dispari decrescono e quelle di indice pari crescono. Inoltre $s_{2n+1} - s_{2n} = a_{2n+1} > 0$ per cui $s_{2n+1} > s_{2n}$ e da qui si vede che ogni somma di indice dispari è maggiore di ogni somma di indice pari, per cui le somme di indice dispari sono limitate inferiormente e quelle di indice pari sono limitate superiormente e siccome $a_{2n+1} \rightarrow 0$ entrambe sono convergenti allo stesso limite. La seconda asserzione del teorema segue dalle considerazioni di sopra. (**c.d.d.**)

12.4 Assoluta convergenza

Definizione: si dice che una serie $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ è **assolutamente convergente** se

è convergente la serie $\sum_{k=1}^{\infty} |b_k|$.

Teorema. La assoluta convergenza implica la convergenza. Esistono serie convergenti che non sono assolutamente convergenti.

Dimostrazione. La serie $\sum_{k=1}^{\infty} |b_k|$ sia convergente. Qualunque siano n e p si ha $|b_{n+1} + b_{n+2} + \dots + b_{n+p}| \leq (|b_{n+1}| + |b_{n+2}| + \dots + |b_{n+p}|)$. Per ipotesi fissato $\epsilon > 0$ esiste $\nu(\epsilon)$ tale che per $n > \nu(\epsilon)$ e p qualsiasi il secondo membro

della diseuguaglianza di sopra si può rendere minore di ϵ , sarà quindi minore di ϵ anche il primo membro e quindi la serie $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ converge. La seconda

asserzione si prova col seguente esempio: sia $b_k = (-1)^{k+1}/k$, la serie $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$

converge (a $\log 2$) per il criterio di Leibnitz, ma la serie $\sum_{k=1}^{\infty} |b_k|$, che è la serie

armonica, diverge. (**c.d.d.**)

Si osservi che, data una serie qualsiasi $\sum a_k$, siccome la serie $\sum |a_k|$ è a termini positivi ad essa si possono applicare tutti i criteri di convergenza per le serie a termini positivi che risultano quindi essere dei criteri di assoluta convergenza e quindi di convergenza per la serie originale $\sum a_k$. Naturalmente l'esempio di sopra prova che tali criteri saranno inefficaci per serie convergenti ma non assolutamente convergenti. Queste ultime serie hanno delle proprietà di instabilità sorprendenti.

Definizione: data una serie $\sum a_k$, si dice che una serie $\sum b_k$ è un suo **riordinamento** se esiste una biiezione $\pi : N \rightarrow N$ tale che $b_k = a_{\pi(k)}$; in tal caso anche $\sum a_k$ è un riordinamento di $\sum b_k$ essendo $a_k = b_{\pi^{-1}(k)}$. Un riordinamento si ottiene "rimescolando" gli addendi di una serie, lo scopo è di vedere in quale misura si possa estendere alle serie ("somme di infiniti addendi") la proprietà commutativa della somma ordinaria (di un numero finito di addendi).

Diremo che per una serie che ha somma s ($+\infty$, oppure $-\infty$) vale la proprietà **commutativa** se ogni suo riordinamento ha somma s ($+\infty$, oppure $-\infty$).

Si hanno i seguenti risultati che enunciamo senza dimostrazione.

Teorema. Le serie regolari godono della proprietà commutativa se e solo se sono assolutamente convergenti.

(Quindi in particolare le serie a termini positivi godono della proprietà commutativa).

Teorema. La serie $\sum a_k$ sia convergente ma non assolutamente convergente. Allora per ogni fissato numero reale γ esiste un riordinamento della serie che ha per somma γ , esistono anche riordinamenti della serie divergenti a $+\infty$ oppure a $-\infty$ e anche riordinamenti che producono serie non regolari.

13 Serie di funzioni

13.1 Generalità

Una serie del tipo

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = f_0(x) + f_1(x) + \dots + f_n(x) + \dots$$

dove le f_n sono funzioni reali di variabile reale, è detta **serie di funzioni** (reali di variabile reale). Si dice che la serie è definita in un insieme $X \subset R$ se il dominio di tutte le funzioni contiene X (ossia, se sono tutte definite per ogni $x \in X$). Ovviamente, ogni volta che si fissa $x \in X$, si ottiene una serie numerica che può essere convergente oppure no, a seconda che la successione $\{s_n(x)\}$ delle somme parziali n -esime (dove $s_n(x) = \sum_{k=0}^n f_k(x)$) sia convergente o no. L'insieme dei numeri $x \in X$ per cui la serie converge si chiama **insieme di convergenza**. Ad esempio, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ è definita su tutto R e il suo insieme di convergenza è l'intervallo $(-1, 1)$, visto che si tratta di una serie geometrica di ragione $x \in R$.

In analogia con le serie numeriche, se $\sum_{n=0}^{\infty} |f_n(x)|$ converge in un punto x , diremo che la serie di funzioni $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ **converge assolutamente** in x . Dal criterio di convergenza assoluta delle serie numeriche si ottiene subito che la convergenza assoluta di una serie di funzioni implica la sua convergenza.

Se una serie di funzioni $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ converge in un insieme $A \subset R$, allora per ogni $x \in A$ si ottiene un numero $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$. Risulta così definita una funzione reale di variabile reale $f : A \rightarrow R$. È naturale domandarsi se una tale funzione sia continua quando sono continue tutte le f_n . In altre parole: è ancora vero che la somma di funzioni continue è una funzione continua nel caso di infiniti addendi? La risposta è negativa. L'esempio seguente illustra

questo fatto.

Esempio. Consideriamo, nell'intervallo $[0, 1]$, la serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1-x)x^n.$$

Per $x \in [0, 1)$ la serie è geometrica di ragione x e primo termine $(1-x)x$; pertanto converge e la sua somma è data da $\frac{(1-x)x}{1-x} = x$. Per $x = 1$ tutte le funzioni $f_n(x) = (1-x)x^n$ sono nulle e, di conseguenza, la serie converge anche in tale punto ed ha somma zero. Si può concludere che la serie converge in tutto l'intervallo chiuso $[0, 1]$ e la sua somma è

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \in [0, 1) \\ 0 & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

che è una funzione discontinua, sebbene tutte le f_n siano continue (sono addirittura C^∞).

È utile perciò introdurre un altro tipo di convergenza, la convergenza totale, che implica la convergenza assoluta e garantisce, tra l'altro, la continuità della funzione somma.

Definizione. Si dice che la serie di funzioni $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ **converge totalmente**

in un insieme $A \subset R$ se esiste una serie numerica convergente $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ tale che

$|f_n(x)| \leq c_n, \forall n$ e $\forall x \in A$. Notiamo che se una serie di funzioni $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$

converge totalmente in un insieme A , allora (come conseguenza dei criteri di convergenza assoluta e del confronto) converge (assolutamente) per ogni $x \in A$. Risulta quindi ben definita la funzione somma

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x).$$

Osserviamo inoltre che la più piccola serie numerica che domina $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ è quella il cui termine generale λ_n è dato da

$$\lambda_n = \sup\{|f_n(x)| : x \in A\}.$$

Pertanto, se tale serie numerica converge, allora la serie di funzioni converge totalmente. In caso contrario, ossia se $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n = +\infty$, per il criterio del confronto nessuna serie numerica che domina la serie di funzioni può convergere. Possiamo quindi enunciare il seguente

Teorema. Condizione necessaria e sufficiente affinché una serie di funzioni $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ converga totalmente in un insieme A è che sia convergente la serie numerica $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n$, dove $\lambda_n = \sup\{|f_n(x)| : x \in A\}$.

Esempio. Consideriamo la serie di funzioni

$$\sum_{n=2}^{\infty} n \log \left(1 + \frac{|x|^n}{n(n-1)^2} \right).$$

Osserviamo che il termine generale $f_n(x) = n \log \left(1 + \frac{|x|^n}{n(n-1)^2} \right)$ tende a zero se e solo se $|x| \leq 1$; perciò la serie può convergere in x se e solo se $x \in [-1, 1]$. Fissato $x \in [-1, 1]$, si ha

$$|f_n(x)| = n \log \left(1 + \frac{|x|^n}{n(n-1)^2} \right) \leq n \log \left(1 + \frac{1}{n(n-1)^2} \right) < \frac{1}{(n-1)^2},$$

da cui, essendo la serie $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)^2}$ convergente, dal criterio del confronto si deduce che la serie data è assolutamente convergente in x . D'altra parte, posto $c_n = \frac{1}{(n-1)^2}$, dal fatto che $\sum_{n=2}^{\infty} c_n$ è una serie numerica maggiorante e convergente, si deduce anche che la serie data converge totalmente nell'intervallo $[-1, 1]$.

Consideriamo invece la serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} n \log \left(1 + \frac{|x|^n}{n(n-1)} \right).$$

Anche in questo caso il termine generale tende a zero se e solo se $|x| \leq 1$. Però la serie converge puntualmente solo per $x \in (-1, 1)$, in quanto per $x = -1$ e

$x = 1$ si ha $\sum_{n=2}^{\infty} n \log \left(1 + \frac{1}{n(n-1)} \right)$ che diverge avendo lo stesso carattere della serie armonica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Inoltre, essendo

$$\sup_{x \in (-1, 1)} n \log \left(1 + \frac{|x|^n}{n(n-1)} \right) = n \log \left(1 + \frac{1}{n(n-1)} \right),$$

la serie non converge totalmente in $(-1, 1)$. Considerando invece un intervallo della forma $[-r, r]$ con $r < 1$, si ha

$$\sup_{x \in [-r, r]} n \log \left(1 + \frac{|x|^n}{n(n-1)} \right) = n \log \left(1 + \frac{r^n}{n(n-1)} \right) = \lambda_n,$$

ed essendo $\sum_n \lambda_n$ convergente si può concludere che la serie data converge totalmente in $[-r, r]$.

Teorema. Sia $\sum_{n=n_0}^{\infty} f_n(x)$ una serie di funzioni continue convergente total-

mente in un insieme A e sia $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ la somma della serie. Allora,

i) (continuità) la funzione f risulta continua in A ;

ii) (integrazione termine a termine) per ogni intervallo $[a, b] \subset A$ si ha

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) dx;$$

iii) (derivazione termine a termine) se inoltre le funzioni f_n sono di classe C^1 in A e se la serie delle derivate converge totalmente in A , allora f risulta di classe C^1 in A e si ha $f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f'_n(x)$.

13.2 Serie di potenze

Un esempio importante di serie di funzioni è costituito dalle **serie di potenze**. Una serie di funzioni del tipo

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n,$$

dove x_0 e gli a_n sono numeri reali assegnati, si dice una **serie di potenze** in campo reale. Il punto x_0 si chiama **centro della serie**.

Una serie di potenze converge ovviamente in $x = x_0$ (e la sua somma in tal caso vale a_0). Dal teorema che segue si deduce che l'insieme di convergenza di una serie di potenze è un intervallo (eventualmente ridotto al punto $x = x_0$).

Teorema Supponiamo che la serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ converga in un punto $\bar{x} \neq x_0$. Allora la serie converge assolutamente in ogni x tale che $|x - x_0| < |\bar{x} - x_0|$. Inoltre converge totalmente in ogni intervallo del tipo $[x_0 - r, x_0 + r]$ con $0 < r < |\bar{x} - x_0|$.

Dimostrazione Poiché la serie converge puntualmente in \bar{x} , il termine n -mo tende a 0 per $n \rightarrow \infty$. Di conseguenza, definitivamente si ha che $|a_n(\bar{x} - x_0)^n| \leq 1$. Preso x tale che $|x - x_0| < |\bar{x} - x_0|$ risulta

$$|a_n(x - x_0)^n| = |a_n(\bar{x} - x_0)^n| \left(\frac{|x - x_0|}{|\bar{x} - x_0|} \right)^n \leq \left(\frac{|x - x_0|}{|\bar{x} - x_0|} \right)^n.$$

Per come è stato scelto x , la serie geometrica $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{|x - x_0|}{|\bar{x} - x_0|} \right)^n$ ha ragione minore di 1 e quindi converge. Perciò, per il criterio del confronto, $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n(x - x_0)|^n$ converge, cioè $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ converge assolutamente in x . Sia ora r tale che $0 < r < |\bar{x} - x_0|$. Si ha

$$|a_n(x - x_0)^n| \leq \left(\frac{r}{|\bar{x} - x_0|} \right)^n.$$

Perciò $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$, essendo dominata da una serie numerica convergente, risulta totalmente convergente in $[x_0 - r, x_0 + r]$. **c.v.d.**

Dal teorema precedente si ottiene il seguente

Teorema Sia data la serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n.$$

Allora, o la serie converge solo in $x = x_0$, oppure esiste $R > 0$ (eventualmente anche infinito) tale che la serie converge assolutamente se $|x - x_0| < R$ e non

converge se $|x - x_0| > R$. Inoltre la serie converge totalmente in ogni intervallo $[x_0 - r, x_0 + r]$, con $0 < r < R$.

Dal risultato precedente si deduce perciò che l'insieme di convergenza di una serie di potenze centrata in x_0 è un intervallo (aperto, chiuso o semiaperto) e che x_0 è equidistante dagli estremi (finiti o infiniti che siano). Osserviamo che non si può dire nulla a priori del comportamento della serie nei punti $x_0 - R$ e $x_0 + R$.

Ad esempio: la serie $\sum_n \frac{x^n}{n}$ ha raggio di convergenza 1 e converge (non assolutamente) in $x = -1$ mentre non converge in $x = 1$; la serie $\sum_n \frac{x^n}{n^2}$ ha raggio di convergenza 1 e converge assolutamente sia in $x = 1$ che in $x = -1$; la serie $\sum_n nx^n$ ha raggio di convergenza 1 e non converge negli estremi dell'intervallo $(-1, 1)$ (il termine generale non tende a zero).

Definizione La semiampiezza R dell'intervallo di convergenza di una serie di potenze si chiama **raggio di convergenza** della serie.

Per calcolare il raggio di convergenza, fissato $x \in R$, si può ricorrere agli usuali criteri per le serie a termini positivi applicandoli alla serie

$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| |x - x_0|^n$, pensata come una serie numerica dipendente dal parametro x . Ad esempio, dal criterio della radice si ottiene il seguente

Teorema. Sia data una serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ e supponiamo che esista $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$. Allora si ha

$$R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

convenendo che $R = 0$ se $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = +\infty$; $R = +\infty$ se $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$.

Esempi :

per la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ si ha $R = 1$

per la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ si ha $R = +\infty$

per la serie $\sum_{n=0}^{\infty} n! x^n$ si ha $R = 0$

Sia data una serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ e supponiamo che abbia raggio di convergenza $R > 0$. Allora è ben definita, nell'intervallo $(x_0 - R, x_0 + R)$, la somma della serie, cioè una funzione f tale che

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n, \quad x \in (x_0 - R, x_0 + R).$$

Teorema La funzione f definita dalla serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ è continua in ogni punto dell'intervallo $(x_0 - R, x_0 + R)$.

Dimostrazione Sia \bar{x} un qualunque punto dell'intervallo $(x_0 - R, x_0 + R)$. Esiste un numero r , con $0 < r < R$, tale che l'intervallo $(x_0 - r, x_0 + r)$ contiene \bar{x} . Di conseguenza, poiché la serie è totalmente convergente in $(x_0 - r, x_0 + r)$, la funzione somma f è ivi continua. Questo implica, in particolare, che f è continua anche nel punto \bar{x} . **c.v.d.**

Vediamo altre proprietà delle serie di potenze.

Lemma (di invarianza del dominio di convergenza). Supponiamo che la serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$$

abbia raggio di convergenza $R > 0$. Allora le due serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n(x-x_0)^{n-1}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(x-x_0)^{n+1}$$

hanno raggio di convergenza R .

Il lemma precedente serve per provare che le serie di potenze sono “derivabili termine a termine” e “integrabili termine a termine”; si ha cioè il seguente

Teorema Sia f la funzione definita dalla serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n, \quad x \in (x_0 - R, x_0 + R)$$

Allora f è derivabile in $(x_0 - R, x_0 + R)$ e si ha

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n(x-x_0)^{n-1}.$$

Inoltre, per ogni $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$ si ha

$$\int_{x_0}^x f(t)dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (x - x_0)^{n+1}.$$

Dimostrazione Fissato un qualunque punto x appartenente all'intervallo di convergenza $(x_0 - R, x_0 + R)$ della prima serie, esiste un intervallo $(x_0 - \rho, x_0 + \rho)$, con $0 < \rho < r$, contenente x . Per il lemma precedente, R è anche il raggio di convergenza della serie delle derivate, e quindi, in base al teorema della convergenza totale per le serie di potenze, entrambe le serie convergono totalmente in $(x_0 - \rho, x_0 + \rho)$. Dal teorema di derivabilità delle serie di funzioni segue che f è derivabile in x e risulta

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x - x_0)^{n-1}.$$

Inoltre, dal teorema di passaggio al limite sotto il segno di integrale, si ha

$$\int_{x_0}^x f(t)dt = \int_{x_0}^x \sum_{n=0}^{\infty} a_n (t - x_0)^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{x_0}^x a_n (t - x_0)^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (x - x_0)^{n+1}$$

c.v.d.

Osservazione Poiché la derivata di una serie di potenze è ancora una serie di potenze, dal teorema precedente segue che le funzioni definite tramite serie di potenze sono di classe C^∞ .

Sia dunque

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots + a_n(x - x_0)^n + \cdots$$

una funzione definita mediante una serie di potenze. Ponendo $x = x_0$, si ottiene $a_0 = f(x_0)$. Derivando e ponendo di nuovo $x = x_0$, si ha $a_1 = f'(x_0)$. Analogamente, mediante derivate successive (vedi l'osservazione precedente), si ottiene

$$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}.$$

Pertanto, risulta necessariamente

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n,$$

dove $f^{(0)}(x_0)$ denota $f(x_0)$.

13.3 Serie di Taylor

Osserviamo che, data una funzione di classe C^∞ in un intorno di x_0 , si può considerare la serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n.$$

Tale serie di potenze è detta **serie di Taylor di f di centro x_0** (o di **MacLaurin**, quando $x_0 = 0$). Ci chiediamo: i) se esista un intorno di x_0 nel quale questa serie sia convergente; ii) supposto che esista un tale intorno, se in esso la somma della serie sia proprio $f(x)$.

Definizione Una funzione f si dice **svilupicabile in serie di Taylor in un intorno di un punto x_0** (o **analitica in x_0**) se esiste un intorno di x_0 in cui vale l'uguaglianza

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n.$$

Si dice che f è **analitica** se ogni punto del suo dominio ammette un intorno in cui f è svilupicabile in serie di Taylor (ossia, se è analitica in ogni punto del suo dominio).

Osservazione Esistono funzioni di classe C^∞ ma non analitiche. Una di queste è

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0, \end{cases}$$

le cui derivate successive (come si potrebbe provare usando un corollario del teorema di Lagrange) risultano tutte continue e nulle nel punto $x_0 = 0$. Quindi, se f fosse analitica, in un intorno del punto $x_0 = 0$ dovrebbe valere l'uguaglianza

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

e ciò è impossibile perché $f(x) \neq 0$ per $x \neq 0$, mentre la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ ha per somma zero (essendo nulli tutti i suoi termini).

Si ha la seguente condizione necessaria e sufficiente perché una funzione sia svilupicabile in serie di Taylor.

Teorema Una funzione f di classe C^∞ in x_0 è sviluppabile in serie di Taylor in un intorno $(x_0 - R, x_0 + R)$ di x_0 se e solo se, per ogni $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$, risulta $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$, dove

$$R_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

denota il resto n -esimo della formula di Taylor.

Esempio La funzione $f(x) = e^x$ è sviluppabile in serie di MacLaurin e tale serie ha raggio di convergenza $R = +\infty$. Fissiamo un punto $x \in R$. Sappiamo che se e^x è effettivamente sviluppabile in serie di MacLaurin, allora si deve necessariamente avere

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Per il teorema precedente, ciò equivale ad affermare che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} (e^x - P_n(x)) = 0,$$

dove la somma parziale n -esima

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$$

non è altro che il polinomio di MacLaurin di e^x di ordine n . Scrivendo il resto $R_n(x)$ nella forma di Lagrange, si potrebbe facilmente far vedere che in effetti esso tende a 0 per $n \rightarrow +\infty$. Per l'arbitrarietà del punto x , possiamo concludere che lo sviluppo è valido in tutto R .

Ponendo $x = 1$ nello sviluppo in serie di MacLaurin di e^x si ottiene il numero e espresso mediante una serie numerica:

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}.$$

Mostriamo ora che la funzione e^x è analitica. A tale scopo fissiamo $x_0 \in R$ e poniamo, per comodità, $x = x_0 + h$. Si ha

$$e^x = e^{x_0+h} = e^{x_0} e^h = e^{x_0} \left(1 + h + \frac{h^2}{2!} + \cdots + \frac{h^n}{n!} + \cdots \right) =$$

$$e^{x_0} + e^{x_0}h + e^{x_0}\frac{h^2}{2!} + \dots + e^{x_0}\frac{h^n}{n!} + \dots$$

Quindi

$$e^x = e^{x_0} + e^{x_0}(x - x_0) + e^{x_0}\frac{(x - x_0)^2}{2!} + \dots + e^{x_0}\frac{(x - x_0)^n}{n!} + \dots$$

In maniera analoga si può provare che le funzioni $\cos x$ e $\sin x$ sono sviluppabili in serie di MacLaurin in tutto R .

Il metodo usato per sviluppare in serie di MacLaurin le funzioni e^x , $\sin x$ e $\cos x$ (basato su una stima del resto della formula di Taylor) non è adatto per la funzione $f(x) = \log(1+x)$. In questo caso conviene procedere diversamente:

- i) si determina prima lo sviluppo della derivata $f'(x)$ di $f(x)$;
- ii) successivamente, mediante il teorema di integrazione termine a termine delle serie di potenze, si trova una primitiva dello sviluppo di $f'(x)$;
- iii) infine, tra tutte le primitive di $f'(x)$ espresse in serie di potenze, si sceglie quella che coincide con $f(x)$.

Tale metodo è adatto anche per determinare lo sviluppo di $\arctan x$ e, in generale, di tutte le funzioni di cui è facile sviluppare la derivata. A tale proposito ricordiamo che due primitive di una stessa funzione (definita in un intervallo) differiscono per una costante e, di conseguenza, se coincidono in un punto, coincidono in tutto l'intervallo di definizione.

Cominciamo col determinare, col metodo appena esposto, lo sviluppo di MacLaurin di $\log(1+x)$. La derivata $(1+x)^{-1}$ di $\log(1+x)$ rappresenta, per $x \in (-1, 1)$, la somma di una serie geometrica di ragione $-x$ e primo termine 1. Quindi, per $x \in (-1, 1)$, si ha

$$(1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n x^n + \dots$$

Dal teorema di derivazione delle serie di potenze si deduce che

$$g(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \dots$$

è una primitiva di $(1+x)^{-1}$; ma, è bene precisare, soltanto per x appartenente al comune dominio di convergenza $(-1, 1)$ delle due serie. Dunque, $\log(1+x)$

e $g(x)$ hanno la stessa derivata per $x \in (-1, 1)$. Poiché coincidono per $x = 0$, si può concludere che

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \cdots \quad \forall x \in (-1, 1).$$

In maniera analoga si determina lo sviluppo della funzione $\arctan x$ che risulta definito nell'intervallo $(-1, 1)$.

Dato $\alpha \in R$, consideriamo la funzione $f(x) = (1+x)^\alpha$ che è senz'altro definita e C^∞ nell'intervallo $(-1, +\infty)$. Si ha

$$f^{(n)}(0) = \alpha(\alpha-1) \cdots (\alpha-n+1),$$

per cui la serie di MacLaurin di f è

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n,$$

ove ricordiamo che $\binom{\alpha}{n}$ è il **coefficiente binomiale**

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1) \cdots (\alpha-n+1)}{n!}, \quad \binom{\alpha}{0} = 1.$$

Si può provare che per $|x| < 1$ e qualunque sia α si ha

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n.$$

Questa serie di potenze è detta **serie binomiale**. Se α è un numero naturale la serie è una somma finita. Infatti si riduce alla somma dei primi $\alpha+1$ termini essendo i coefficienti binomiali tutti nulli per $n > \alpha$. In questo caso prende il nome di **binomio di Newton**.

14 Funzioni vettoriali di più variabili

Passiamo ora a considerare funzioni vettoriali di variabile vettoriale. Sia

$$f : A \rightarrow R^m, \quad f(P) = (f_1(P), f_2(P), \dots, f_m(P))$$

un'applicazione definita in un sottoinsieme A di R^k . Il limite di una funzione vettoriale di variabile vettoriale si definisce in modo analogo a come è stato fatto per una funzione reale di più variabili reali. Sia P_0 un punto di accumulazione per il dominio A di f . Si dice che $f(P)$ tende ad un vettore $V \in R^m$ per P che tende a P_0 , e si scrive $f(P) \rightarrow V$ per $P \rightarrow P_0$, se per ogni $\epsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che da $0 < \|P - P_0\| < \delta$ e $P \in A$ segue $\|f(P) - V\| < \epsilon$. In questo caso si può anche scrivere

$$\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = V$$

Si può provare che

$$\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = V = (V_1, V_2, \dots, V_m) \Leftrightarrow \lim_{P \rightarrow P_0} f_i(P) = V_i, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

Diremo che f è continua in un punto $P_0 \in A$ se sono continue (in P_0) le sue m funzioni componenti: f_1, f_2, \dots, f_m . Per quanto visto sopra nel caso che P_0 sia un punto di accumulazione per A , ciò equivale ad affermare che

$$\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = f(P_0) \quad (\text{ovvero} \quad \lim_{P \rightarrow P_0} f_i(P) = f_i(P_0), \quad i = 1, 2, \dots, m)$$

Analogamente, diremo che f è derivabile in un punto $P_0 \in A$ se sono derivabili (in P_0) le sue m funzioni componenti: f_1, f_2, \dots, f_m . Sia $f : A \rightarrow R^m$ un'applicazione derivabile definita su un aperto A di R^k . Denotiamo con f_1, f_2, \dots, f_m le m funzioni reali che compongono la f (ricordiamo che sono funzioni reali di k variabili reali). Fissato un punto $P_0 \in A$, la matrice ($m \times k$)

$$J_f(P_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_k} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_k} \end{pmatrix}_{P_0}$$

si chiama **matrice jacobiana** dell'applicazione f in P_0 (il simbolo P_0 in basso a destra significa che tutti gli elementi della matrice si considerano calcolati nel punto P_0). Osserviamo che le m righe della matrice jacobiana sono rispettivamente i gradienti delle m componenti f_1, f_2, \dots, f_m della funzione f . Quando $k = m$, la matrice $J_f(P_0)$ è quadrata. In questo caso ha senso il suo determinante, $\det J_f(P_0)$, chiamato **jacobiano** dell'applicazione f in P_0 .

Descriviamo ora alcuni esempi di funzioni vettoriali di variabile vettoriale che saranno particolarmente utili nel calcolo di integrali doppi e tripli.

Coordinate polari

$$f(\rho, \theta) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta), \quad \rho \geq 0, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

La matrice jacobiana e lo jacobiano della f sono

$$J_f(\rho, \theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\rho \sin \theta \\ \sin \theta & \rho \cos \theta \end{pmatrix}, \quad \det J_f(\rho, \theta) = \rho$$

Coordinate sferiche

$$f(\rho, \phi, \theta) = (\rho \sin \phi \cos \theta, \rho \sin \phi \sin \theta, \rho \cos \phi), \quad \rho \geq 0, \quad 0 \leq \phi \leq \pi, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi,$$

La matrice jacobiana e lo jacobiano della f sono

$$J_f(\rho, \theta, \phi) = \begin{pmatrix} \sin \phi \cos \theta & \rho \cos \phi \cos \theta & -\rho \sin \phi \sin \theta \\ \sin \phi \sin \theta & \rho \cos \phi \sin \theta & \rho \sin \phi \cos \theta \\ \cos \phi & -\rho \sin \phi & 0 \end{pmatrix}, \quad \det J_f(\rho, \theta, \phi) = \rho^2 \sin \phi$$

Coordinate cilindriche

$$f(\rho, \theta, z) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, z), \quad \rho \geq 0, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad z \in R$$

La matrice jacobiana e lo jacobiano della f sono

$$J_f(\rho, \theta, z) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\rho \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \rho \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \det J_f(\rho, \theta, z) = \rho$$

15 Integrali multipli

15.1 Integrali doppi

Una partizione di un rettangolo $T = [a, b] \times [c, d] \subset R^2$ è una coppia $P = (P_1, P_2)$ di partizioni degli intervalli $[a, b]$ e $[c, d]$, rispettivamente. Date due partizioni $P_1 = x_0, x_1, \dots, x_{n_1}$ di $[a, b]$ e $P_2 = y_0, y_1, \dots, y_{n_2}$ di $[c, d]$, il rettangolo T viene suddiviso in $(n_1 n_2)$ sottorettangoli

$$T_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j], \quad i = 1, 2, \dots, n_1, \quad j = 1, 2, \dots, n_2$$

di area $\mu(T_{ij}) = (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$. In ogni sottorettangolo T_{ij} scegliamo un punto c_{ij} . L'insieme s dei punti c_{ij} si dice una **scelta di punti** nella partizione $P = (P_1, P_2)$ di T . La coppia $\alpha = (P, s)$, costituita dalla partizione P di T e dalla scelta s , si dice una **partizione puntata** di T . Il parametro di finezza di $\alpha = (P, s)$, denotato con $|\alpha|$, è la massima ampiezza dei lati di tutti i possibili rettangoli individuati dalla partizione P .

Sia ora assegnata una funzione $f : [a, b] \times [c, d] \rightarrow R$. Ad ogni partizione puntata α di $T = [a, b] \times [c, d]$ possiamo associare il numero

$$S_f(\alpha) = \sum_{\substack{i=1, \dots, n_1 \\ j=1, \dots, n_2}} f(c_{ij})\mu(T_{ij}) = \sum_i \sum_j f(c_{ij})\mu(T_{ij}) = \sum_j \sum_i f(c_{ij})\mu(T_{ij})$$

Si ha così una funzione reale $S_f : \mathcal{P} \rightarrow R$ definita nell'insieme \mathcal{P} delle partizioni puntate del rettangolo T . Per meglio comprendere il significato del numero $S_f(\alpha)$ individuato dalla partizione puntata α , è bene osservare che se la funzione f è positiva, ogni termine $f(c_{ij})\mu(T_{ij})$ della sommatoria rappresenta il volume di un parallelepipedo di altezza $f(c_{ij})$ che ha per base il rettangolo T_{ij} . Quindi, se tutti i rettangoli T_{ij} sono abbastanza piccoli, c'è da aspettarsi che il numero $S_f(\alpha)$ rappresenti una buona approssimazione del volume del solido

$$\{(x, y, z) \in R^3 : (x, y) \in T, 0 \leq z \leq f(x, y)\}$$

costituito dai punti che stanno sopra il rettangolo T e sotto il grafico $z = f(x, y)$ della funzione f .

Intuitivamente l'integrale doppio della funzione f nel rettangolo T è, quando esiste, il valore limite che si ottiene facendo tendere a zero i lati dei sottorettangoli individuati dalle possibili partizioni puntate di T . Diamo la definizione precisa.

Definizione (di integrale doppio in un rettangolo). Sia $f(x, y)$ una funzione reale definita in un rettangolo T con i lati paralleli agli assi cartesiani. Si dice che un numero reale h è l'integrale doppio di f in T se, fissato un arbitrario "errore" $\epsilon > 0$, esiste un $\delta > 0$ tale che, comunque si assegni una partizione puntata α con parametro di finezza $|\alpha|$ minore di δ , la distanza $|S_f(\alpha) - h|$ tra la somma $S_f(\alpha)$ e il numero h è minore di ϵ . Se ciò accade, si scrive

$$\lim_{|\alpha| \rightarrow 0} S_f(\alpha) = h$$

e la funzione f si dice integrabile in T (secondo Cauchy-Riemann). Il numero h si chiama "integrale (doppio)" di f in T e si denota con uno dei seguenti simboli

$$\int_T f, \iint_T f(x, y) dx dy, \iint_T f, \int_T f(x, y) dx dy$$

Dalla precedente definizione segue facilmente che l'integrale doppio, quando esiste, è unico (unicità del limite). Inoltre, dalle note proprietà del limite, si deduce che l'integrale doppio gode della seguente

Proprietà di linearità. Se f e g sono due funzioni integrabili in un rettangolo T e a e b sono due numeri reali, allora anche la funzione $af + bg$ è integrabile e si ha

$$\iint_T (af + bg) dx dy = a \iint_T f dx dy + b \iint_T g dx dy$$

cioè l'integrale è un funzionale lineare sullo spazio vettoriale delle funzioni integrabili (nel rettangolo T). Sempre dalla definizione di integrale si deduce che se f è integrabile in un rettangolo T e $f(x, y) \geq 0, \forall (x, y) \in T$, allora $\iint_T f dx dy \geq 0$, e da ciò segue (tenendo conto della linearità) che l'integrale doppio gode della seguente

Proprietà di monotonia. Se f, g sono due funzioni integrabili in un rettangolo T e se $f(x, y) \geq g(x, y), \forall (x, y) \in T$, allora

$$\iint_T f(x, y) dx dy \geq \iint_T g(x, y) dx dy$$

Un sottoinsieme di R^2 si dice **trascurabile** (in R^2) oppure di misura (bidimensionale) nulla se per ogni $\epsilon > 0$ può essere ricoperto con una famiglia (al più) numerabile di rettangoli coi lati paralleli agli assi di area totale minore di ϵ (nel senso che la somma, o la serie, delle aree dei rettangoli è minore di ϵ). Si potrebbe dimostrare che il grafico di una funzione continua in un intervallo è un insieme trascurabile di R^2 . Inoltre l'unione di un numero finito (o, addirittura, di un'infinità numerabile) di insiemi trascurabili è ancora un insieme trascurabile. In particolare gli insiemi costituiti da un numero finito (o da un'infinità numerabile) di punti sono trascurabili. Sussiste il seguente **Teorema** (di integrabilità). Una funzione $f : [a, b] \times [c, d] \rightarrow R$ è integrabile nel rettangolo $[a, b] \times [c, d]$ se e solo se è limitata e l'insieme dei suoi punti di discontinuità è trascurabile.

Una prima conseguenza del teorema di integrabilità è che la somma, il prodotto

e la composizione di funzioni integrabili è ancora integrabile (il quoziente potrebbe essere una funzione non limitata, e quindi non integrabile). Facciamo notare, inoltre, che se una funzione è continua in un rettangolo chiuso T , allora è anche integrabile (in tale rettangolo), essendo limitata (per il Teorema di Weierstrass) ed avendo un insieme vuoto (quindi trascurabile) di punti di discontinuità. Più in generale, se una funzione ha un numero finito (o un'infinità numerabile) di punti di discontinuità, allora, purché sia limitata, è integrabile (la limitatezza, questa volta, non è assicurata).

Teorema di equivalenza. Siano f e g due funzioni integrabili in un rettangolo T che differiscono soltanto in un insieme trascurabile di punti di T , allora

$$\iint_T f(x, y) dx dy = \iint_T g(x, y) dx dy$$

Per integrare una funzione $f(x, y)$ in un rettangolo T non occorre che questa sia necessariamente definita in tutti i punti del rettangolo. Ad esempio, se è definita in tutto T tranne un numero finito di punti, può essere estesa assegnandole dei valori arbitrari in tali punti (per esempio il valore zero). In base al teorema di equivalenza, due differenti estensioni hanno lo stesso integrale. In pratica funzioni che uno studente di ingegneria può incontrare nello svolgere gli esercizi hanno un insieme trascurabile di punti di discontinuità. Il motivo è dovuto al fatto che ogni "ragionevole funzione" si ottiene mediante le note funzioni elementari (con un numero finito di operazioni di somma, prodotto, quoziente, composizione, restrizione ad un intervallo e inversione), ciascuna delle quali ha un insieme trascurabile di punti di discontinuità (spesso è addirittura continua). Verificare quindi se una funzione è integrabile (in un rettangolo) o non lo è si riduce a controllare se (in tale rettangolo) è limitata oppure no. Per esempio la funzione $f(x, y) = \frac{1}{x^2+y^2}$ è integrabile in un rettangolo (chiuso) T se e solo se T non contiene il punto $(0, 0)$. Infatti, se T non contiene l'origine, allora, essendo f continua in tutti punti del suo dominio $R^2 \setminus \{(0, 0)\}$, è continua anche in T ed è quindi integrabile in un tale T . Se invece T contiene l'origine, allora la funzione non può essere limitata in tale rettangolo, dato che $f(x, y) \rightarrow +\infty$ per $(x, y) \rightarrow (0, 0)$. Si noti che in questo caso la non integrabilità non dipende dal fatto che la f non è definita in $(0, 0)$: può essere estesa assegnandole un valore qualunque nell'origine, ma nessuna estensione potrà renderla limitata.

Come calcolare un integrale doppio mediante due successive integrazioni semplici ce lo dice il

Teorema di riduzione degli integrali doppi. Sia f una funzione reale delle variabili (x, y) definita in un rettangolo $T = [a, b] \times [c, d]$. Allora, "quando ha senso", risulta

$$\iint_T f(x, y) dx dy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx$$

In sostanza questo Teorema afferma che per calcolare l'integrale doppio di $f(x, y)$ in $[a, b] \times [c, d]$ è possibile integrare prima in $[a, b]$ la funzione $f(x, y)$ rispetto alla variabile x , ottenendo così una funzione $g(y) = \int_a^b f(x, y) dx$, ed integrare poi $y \rightarrow g(y)$ nell'intervallo $[c, d]$ (oppure agire allo stesso modo scambiando l'ordine delle operazioni). Con l'affermazione "quando ha senso" vogliamo significare quando siano soddisfatte ipotesi che garantiscano che gli integrali in questione siano ben definiti. Tanto per fare un esempio, se f è continua nel rettangolo $[a, b] \times [c, d]$, gli integrali hanno senso (ma ci sono ovviamente situazioni molto più generali).

Dato un insieme A di R^2 e data $f : A \rightarrow R$, la funzione $\tilde{f} : R^2 \rightarrow R$ definita da

$$\tilde{f}(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & \text{se } (x, y) \in A \\ 0 & \text{se } (x, y) \notin A \end{cases}$$

si chiama **estensione standard** di f (relativa ad A).

Sia $(x, y) \rightarrow f(x, y)$ una funzione di due variabili definita in un sottoinsieme limitato A di R^2 . Consideriamo un (arbitrario) rettangolo T contenente A . Diremo che f è integrabile in A se è integrabile in T la sua estensione standard \tilde{f} . In tal caso l'integrale di f in A si definisce nel modo seguente

$$\iint_A f(x, y) dx dy = \iint_T \tilde{f}(x, y) dx dy$$

Dal fatto che \tilde{f} è nulla fuori da A si potrebbe dedurre che il secondo integrale non dipende dal rettangolo T contenente A . Pertanto, la definizione è ben posta.

Definizione. Un sottoinsieme limitato A di R^2 si dice **misurabile** (secondo Peano - Jordan) quando è integrabile in A la funzione costante $f(x, y) = 1$. In tal caso la misura (bidimensionale) di A , detta anche area, è il numero

$$\mu(A) = \iint_A dx dy$$

Si può provare che un sottoinsieme limitato A è misurabile se e solo se la sua frontiera è trascurabile. Ad esempio, è misurabile ogni insieme limitato la cui frontiera è unione finita di grafici ($y = \phi(x)$ o $x = \psi(y)$) di funzioni continue.

Elenchiamo alcune proprietà dell'integrale doppio che discendono facilmente dalla definizione.

Linearità. Siano $f, g : A \rightarrow R$ due funzioni integrabili in un insieme limitato $A \subset R^2$ e siano $a, b \in R$. Allora risulta

$$\iint_A (af(x, y) + bg(x, y)) dx dy = a \iint_A f(x, y) dx dy + b \iint_A g(x, y) dx dy$$

Monotonia. Siano $f, g : A \rightarrow R$ due funzioni integrabili in un insieme limitato $A \subset R^2$ e supponiamo $f(x, y) \leq g(x, y)$ per ogni $(x, y) \in A$. Allora risulta

$$\iint_A f(x, y) dx dy \leq \iint_A g(x, y) dx dy$$

Additività (rispetto all'insieme di integrazione). Supponiamo che f sia una funzione integrabile sia in un insieme A che in un insieme B , con $A \cap B = \emptyset$. Allora f è integrabile in $A \cup B$ e

$$\iint_{A \cup B} f(x, y) dx dy = \iint_A f(x, y) dx dy + \iint_B f(x, y) dx dy$$

Sia $A \subset R^2$ un insieme del tipo

$$A = \{(x, y) : a \leq x \leq b, \phi_1(x) \leq y \leq \phi_2(x)\}$$

dove $\phi_1, \phi_2 : [a, b] \rightarrow R$ sono due funzioni continue. Si dice che A è semplice (o normale) rispetto all'asse delle y quando le parallele all'asse y intersecano A in un intervallo i cui estremi sono $\phi_1(x)$ e $\phi_2(x)$. Supponiamo che f sia una funzione integrabile in A . Dato un rettangolo $T = [a, b] \times [c, d]$ contenente A , l'integrale di f in A è per definizione

$$\iint_T \tilde{f}(x, y) dx dy$$

Dal Teorema di riduzione si ha

$$\iint_T \tilde{f}(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_c^d \tilde{f}(x, y) dy \right) dx$$

D'altra parte

$$\int_c^d \tilde{f}(x, y) dy = \int_c^{\phi_1(x)} \tilde{f}(x, y) dy + \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} \tilde{f}(x, y) dy + \int_{\phi_2(x)}^d \tilde{f}(x, y) dy$$

e, tenendo conto che \tilde{f} è nulla fuori da A , si ottiene

$$\int_c^d \tilde{f}(x, y) dy = \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} \tilde{f}(x, y) dy$$

Poiché in A le due funzioni f ed \tilde{f} coincidono, si ha

$$\int_c^d \tilde{f}(x, y) dy = \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x, y) dy$$

Si ottiene così la seguente importante formula di riduzione, valida per gli insiemi che sono semplici rispetto all'asse delle y :

$$\iint_A f(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x, y) dy \right) dx$$

Analogamente, se $B \subset \mathbb{R}^2$ un insieme del tipo

$$B = \{(x, y) : c \leq y \leq d, \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)\}$$

dove $\psi_1, \psi_2 : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ sono due funzioni continue, ed f è integrabile in B , si ha l'altra formula di riduzione, valida quando B è semplice rispetto all'asse delle x :

$$\iint_B f(x, y) dx dy = \int_c^d \left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx \right) dy$$

Vale il seguente

Teorema (di cambiamento di variabile per gli integrali doppi). Sia $\phi(u, v) = (\phi_1(u, v), \phi_2(u, v))$ un'applicazione continua da un insieme chiuso e limitato $D \subset \mathbb{R}^2$ in \mathbb{R}^2 . Supponiamo che le frontiere di D e di $\phi(D)$ siano trascurabili e che ϕ sia C^1 e iniettiva nell'interno di D . Allora, data una funzione di due variabili f continua su $\phi(D)$, risulta

$$\iint_{\phi(D)} f(x, y) dx dy = \iint_D f(\phi_1(u, v), \phi_2(u, v)) |\det J_{\phi(u, v)}| du dv$$

Come applicazione calcoliamo il valore esatto di $G = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$. La convergenza di questo integrale è facilmente stabilita a priori, per cui si avrà

$$G = \lim_{k \rightarrow +\infty} G_k \quad \text{con} \quad G_k = \int_{-k}^k e^{-x^2} dx$$

Si ha poi

$$G_k^2 = \left(\int_{-k}^k e^{-x^2} dx \right) \left(\int_{-k}^k e^{-y^2} dy \right)$$

e per la formula di riduzione degli integrali doppi

$$G_k^2 = \iint_{T_k} e^{-x^2} e^{-y^2} dx dy = \iint_{T_k} e^{-(x^2+y^2)} dx dy$$

dove T_k è il quadrato centrato nell'origine di lato $2k$. Siano c_k e C_k i cerchi centrati nell'origine di raggio k e $\sqrt{2}k$ rispettivamente. La funzione $e^{-(x^2+y^2)}$ è positiva e inoltre $c_k \subset T_k \subset C_k$ per cui

$$(*) \quad \iint_{c_k} e^{-(x^2+y^2)} dx dy \leq G_k^2 \leq \iint_{C_k} e^{-(x^2+y^2)} dx dy$$

Passiamo a coordinate polari con la trasformazione

$$x = \rho \cos \theta, \quad y = \rho \sin \theta$$

il cui determinante jacobiano è ρ . Usando il teorema di cambiamento di variabile negli integrali doppi le disuguaglianze (*) diventano

$$\iint_{q_k} e^{-\rho^2} \rho d\rho d\theta \leq G_k^2 \leq \iint_{Q_k} e^{-\rho^2} \rho d\rho d\theta$$

dove q_k e Q_k sono nel piano ρ, θ i rettangoli $[0, k] \times [0, 2\pi]$, $[0, \sqrt{2}k] \times [0, 2\pi]$ rispettivamente. Usando la formula di riduzione si ottiene

$$\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^k e^{-\rho^2} \rho d\rho \leq G_k^2 \leq \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}k} e^{-\rho^2} \rho d\rho$$

e quindi

$$2\pi \left[-\frac{1}{2} e^{-\rho^2} \right]_0^k \leq G_k^2 \leq 2\pi \left[-\frac{1}{2} e^{-\rho^2} \right]_0^{\sqrt{2}k}$$

ossia

$$\pi - \pi e^{-k^2} \leq G_k^2 \leq \pi - \pi e^{-2k^2}$$

da cui segue subito che

$$G^2 = \lim_{k \rightarrow +\infty} G_k^2 = \pi$$

e quindi il risultato cercato

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

Dato un insieme di misura non nulla $A \subset \mathbb{R}^2$, il suo **centro di massa** (geometrico) è il punto (x_c, y_c) che ha per ascissa la media delle ascisse e per ordinata le media delle ordinate. Si ha pertanto

$$x_c = \frac{1}{\mu(A)} \iint_A x dx dy, \quad y_c = \frac{1}{\mu(A)} \iint_A y dx dy$$

dove $\mu(A)$ indica l'area di A .

Come esempio determiniamo il centro di massa (geometrico) del semicerchio $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq r^2, y \geq 0\}$. Per ragioni di simmetria risulta $x_c = 0$. Occorre quindi calcolare soltanto l'ordinata y_c . L'area $\mu(A)$ del semicerchio è $\frac{\pi r^2}{2}$ e quindi, usando le formule di riduzione, si ottiene

$$y_c = \frac{2}{\pi r^2} \iint_A y dx dy = \frac{2}{\pi r^2} \int_{-r}^r dx \int_0^{\sqrt{r^2-x^2}} y dy = \frac{1}{\pi r^2} \int_{-r}^r (r^2 - x^2) dx = \frac{4r}{3\pi}$$

Si osservi che $\frac{4r}{3\pi}$ è un numero minore di $r/2$.

Più in generale, determiniamo il centro di massa del settore circolare S_α di raggio r e di angolo al centro 2α definito da

$$S_\alpha = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq r^2, |y/x| \leq \tan \alpha\}$$

L'area di S_α è αr^2 e, per motivi di simmetria, risulta $y_c = 0$. Usando le coordinate polari e il teorema di cambiamento di variabile si ottiene

$$x_c = \frac{1}{\alpha r^2} \int_{-\alpha}^{\alpha} \int_0^r \rho \cos \theta \rho d\rho d\theta = \frac{2}{3} r \frac{\sin \alpha}{\alpha}$$

Osserviamo che facendo tendere α a 0 si ottiene $x_c \rightarrow \frac{2}{3}r$ che ovviamente non è il centro di massa di una sbarra omogenea.

Teorema di Pappo (per i solidi di rotazione). Sia A un insieme misurabile e limitato contenuto in un semipiano delimitato da una retta h . Il volume del

solido che si ottiene ruotando A di un angolo 2π intorno alla retta h è dato dal prodotto dell'area di A per la lunghezza della circonferenza percorsa dal centro di massa di A .

Come applicazione del Teorema di Pappo calcoliamo il volume di una sfera di raggio r . Tale sfera si può ottenere (ad esempio) facendo fare un giro completo intorno all'asse x al semicerchio A di raggio r di cui abbiamo appena determinato il centro di massa. Poiché la distanza y_c del centro di massa di A dall'asse delle x è $\frac{4r}{3\pi}$, tale punto, nella rotazione, descrive una circonferenza di lunghezza $(2\pi)(\frac{4r}{3\pi}) = \frac{8r}{3}$. Dato che l'area di A è $\frac{\pi r^2}{2}$, il volume della sfera risulta

$$\frac{\pi r^2}{2} \frac{8r}{3} = \frac{4}{3} \pi r^3$$

15.2 Integrali tripli

Una partizione di un parallelepipedo

$$Q = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3] \subset R^3$$

è una terna $P = (P_1, P_2, P_3)$ di partizioni degli intervalli $[a_1, b_1]$, $[a_2, b_2]$, $[a_3, b_3]$ rispettivamente.

Date tre partizioni, $P_1 = \{x_0, x_1, \dots, x_{n_1}\}$ di $[a_1, b_1]$, $P_2 = \{y_0, y_1, \dots, y_{n_2}\}$ di $[a_2, b_2]$, $P_3 = \{z_0, z_1, \dots, z_{n_3}\}$ di $[a_3, b_3]$, il parallelepipedo Q viene suddiviso in $(n_1 n_2 n_3)$ sottoparallelepipedi

$$Q_{ijk} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] \times [z_{k-1}, z_k]$$

di volume $\mu(Q_{ijk}) = (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})(z_k - z_{k-1})$. In ogni parallelepipedo Q_{ijk} scegliamo un punto c_{ijk} . L'insieme s dei punti c_{ijk} si dice una scelta di punti nella partizione $P = (P_1, P_2, P_3)$ di Q . Ogni parallelepipedo Q_{ijk} della partizione con il punto c_{ijk} scelto si dice un **parallelepipedo puntato**. La coppia $\alpha = (P, s)$, costituita dalla partizione $P = (P_1, P_2, P_3)$ di Q e dalla scelta s , si dice una **partizione puntata** di Q . Il parametro di finezza di $\alpha = (P, s)$, denotato con $|\alpha|$, è la massima ampiezza dei lati di tutti i possibili parallelepipedi individuati dalla partizione P .

Sia ora $f : Q \rightarrow R$ una funzione definita in Q . Ad ogni partizione puntata $\alpha = (P, s)$ di Q possiamo associare il numero

$$S_f(\alpha) = \sum_{(i,j,k) \in K} f(c_{ijk}) \mu(Q_{ijk})$$

dove la terna di indici (i, j, k) varia nell'insieme

$$K = (i, j, k) \in N^3 : 1 \leq i \leq n_1, 1 \leq j \leq n_2, 1 \leq k \leq n_3$$

Intuitivamente l'integrale triplo in Q della funzione f è, quando esiste, il valore limite che si ottiene facendo tendere a zero i lati dei sottoparallelepipedi individuati dalle possibili partizioni puntate di Q . Diremo infatti che il numero h è l'integrale triplo di f in Q se, fissato un "errore" $\epsilon > 0$, esiste un $\delta > 0$ tale che, comunque si assegni una partizione puntata α con parametro di finezza $|\alpha|$ minore di δ , la somma $S_f(\alpha)$ sopra definita dista da h meno di ϵ . Se ciò accade, si scrive

$$\lim_{|\alpha| \rightarrow 0} S_f(\alpha) = h$$

e la funzione f si dice integrabile (in Q) (secondo Cauchy-Riemann). Il numero h si chiama integrale (triplo) di f in Q e si denota con uno dei seguenti simboli

$$\int_Q f, \iiint_Q f(x, y, z) dx dy dz, \iiint_Q f, \int_Q f(x, y, z) dx dy dz$$

Un sottoinsieme di R^3 si dice trascurabile (in R^3) oppure di misura (tridimensionale) nulla se per ogni $\epsilon > 0$ può essere ricoperto con una famiglia (al più) numerabile di parallelepipedi di volume totale minore o uguale ad ϵ . Si potrebbe dimostrare che il grafico di una funzione continua (reale di due variabili reali) è un insieme trascurabile di R^3 . Inoltre l'unione di un numero finito (o, addirittura, di un'infinità numerabile) di insiemi trascurabili è ancora un insieme trascurabile. In particolare gli insiemi costituiti da un numero finito (o da un'infinità numerabile) di punti sono trascurabili. Analogamente a quanto si è visto per gli integrali doppi sussiste il

Teorema. Una funzione $f(x, y, z)$ è integrabile in un parallelepipedo Q se e solo se è limitata e l'insieme dei suoi punti di discontinuità è trascurabile.

Dalla precedente definizione segue facilmente che l'integrale, quando esiste, è unico (unicità del limite). Inoltre, dalle note proprietà del limite, si deduce che l'integrale gode della seguente

Proprietà di linearità. Se f e g sono due funzioni integrabili in un parallelepipedo Q e a e b sono due numeri reali, allora anche la funzione $af + bg$ è integrabile e si ha

$$\iiint_Q (af + bg) dx dy dz = a \iiint_Q f dx dy dz + b \iiint_Q g dx dy dz$$

cioè l'integrale è un funzionale lineare sullo spazio vettoriale delle funzioni integrabili (nel parallelepipedo Q). Sempre dalla definizione di integrale si deduce che se f è integrabile in un parallelepipedo Q e $f(x, y, z) \geq 0, \forall(x, y, z) \in Q$, allora $\int_Q f dx dy dz \geq 0$, e da ciò segue (tenendo conto della linearità) che l'integrale triplo gode della seguente

Proprietà di monotonia. Se f, g sono due funzioni integrabili in un parallelepipedo Q e se $f(x, y, z) \geq g(x, y, z), \forall(x, y, z) \in Q$, allora

$$\iiint_Q f(x, y, z) dx dy dz \geq \iiint_Q g(x, y, z) dx dy dz$$

Il seguente risultato riconduce il calcolo di un integrale triplo a due successive integrazioni: una semplice seguita da una doppia, o una doppia seguita da una semplice.

Teorema di riduzione (per gli integrali tripli). Sia f una funzione reale delle variabili (x, y, z) definita in un parallelepipedo $Q = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$. Allora, "quando ha senso", risulta

$$\iiint_Q f(x, y, z) dx dy dz = \iint_T \left(\int_{a_3}^{b_3} f(x, y, z) dz \right) dx dy ,$$

$$\iiint_Q f(x, y, z) dx dy dz = \int_{a_3}^{b_3} \left(\iint_T f(x, y, z) dx dy \right) dz$$

dove T denota il rettangolo $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ nel piano (xy) .

La prima formula in questo Teorema afferma che per calcolare l'integrale triplo di $f(x, y, z)$ in Q è possibile integrare prima in $[a_3, b_3]$ la funzione $f(x, y, z)$ rispetto alla variabile z , ottenendo così una funzione

$$g(x, y) = \int_{a_3}^{b_3} f(x, y, z) dz$$

ed integrare poi $g(x, y)$ nel rettangolo $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$.

La seconda formula afferma che si ottiene lo stesso risultato facendo prima l'integrale doppio in $T = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ della funzione $f(x, y, z)$ rispetto alle variabili x ed y , ottenendo così una funzione

$$h(z) = \iint_T f(x, y, z) dx dy$$

ed integrando poi $h(z)$ nell'intervallo $[a_3, b_3]$.

Ovviamente in questo Teorema i ruoli delle variabili x, y, z possono essere permutati. Per l'affermazione "quando ha senso" valgono osservazioni analoghe a quelle fatte in precedenza per gli integrali doppi.

Dato un insieme A di R^3 e data $f : A \rightarrow R$, la funzione $\tilde{f} : R^3 \rightarrow R$ definita da

$$\tilde{f}(x, y, z) = \begin{cases} f(x, y, z) & \text{se } (x, y, z) \in A \\ 0 & \text{se } (x, y, z) \notin A \end{cases}$$

si chiama **estensione standard** di f (relativa ad A).

Sia f una funzione di tre variabili definita in un sottoinsieme limitato A di R^3 . Consideriamo un (arbitrario) parallelepipedo Q contenente A . Diremo che f è integrabile in A se è integrabile in Q la sua estensione standard \tilde{f} . In tal caso l'integrale di f in A si definisce nel modo seguente

$$\iiint_A f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_Q \tilde{f}(x, y, z) dx dy dz$$

Dal fatto che \tilde{f} è nulla fuori da A si potrebbe dedurre che il secondo integrale non dipende dal parallelepipedo Q contenente A . Pertanto, la definizione è ben posta.

Definizione. Un sottoinsieme limitato A di R^3 si dice **misurabile** (secondo Peano - Jordan) quando è integrabile in A la funzione costante $f(x, y, z) = 1$. In tal caso la misura (tridimensionale) di A , detta anche volume, è il numero

$$\mu(A) = \iiint_A dx dy dz$$

Si può provare che un sottoinsieme limitato A è misurabile se e solo se la sua frontiera è trascurabile.

Teorema (additività rispetto all'insieme di integrazione). Supponiamo che f sia una funzione integrabile sia in un insieme A che in un insieme B , con $A \cap B = \emptyset$. Allora f è integrabile in $A \cup B$ e

$$\iiint_{A \cup B} f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_A f(x, y, z) dx dy dz + \iiint_B f(x, y, z) dx dy dz$$

Diamo ora un'applicazione del Teorema di riduzione al calcolo di integrali tripli in insiemi che hanno una forma particolare. Sia $A \subset R^3$ un insieme del tipo

$$A = \{(x, y, z) : (x, y) \in C, \phi_1(x, y) \leq z \leq \phi_2(x, y)\}$$

dove $\phi_1, \phi_2 : C \rightarrow R$ sono due funzioni continue definite in un sottoinsieme chiuso e limitato C di R^2 . Si dice che A è semplice (o normale) rispetto all'asse delle z , perché ogni retta parallela a tale asse lo interseca in un intervallo (di estremi $\phi_1(x, y)$ e $\phi_2(x, y)$, per $(x, y) \in C$).

Sia f una funzione integrabile in A . Dal Teorema di riduzione si ottiene la seguente importante formula di riduzione, detta anche formula degli spaghetti (paralleli all'asse z), valida per gli insiemi che sono semplici rispetto all'asse delle z :

$$\iiint_A f(x, y, z) dx dy dz = \iint_C \left(\int_{\phi_1(x, y)}^{\phi_2(x, y)} f(x, y, z) dz \right) dx dy$$

dove C è la proiezione ortogonale di A sul piano (xy) e $\phi_1, \phi_2 : C \rightarrow R$ sono due funzioni i cui grafici delimitano A .

Ovviamente si hanno altre due formule degli spaghetti: una con spaghetti paralleli all'asse x e l'altra con spaghetti paralleli all'asse y .

Dal Teorema di riduzione si deduce anche un'altra formula per il calcolo di un integrale triplo in un insieme limitato A : la formula delle fette. Anche in questo caso, in realtà, si avranno tre formule, a seconda che le fette siano perpendicolari all'asse z , all'asse x o all'asse y . Illustriamo la formula delle fette perpendicolari all'asse z .

Sia $(x, y, z) \rightarrow f(x, y, z)$ una funzione integrabile in un insieme limitato $A \subset R^3$. Fissato $z \in R$, denotiamo con

$$A_z = \{(x, y) \in R^2 : (x, y, z) \in A\}$$

la "fetta" (eventualmente vuota) che si ottiene "tagliando" A con il piano perpendicolare all'asse z e passante per il punto $(0, 0, z)$. Sia $[a, b]$ un intervallo contenente la proiezione ortogonale di A sull'asse z : vale la seguente formula delle fette :

$$\iiint_A f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b \left(\iint_{A_z} f(x, y, z) dx dy \right) dz$$

Dalla formula delle fette ritroviamo il fatto (già visto) che il volume $\mu_3(A)$ di un solido A la cui proiezione ortogonale sull'asse z risulti contenuta in un intervallo $[a, b]$ si ottiene integrando tra a e b l'area $\mu_2(A_z)$ della generica fetta A_z . Si ha infatti

$$\mu_3(A) = \iiint_A dx dy dz = \int_a^b \left(\iint_{A_z} dx dy \right) dz = \int_a^b \mu_2(A_z) dz$$

Teorema (di cambiamento di variabile per gli integrali tripli). Sia $\phi(u, v, w) = (\phi_1(u, v, w), \phi_2(u, v, w), \phi_3(u, v, w))$ un'applicazione continua da un insieme chiuso e limitato $D \subset R^3$ in R^3 . Supponiamo che le frontiere di D e di $\phi(D)$ siano trascurabili e che ϕ sia C^1 e iniettiva nell'interno di D . Allora, data una funzione di tre variabili f continua su $\phi(D)$, risulta

$$\iiint_{\phi(D)} f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_D f(\phi_1(u, v, w), \phi_2(u, v, w), \phi_3(u, v, w)) |\det J_\phi(u, v, w)| du dv dw$$

Come esempio calcoliamo il volume V di una sfera di raggio r usando coordinate sferiche. Poniamo $A = \{(x, y, z) \in R^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2\}$ e osserviamo che i punti di A sono immagine tramite l'applicazione ϕ che definisce le coordinate sferiche, dei punti del parallelepipedo chiuso e limitato $D = \{(\rho, \theta, \phi) \in R^3 : 0 \leq \rho \leq r, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \phi \leq \pi\}$. L'applicazione ϕ è continua in D , di classe C^1 e iniettiva nell'interno di D (non è iniettiva su ∂D). Applicando il teorema di cambiamento di variabile si ottiene

$$\begin{aligned} V &= \iiint_A dx dy dz = \iiint_D \rho^2 |\sin \phi| d\rho d\theta d\phi = \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^r \int_0^\pi \rho^2 \sin \phi d\rho d\theta d\phi = \\ &= \frac{2}{3} \pi r^3 \int_0^\pi \sin \phi d\phi = \frac{2}{3} \pi r^3 [-\cos \phi]_0^\pi = \frac{4}{3} \pi r^3 \end{aligned}$$