Lezioni di Geometria

*Corso di Analisi I e Geometria
Corso di Laurea Scienza dell'Ingegneria Edile
Anno Accademico 2005-2006*

Dott. Alessandro Pizzotti

Ultimo aggiornamento: 12 Dicembre 2005

Indice

1	Matrici	5
1.1	Definizione di matrice	5
1.2	Operazioni tra matrici	6
1.3	Invertibilità e determinante	12
2	Algebra lineare	23
2.1	Definizione di spazio vettoriale	23
2.2	Dipendenza e indipendenza lineare	26
2.3	Sottospazi vettoriali	28
2.4	Spazi vettoriali di dimensione finita e basi	30
2.5	Varietà affini	34
2.6	Applicazioni lineari	35
2.7	Rappresentazione matriciale delle applicazioni lineari	38
3	Sistemi lineari	47
3.1	Rango e caratteristica di una matrice	47
3.2	Calcolo del rango	48
3.3	Sistemi lineari	51
3.4	Ricerca di nucleo e immagine di un'applicazione lineare	60

Capitolo 1

Matrici

1.1 Definizione di matrice

Definizione 1.1.1. Dato un insieme S , una **matrice** ad elementi in S è una tabella di elementi di S , ovvero un insieme di elementi di S organizzati in righe e colonne. Se una matrice ha n righe e m colonne si dice che è una **matrice n per m** . Se due matrici hanno stesso numero di righe e di colonne si dice che sono dello stesso tipo.

Esempio 1.1.1. Se $S = \{a, b, c, d\}$. allora

$$\begin{pmatrix} a & a & d & c & b \\ d & d & c & a & b \\ b & a & d & c & c \\ d & c & b & a & b \end{pmatrix}$$

è una matrice quattro per cinque ad elementi in S .

Ci interesseranno quasi esclusivamente le matrici ad elementi in $\mathbb{R}$, che chiameremo brevemente **matrici reali**. L'insieme delle matrici n per m ad elementi in S verrà indicato con $\mathcal{M}(S, n, m)$. Per esempio

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \sqrt{2} \\ \pi & \sin 1 & e \end{pmatrix} \in \mathcal{M}(\mathbb{R}, 2, 3).$$

Per indicare gli elementi di una matrice si useranno lettere minuscole con due indici, con la convenzione che il primo indice denota la riga in cui si trova l'elemento e il secondo indice la colonna. Se $A \in \mathcal{M}(\mathbb{R}, n, m)$, la scrittura

$$A = (a_{ij})$$

vuole dire che indichiamo con a_{ij} l'elemento della matrice A che si trova nella riga i -esima e nella colonna j -esima. Ovviamente l'indice i può assumere i valori $1, 2, \dots, n$ e l'indice j i valori $1, 2, \dots, m$.

Esempio 1.1.2. Se

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ \frac{1}{2} & 3 \end{pmatrix}$$

si ha per esempio $a_{12} = 2$, $a_{31} = 1/2$.

A volte può essere utile indicare una matrice evidenziando le sue righe oppure le sue colonne; così se $A \in \mathcal{M}(\mathbb{R}, n, m)$, scrivendo

$$A = (A_1 A_2 \dots A_m)$$

indichiamo con $A_1, A_2, \dots, A_m$ le colonne di A , ciascuna delle quali è costituita da n elementi; mentre scrivendo

$$A = \begin{pmatrix} A^1 \\ A^2 \\ \vdots \\ A^n \end{pmatrix}$$

indichiamo con $A^1, A^2, \dots, A^n$ le righe di A , ciascuna delle quali è costituita da m elementi.

Esempio 1.1.3. Se

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

si può scrivere

$$A = (A_1 A_2 A_3 A_4)$$

dove

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad A_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} \quad A_4 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

oppure

$$A = \begin{pmatrix} A^1 \\ A^2 \\ A^3 \end{pmatrix}$$

dove

$$A^1 = (1 \ 0 \ 2 \ -3) \quad A^2 = (0 \ -1 \ 3 \ 0) \quad A^3 = (4 \ 1 \ -4 \ 1).$$

1.2 Operazioni tra matrici

In ciascun insieme $\mathcal{M}(\mathbb{R}, n, m)$ si definiscono l'operazione di addizione "+" e l'operazione di moltiplicazione per elementi di $\mathbb{R}$ "." nel seguente modo.

Addizione Date $A, B \in \mathcal{M}(\mathbb{R}, n, m)$ dove $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$, si ha $A + B = (a_{ij} + b_{ij})$

Moltiplicazione per elementi di $\mathbb{R}$ Dati $\alpha \in \mathbb{R}$ e $A \in \mathcal{M}(\mathbb{R}, n, m)$ dove $A = (a_{ij})$, si ha $\alpha \cdot A = (\alpha a_{ij})$

Ovvero sia l'addizione che la moltiplicazione per numeri reali si effettuano 'elemento per elemento'. In seguito il simbolo "·" che indica la moltiplicazione per elementi di $\mathbb{R}$ verrà omesso, e tale operazione sarà indicata semplicemente accostando i simboli corrispondenti: αA significherà $\alpha \cdot A$. Si noti che l'addizione si può effettuare esclusivamente tra matrici dello stesso tipo, e la somma è una matrice dello stesso tipo degli addendi.

Esempio 1.2.1. Se

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

allora

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

e per esempio

$$2A = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -2 & 6 \\ 2 & -8 \end{pmatrix}, 3B = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}.$$

Si può inoltre definire un'operazione di moltiplicazione tra matrici $A \in \mathcal{M}(\mathbb{R}, n, m)$ e $B \in \mathcal{M}(\mathbb{R}, m, k)$, ovvero quando **il numero di colonne della prima matrice è uguale al numero di righe della seconda**. Il risultato è una matrice $AB \in \mathcal{M}(\mathbb{R}, n, k)$. Se $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$, la matrice prodotto AB ha elementi c_{ij} dati da:

$$c_{ij} = \sum_{h=1}^m a_{ih} b_{hj}.$$

Ricordando che il primo indice di ogni elemento si riferisce alla riga e il secondo alla colonna, l'espressione precedente dice che per ottenere l'elemento della matrice prodotto AB che si trova nella i -esima riga e nella j -esima colonna bisogna moltiplicare ordinatamente gli elementi della riga i -esima di A per i corrispondenti elementi della colonna j -esima di B , e poi sommare i prodotti trovati.

Esempio 1.2.2. Se

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 & -1 \\ 1 & 0 & 3 & -2 \\ 1 & -3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

allora, posto $AB = (c_{ij})$ si ha:

$$\begin{aligned} c_{11} &= 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 3 \cdot 1 = 3 \\ c_{12} &= 1 \cdot 2 + 0 \cdot 0 + 3 \cdot (-3) = -7 \\ c_{13} &= 1 \cdot (-3) + 0 \cdot 3 + 3 \cdot 2 = -1 \\ c_{14} &= 1 \cdot (-1) + 0 \cdot (-2) + 3 \cdot 0 = -1 \\ c_{21} &= 2 \cdot 0 + (-2) \cdot 1 + 1 \cdot 1 = -1 \\ c_{22} &= 2 \cdot 2 + (-2) \cdot 0 + 1 \cdot (-3) = 1 \\ c_{23} &= 2 \cdot (-3) + (-2) \cdot 3 + 1 \cdot 2 = -10 \\ c_{24} &= 2 \cdot (-1) + (-2) \cdot (-2) + 1 \cdot 0 = 2 \end{aligned}$$

quindi

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & -7 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -10 & 2 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 1.2.1. Date

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 4 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

calcolare i prodotti AB e BA .

Osservazione 1.2.1. In generale date due matrici A e B non si può moltiplicarle né in un modo né nell'altro, vale a dire non esiste né il prodotto AB né il prodotto BA . Può succedere che esista uno solo dei due, o tutti e due se $A \in \mathcal{M}(\mathbb{R}, n, m)$ e $B \in \mathcal{M}(\mathbb{R}, m, n)$ ma in generale, se $n \neq m$, sono matrici di tipo diverso.

Per le operazioni appena definite valgono le seguenti proprietà. Nelle proposizioni che seguono n , m , k e h sono dei qualsiasi numeri naturali.

Proprietà dell'addizione tra matrici

- $\forall A, B, C \in \mathcal{M}(\mathbb{R}, n, m) \quad A + (B + C) = (A + B) + C$
(proprietà associativa)
- $\forall A, B \in \mathcal{M}(\mathbb{R}, n, m) \quad A + B = B + A$
(proprietà commutativa)
- indicata con $\mathbf{0}$ la matrice n per m i cui elementi sono tutti uguali a 0 , detta **matrice nulla**, si ha
 $\forall A \in \mathcal{M}(\mathbb{R}, n, m) \quad A + \mathbf{0} = A$
(esistenza dell'elemento neutro)
- per ogni $A \in \mathcal{M}(\mathbb{R}, n, m)$, se $A = (a_{ij})$, posto $-A = (-a_{ij})$ si ha
 $A + (-A) = \mathbf{0}$
(esistenza dell'opposta di una qualunque matrice)

Proprietà della moltiplicazione per numeri reali

- $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \forall A \in \mathcal{M}(\mathbb{R}, n, m) \quad \alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$
(proprietà associativa)
- $\forall A \in \mathcal{M}(\mathbb{R}, n, m) \quad 1A = A$

Proprietà della moltiplicazione tra matrici

- $\forall A \in \mathcal{M}(\mathbb{R}, n, m) \quad \forall B \in \mathcal{M}(\mathbb{R}, m, k) \quad \forall C \in \mathcal{M}(\mathbb{R}, k, h)$
 $A(BC) = (AB)C$
(proprietà associativa)
- Detta $I_k \in \mathcal{M}(\mathbb{R}, k, k)$ la matrice con elementi δ_{ij} dati da

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

si ha $\forall A \in \mathcal{M}(\mathbb{R}, n, m) \quad I_n A = A, \quad A I_m = A$
(esistenza dell'elemento neutro a destra e a sinistra)

Proprietà distributive

- $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \forall A \in \mathcal{M}(\mathbb{R}, n, m) \quad (\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$
(proprietà distributiva dell'addizione in $\mathbb{R}$ rispetto alla moltiplicazione per una matrice)
- $\forall \alpha \in \mathbb{R} \forall A, B \in \mathcal{M}(\mathbb{R}, n, m) \quad \alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$
(proprietà distributiva dell'addizione tra matrici rispetto alla moltiplicazione per un numero reale)
- $\forall A, B \in \mathcal{M}(\mathbb{R}, n, m) \quad \forall C \in \mathcal{M}(\mathbb{R}, m, k) \quad (A + B)C = AC + BC$
(proprietà distributiva a sinistra dell'addizione tra matrici rispetto alla moltiplicazione tra matrici)
- $\forall A \in \mathcal{M}(\mathbb{R}, n, m) \quad \forall B, C \in \mathcal{M}(\mathbb{R}, m, k) \quad A(B + C) = AB + AC$
(proprietà distributiva a destra dell'addizione tra matrici rispetto alla moltiplicazione tra matrici)

Le proprietà che riguardano l'addizione tra matrici e la moltiplicazione di matrici per numeri reali sono pressoché evidenti, e per dimostrarle è sufficiente una semplice verifica. Per quanto riguarda le proprietà che coinvolgono la moltiplicazione tra matrici, è opportuno spendere qualche parola in più.

Per prima cosa, mentre l'addizione opera all'interno di un insieme $\mathcal{M}(\mathbb{R}, n, m)$, la moltiplicazione, quando è definita, associa a due matrici in generale **di tipo diverso** una matrice **di tipo diverso da entrambi gli addendi**. Pertanto, come abbiamo visto, date due matrici A, B può esistere solo il prodotto AB , solo BA , entrambi o nessuno dei due. Questo è il motivo per cui è necessario formulare separatamente le proprietà di esistenza dell'elemento neutro per la moltiplicazione tra matrici a destra e a sinistra, così come le proprietà distributive dell'addizione tra matrici rispetto alla moltiplicazione tra matrici.

Esiste una situazione in cui ha senso chiedersi se vale la proprietà commutativa per la moltiplicazione tra matrici: quando si considerano matrici in un insieme del tipo $\mathcal{M}(\mathbb{R}, n, n)$: matrici che hanno uguale numero di righe e di colonne.

Definizione 1.2.1. Si dice **matrice quadrata reale di ordine n** un elemento di $\mathcal{M}(\mathbb{R}, n, n)$

Poniamo anche $\mathcal{M}(\mathbb{R}, n) = \mathcal{M}(\mathbb{R}, n, n)$, ovvero $\mathcal{M}(\mathbb{R}, n)$ è l'insieme delle matrici quadrate di ordine n .

Date due matrici quadrate dello stesso ordine $A, B \in \mathcal{M}(\mathbb{R}, n)$, esistono sempre entrambi i prodotti AB e BA , e inoltre sono matrici quadrate dello stesso ordine di A e B : $AB, BA \in \mathcal{M}(\mathbb{R}, n)$. In questo caso la moltiplicazione opera all'interno di $\mathcal{M}(\mathbb{R}, n)$, e ha senso chiedersi se vale la proprietà commutativa.

La risposta è negativa, come si può vedere facilmente verificando che, ad esempio

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

In effetti, la proprietà commutativa della moltiplicazione vale solo in $\mathcal{M}(\mathbb{R}, 1)$, dato che le matrici reali 1 per 1 si identificano con i numeri reali stessi.

La matrice I_n definita prima:

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

si chiama **matrice unità di ordine n** , e ed è elemento neutro per la moltiplicazione tra matrici sia a destra che a sinistra, naturalmente quando l'operazione ha senso. In particolare, è l'elemento neutro per la moltiplicazione in $\mathcal{M}(\mathbb{R}, n)$. Non essendo questa una verifica immediata come quelle relative alle altre proprietà, dimostriamo questo fatto.

Proposizione 1.2.1. *Se $A \in \mathcal{M}(\mathbb{R}, n)$ allora $AI_n = I_nA = A$.*

Dimostrazione. Ricordiamo che

$$I_n = (\delta_{ij}) \quad \text{dove} \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases} \quad i, j = 1, 2, \dots, n.$$

Se $A = (a_{ij})$, posto $AI_n = (b_{ij})$ si ha

$$b_{ij} = \sum_{h=1}^n a_{ih} \delta_{hj}. \tag{1.1}$$

Per la definizione di δ_{ij} , nella somma 1.1, per ogni coppia di indici i, j , tutti gli addendi in cui $h \neq j$ valgono 0, mentre l'unico addendo in cui $h = j$ vale a_{ij} . Quindi per ogni coppia di indici i, j si ha $b_{ij} = a_{ij}$ e infine $AI_n = A$.

La dimostrazione che $I_nA = A$ è del tutto analoga. $\square$

Il fatto che la moltiplicazione tra matrici quadrate dello stesso ordine non sia commutativa può essere sorprendente, ma non è l'unica cosa diversa, rispetto alla situazione con cui si ha più familiarità della moltiplicazione tra numeri.

Il seguente esempio mostra che può succedere qualcosa di ancora più strano e fastidioso:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Può cioè avvenire che il prodotto di due matrici entrambe diverse dalla matrice nulla sia nullo. Una matrice A per la quale ne esiste un'altra B tale che AB oppure BA sia uguale alla matrice nulla (del tipo determinato dai tipi di A e di B) si chiama **divisore dello zero**. Ovviamente anche B è un divisore dello zero. L'esempio appena visto non ha niente di particolare, è evidente che si possono costruire esempi di matrici divisori dello zero di qualsiasi tipo tranne 1 per 1, quindi in particolare in ogni insieme $\mathcal{M}(\mathbb{R}, n)$ ci sono divisori dello zero.

Da ora in avanti indicheremo semplicemente con 0 una qualunque matrice nulla, non necessariamente quadrata; in generale non sarà necessario indicarne esplicitamente il tipo, essendo questo evidente: se per esempio $A \in \mathcal{M}(\mathbb{R}, 2, 3)$, $B \in \mathcal{M}(\mathbb{R}, 3, 5)$ e $AB = 0$, non ci possono essere dubbi che qui 0 indica la matrice nulla 2 per 5.

Il fatto che ci siano matrici divisori dello zero comporta che non valga per le matrici una regola che ci è familiare nell'ambito dei numeri: se sappiamo che $AB = 0$ non possiamo dedurre che $A = 0$ oppure $B = 0$. Come conseguenza, se $C \neq 0$ e $AC = BC$ non c'è nessuna ragione perché sia $A = B$.

Definiamo un altro importante concetto relativo alle matrici.

Definizione 1.2.2. Se $A = (a_{ij})$, si chiama **trasposta** di A la matrice $A^t = (b_{ij})$ i cui elementi sono definiti da $b_{ij} = a_{ji}$. Vale a dire, la matrice A^t si ottiene dalla matrice A scambiando le righe con le colonne. Ovviamente se $A \in \mathcal{M}(\mathbb{R}, n, m)$, allora $A^t \in \mathcal{M}(\mathbb{R}, m, n)$.

Esempio 1.2.3. Se

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

allora

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Proposizione 1.2.2. Valgono le seguenti proprietà

- $(A + B)^t = A^t + B^t$
- $(AB)^t = B^t A^t$

Dimostrazione. La dimostrazione della prima proprietà è elementare e può essere effettuata per esercizio.

Dimostriamo la seconda. Sia $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}(\mathbb{R}, n, m)$, $B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}(\mathbb{R}, m, l)$. Posto $AB = (c_{ij})$ si ha

$$c_{ij} = \sum_{h=1}^m a_{ih} b_{hj}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad j = 1, 2, \dots, l$$

e, posto $(AB)^t = (\bar{c}_{ij})$

$$\bar{c}_{ij} = c_{ji} = \sum_{h=1}^m a_{jh}b_{hi}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad j = 1, 2, \dots, l.$$

D'altra parte, se $A^t = (\bar{a}_{ij})$ e $B^t = (\bar{b}_{ij})$ si ha $\bar{a}_{ij} = a_{ji}$ e $\bar{b}_{ij} = b_{ji}$, pertanto, posto $B^t A^t = (\tilde{c}_{ij})$

$$\begin{aligned} \tilde{c}_{ij} &= \sum_{h=1}^m \bar{b}_{ih} \bar{a}_{hj} = \sum_{h=1}^m b_{hi} a_{jh} = \\ &= \sum_{h=1}^m a_{jh} b_{hi} = \bar{c}_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad j = 1, 2, \dots, l \end{aligned}$$

da cui $(AB)^t = B^t A^t$. □

Proposizione 1.2.3. *Se A è divisore dello zero, lo è anche A^t .*

Dimostrazione. Dalla Proposizione precedente: se $AB = 0$ per una certa matrice B , allora $B^t A^t = (AB)^t = 0^t = 0$. □

1.3 Invertibilità e determinante

Abbiamo visto che se A, B, C sono matrici in $\mathcal{M}(\mathbb{R}, n)$, $C \neq 0$ e $AB = AC$, da ciò non si può in generale concludere che $A = B$: questo fatto è una conseguenza dell'esistenza in $\mathcal{M}(\mathbb{R}, n)$ di divisori dello zero. Ci domandiamo: esistono matrici C per le quali è invece possibile da $AC = BC$ dedurre che $A = B$? Evidentemente, se sappiamo che C non è divisore dello zero tale deduzione è possibile. Affrontiamo però il problema in un altro modo, considerando una diversa condizione per la matrice C , che in seguito si risulterà equivalente al non essere divisore dello zero.

Supponiamo che esista una matrice C' tale che $CC' = C'C = I_n$. Allora da $AC = BC$ segue $ACC' = BCC'$ da cui $AI_n = BI_n$ e infine $A = B$. Per una tale matrice quindi vale la regola di semplificazione: $AC = BC \Rightarrow A = B$.

Definizione 1.3.1. Sia $A \in \mathcal{M}(\mathbb{R}, n)$. Se esiste $B \in \mathcal{M}(\mathbb{R}, n)$ tale che $AB = BA = I_n$ si dice che A è **invertibile** e che B è **inversa** di A .

Togliamoci subito una curiosità sul numero di inverse di una matrice invertibile.

Proposizione 1.3.1. *Se $A \in \mathcal{M}(\mathbb{R}, n)$ è invertibile esiste una sola matrice inversa di A .*

Dimostrazione. Siano B' e B'' due inverse di A , ovvero $AB' = B'A = I_n$ e $AB'' = B''A = I_n$. Allora in particolare $AB' = AB''$ e quindi $B'AB' = B'AB''$ da cui $I_n B' = I_n B''$ e infine $B' = B''$. □

Ora possiamo dire *la* matrice inversa di A , e la indicheremo con A^{-1} .

Ci proponiamo di scoprire come sono fatte le matrici invertibili, e come si fa di una matrice invertibile a trovare la sua inversa. Intanto vediamo che non tutte le matrici sono invertibili: evidentemente la matrice nulla non lo è, ma non è l'unica.

Proposizione 1.3.2. *Se A è divisore dello zero allora non è invertibile.*

Dimostrazione. Se A è divisore dello zero allora $A \neq 0$, ed esiste B tale che $AB = 0$ e $B \neq 0$. Se A fosse invertibile allora $A^{-1}AB = A^{-1}0$ e quindi $B = 0$. $\square$

Naturalmente è inevitabile chiedersi: una matrice che non è divisore dello zero è invertibile? Per il momento non abbiamo gli strumenti necessari per rispondere a quest'altra domanda.

Consideriamo una matrici 2×2 :

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

e cerchiamo di trovare direttamente la sua inversa, quando esiste; poniamo

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$$

e si deve avere

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

quindi

$$\begin{pmatrix} ax + bz & ay + bt \\ cx + dz & cy + dt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

da cui

$$\begin{cases} ax + bz = 1 \\ cx + dz = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} ay + bt = 0 \\ cy + dt = 1 \end{cases}$$

e questi due sistemi di primo grado hanno soluzioni se $ad - bc \neq 0$, e sono date da

$$\begin{cases} x = \frac{d}{ad - bc} \\ z = \frac{-c}{ad - bc} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \frac{-b}{ad - bc} \\ t = \frac{a}{ad - bc} \end{cases}$$

pertanto

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{d}{ad - bc} & \frac{-b}{ad - bc} \\ \frac{-c}{ad - bc} & \frac{a}{ad - bc} \end{pmatrix}.$$

In questo caso, è facile verificare che effettivamente $AA^{-1} = A^{-1}A = I_2$, pertanto abbiamo dato una completa risposta al problema nel caso 2×2 , che sintetizziamo nella seguente Proposizione

Proposizione 1.3.3. *La matrice*

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

è invertibile se e solo se $ad - bc \neq 0$, e la sua inversa è data dalla matrice

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{d}{ad-bc} & \frac{-b}{ad-bc} \\ \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{pmatrix}.$$

Introduciamo un nuovo concetto

Definizione 1.3.2. Data la matrice 1×1 $A = (a)$ si dice **determinante** di A il numero a . Data la matrice 2×2

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

si dice **determinante** di A il numero

$$\det A = ad - bc.$$

Possiamo allora riformulare la Proposizione precedente nella seguente forma

Proposizione 1.3.4. *La matrice*

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

è invertibile se e solo se $\det A \neq 0$, e la sua inversa è data dalla matrice

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Vediamo ora come questo risultato sia ancora vero per matrici quadrate di ordine qualsiasi, purché si dia un senso al concetto di determinante, che per il momento abbiamo definito solo per matrici 2×2 .

Invece di dare la definizione di determinante nel caso generale, enunciamo un Teorema che ne afferma l'esistenza, poi mostreremo anche come può essere operativamente calcolato per una matrice quadrata qualsiasi.

Teorema 1.3.1. *Esiste una e una sola 'applicazione detta **determinante**, indicata con 'det', che ad ogni matrice quadrata con elementi in $\mathbb{R}$ associa un numero reale, e per la quale valgono le seguenti proprietà:*

1. per $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq k \leq n$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ si ha

$$\begin{aligned} \det(A_1, A_2, \dots, \alpha_1 A'_k + \alpha_2 A''_k, \dots, A_n) &= \\ &= \alpha_1 \det(A_1, A_2, \dots, A'_k, \dots, A_n) + \alpha_2 \det(A_1, A_2, \dots, A''_k, \dots, A_n) \end{aligned}$$

(lineare nelle colonne)

2. per $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq i < j \leq n$

$$\begin{aligned} \det(A_1, A_2, \dots, A_i, \dots, A_j, \dots, A_n) &= \\ &= -(A_1, A_2, \dots, A_j, \dots, A_i, \dots, A_n) \end{aligned}$$

(alternante)

3. per $n \in \mathbb{N}$ si ha $\det I_n = 1$ (unitaria)

La prima proprietà dice che un numero reale che moltiplica **tutta una colonna** della matrice può essere portato fuori dal determinante, e che se una sua colonna è la somma di due colonne, allora il determinante è la somma dei determinanti delle due matrici che si ottengono considerando una colonna alla volta.

Esempio 1.3.1.

$$\det \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & -2 \\ -9 & -4 & 5 \end{pmatrix} = 3 \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ -3 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

Esempio 1.3.2.

$$\det \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & -2 \\ -9 & -4 & 5 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ -3 & -4 & 5 \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & -2 \\ -6 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

La seconda proprietà dice che scambiando due colonne in una matrice il suo determinante cambia segno

Esempio 1.3.3.

La terza proprietà dice che il determinante della matrice unità di qualsiasi ordine vale 1.

Esercizio 1.3.1. Dimostrare che se una matrice ha due colonne uguali il suo determinante è nullo.

Esercizio 1.3.2. Dimostrare che se una matrice ha una colonna nulla (cioè i suoi elementi sono tutti uguali a zero) il suo determinante è nullo.

Per calcolare effettivamente il determinante di una matrice quadrata di ordine qualsiasi ci servirà un importante Teorema, ma prima abbiamo bisogno di un po' di terminologia.

Definizione 1.3.3. Sia $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}(\mathbb{R}, n)$. Si dice **minore complementare** dell'elemento a_{hk} la matrice $A_{hk} \in \mathcal{M}(\mathbb{R}, n-1)$ che si ottiene dalla matrice A eliminando la riga h -esima e la colonna k -esima.

Osservazione 1.3.1. Il minore complementare di un elemento in una matrice dipende esclusivamente dalla sua posizione all'interno della matrice stessa.

Esempio 1.3.4. Se

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & -2 \\ -9 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

i minori complementari degli elementi di A sono

$$a_{11} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$a_{12} = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -9 & 5 \end{pmatrix}$$

$$a_{13} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ -9 & -4 \end{pmatrix}$$

$$a_{21} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$a_{22} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -9 & 5 \end{pmatrix}$$

$$a_{23} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -9 & -4 \end{pmatrix}$$

$$a_{31} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$a_{32} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$$

$$a_{33} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$$

Definizione 1.3.4. Sia $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}(\mathbb{R}, n)$. Si dice **complemento algebrico** dell'elemento a_{hk} il numero

$$\bar{a}_{hk} = (-1)^{h+k} \det a_{hk}.$$

Osservazione 1.3.2. Il complemento algebrico di un elemento in una matrice dipende esclusivamente dalla sua posizione all'interno della matrice stessa, e non dal suo valore.

Esempio 1.3.5. Se

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & -2 \\ -9 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

i complementi algebrici degli elementi di A sono

$$\bar{a}_{11} = (-1)^2 \det \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} = -8$$

$$\bar{a}_{12} = (-1)^3 \det \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -9 & 5 \end{pmatrix} = -12$$

$$\bar{a}_{13} = (-1)^4 \det \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ -9 & -4 \end{pmatrix} = -24$$

$$\bar{a}_{21} = (-1)^3 \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} = -5$$

$$\bar{a}_{22} = (-1)^4 \det \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -9 & 5 \end{pmatrix} = 15$$

$$\bar{a}_{23} = (-1)^5 \det \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -9 & -4 \end{pmatrix} = 3$$

$$\bar{a}_{31} = (-1)^4 \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = -2$$

$$\bar{a}_{32} = (-1)^5 \det \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 6 & -2 \end{pmatrix} = 6$$

$$\bar{a}_{33} = (-1)^6 \det \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} = -6$$

Osservazione 1.3.3. Naturalmente, per il momento siamo in grado di calcolare complementi algebrici solo di elementi in matrici 3×3 o 2×2 .

Introduciamo anche un modo diverso per indicare il determinante di una matrice. Se

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

indicheremo il suo determinante con

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

oppure con

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{vmatrix}.$$

Esempio 1.3.6.

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 8 \end{vmatrix} = 14$$

Siamo ora in grado di dare un metodo per calcolare il determinante.

Teorema 1.3.2 (Primo Teorema di Laplace sul determinante). *Sia $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}(\mathbb{R}, n)$. Scelto i , $1 \leq i \leq n$, si ha*

$$\det A = \sum_{j=1}^n a_{ij} \bar{a}_{ij}.$$

Questo Teorema dice che, scelta una qualsiasi riga di una matrice $n \times n$, il suo determinante si calcola moltiplicando ogni elemento della riga scelta per il suo complemento algebrico, e sommando questi prodotti. Quindi, si devono calcolare n determinanti di altrettante matrici di ordine $n - 1$; per calcolare ognuno di questi, applicando di nuovo il Teorema, si devono calcolare $n - 1$ determinanti di altrettante matrici di ordine $n - 2$, e procedendo in questo modo si arriva a dover calcolare $n(n - 1)(n - 2) \cdots 4 \cdot 3$ determinanti di matrici 2×2 , cosa che sappiamo già fare.

Esempio 1.3.7. Scegliendo la prima riga si ha

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & -2 \\ -9 & -4 & 5 \end{vmatrix} = 3(-1)^2 \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ -4 & 5 \end{vmatrix} + 1(-1)^3 \begin{vmatrix} 6 & -2 \\ -9 & 5 \end{vmatrix} + \\ + 0(-1)^4 \begin{vmatrix} 6 & 0 \\ -9 & -4 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-8) - 1 \cdot 12 = -36.$$

Scegliendo la seconda riga si ha

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & -2 \\ -9 & -4 & 5 \end{vmatrix} = 6(-1)^3 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 5 \end{vmatrix} + 0(-1)^4 \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -9 & 5 \end{vmatrix} + \\ - 2(-1)^5 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -9 & -4 \end{vmatrix} = -6 \cdot 5 + 2 \cdot (-3) = -36.$$

Scegliendo la terza riga si ha

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & -2 \\ -9 & -4 & 5 \end{vmatrix} = -9(-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} - 4(-1)^5 \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 6 & -2 \end{vmatrix} + \\ + 5(-1)^6 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} = -9 \cdot (-2) + 4 \cdot (-6) + 5 \cdot (-6) = -36.$$

Teorema 1.3.3 (Secondo Teorema di Laplace sul determinante). *Sia $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}(\mathbb{R}, n)$. Scelti i, j , $1 \leq i < j \leq n$, si ha*

$$\sum_{h=1}^n a_{ih} \bar{a}_{jh} = 0.$$

Questo Teorema dice che, scelte due qualsiasi righe **distinte** di una matrice $n \times n$, moltiplicando ogni elemento di una delle due righe scelte per il complemento algebrico corrispondente (cioè nella stessa colonna) nell'altra riga, e sommando questi prodotti, il risultato è 0. La dimostrazione è piuttosto semplice: usando il Primo Teorema di Laplace, in effetti si calcola il determinante di una matrice con due righe uguali.

Proposizione 1.3.5. *Se $A \in \mathcal{M}(\mathbb{R}, n)$ allora $\det A^t = \det A$.*

Quest'ultima Proposizione permette di riformulare tutte le proprietà del determinante riguardanti le colonne in analoghe proprietà riguardanti le righe, ad esempio i Teoremi di Laplace. Così, si può calcolare il determinante di una matrice secondo una colonna invece che secondo una riga.

Esempio 1.3.8. Scegliendo la prima colonna si ha

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & -2 \\ -9 & -4 & 5 \end{vmatrix} &= 3(-1)^2 \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ -4 & 5 \end{vmatrix} + 6(-1)^3 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 5 \end{vmatrix} + \\ &\quad - 9(-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-8) - 6 \cdot 5 - 9 \cdot (-2) = -36. \end{aligned}$$

Scegliendo la seconda colonna si ha

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & -2 \\ -9 & -4 & 5 \end{vmatrix} &= 1(-1)^3 \begin{vmatrix} 6 & -2 \\ -9 & 5 \end{vmatrix} + 0(-1)^4 \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -9 & 5 \end{vmatrix} + \\ &\quad - 4(-1)^5 \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 6 & -2 \end{vmatrix} = -1 \cdot 12 + 4 \cdot (-6) = -36. \end{aligned}$$

Scegliendo la terza colonna si ha

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & -2 \\ -9 & -4 & 5 \end{vmatrix} &= 0(-1)^4 \begin{vmatrix} 6 & 0 \\ -9 & -4 \end{vmatrix} - 2(-1)^5 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -9 & -4 \end{vmatrix} + \\ &\quad + 5(-1)^6 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-3) + 5 \cdot (-6) = -36. \end{aligned}$$

Vediamo ora come ridurre notevolmente la quantità di calcoli necessari per calcolare un determinante.

Proposizione 1.3.6. *Il determinante di una matrice non cambia se ad una riga (o colonna) si aggiunge un'altra riga (o colonna) moltiplicata per un qualunque numero reale.*

Dimostrazione. Dimostriamo il risultato nel caso delle colonne. Possiamo considerare, senza perdere di generalità, la prima e la seconda colonna:

$$\begin{aligned} \det(A_1 + \alpha A_2, A_2, \dots, A_n) &= \det(A_1, A_2, \dots, A_n) + \\ &\quad + \alpha \det(A_2, A_2, \dots, A_n) = \\ &= \det(A_1, A_2, \dots, A_n) + 0 = \\ &= \det(A_1, A_2, \dots, A_n). \end{aligned}$$

□

Questo risultato è estremamente utile per fare in modo che in una riga, o colonna, compaiano elementi tutti nulli tranne (al più) uno.

Esempio 1.3.9. Per calcolare

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & -2 \\ -9 & -4 & 5 \end{vmatrix}$$

possiamo aggiungere alla prima colonna la seconda moltiplicata per -3 , ottenendo

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & -2 \\ -9 & -4 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & -2 \\ 3 & -4 & 5 \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} 6 & -2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -1 \cdot 36 = -36.$$

In questo modo si riduce drasticamente la quantità di calcoli da fare, anzi: si arriva sempre a fare in modo di dover calcolare solo un determinante 2×2 .

Esempio 1.3.10.

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 6 & 2 \\ 2 & 0 & -2 & -1 & 7 \\ 9 & -3 & 6 & -4 & 5 \\ 0 & -1 & 3 & 5 & -6 \\ 1 & 3 & -7 & 5 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 & 6 & 2 \\ 2 & -4 & -2 & -1 & 7 \\ 9 & -21 & 6 & -4 & 5 \\ 0 & -1 & 3 & 5 & -6 \\ 1 & 1 & -7 & 5 & 0 \end{vmatrix} = \\ & = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 & 2 \\ 2 & -4 & 4 & -1 & 7 \\ 9 & -21 & 33 & -4 & 5 \\ 0 & -1 & 3 & 5 & -6 \\ 1 & 1 & -4 & 5 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & -4 & 4 & -13 & 7 \\ 9 & -21 & 33 & -58 & 5 \\ 0 & -1 & 3 & 5 & -6 \\ 1 & 1 & -4 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \\ & = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 4 & -13 & 3 \\ 9 & -21 & 33 & -58 & -13 \\ 0 & -1 & 3 & 5 & -6 \\ 1 & 1 & -4 & -1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4 & 4 & -13 & 3 \\ -21 & 33 & -58 & -13 \\ -1 & 3 & 5 & -6 \\ 1 & -4 & -1 & -2 \end{vmatrix} = \\ & = \begin{vmatrix} -4 & 4 & -13 & 3 \\ -21 & 33 & -58 & -13 \\ 0 & -1 & 4 & -8 \\ 1 & -4 & -1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4 & 4 & -13 & 3 \\ 0 & -51 & -79 & -55 \\ 0 & -1 & 4 & -8 \\ 1 & -4 & -1 & -2 \end{vmatrix} = \\ & = \begin{vmatrix} 0 & -12 & -17 & -5 \\ 0 & -51 & -79 & -55 \\ 0 & -1 & 4 & -8 \\ 1 & -4 & -1 & -2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -12 & -17 & -5 \\ -51 & -79 & -55 \\ -1 & 4 & -8 \end{vmatrix} = \\ & = - \begin{vmatrix} -12 & -65 & -5 \\ -51 & -283 & -55 \\ -1 & 0 & -8 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -12 & -65 & 91 \\ -49 & -283 & 353 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \\ & = -(-1) \begin{vmatrix} -65 & 91 \\ -283 & 353 \end{vmatrix} = 2808. \end{aligned}$$

Teorema 1.3.4 (Teorema di Binet). Date $A, B \in \mathcal{M}(\mathbb{R}, n)$, si ha

$$\det(AB) = \det A \det B.$$

Da questo Teorema segue che se A è invertibile, allora $\det A \neq 0$: infatti, se A è invertibile, allora $AA^{-1} = I_n$, quindi

$$\det(AA^{-1}) = \det A \det A^{-1} = \det I_n = 1.$$

Occupiamoci ora di matrici invertibili. Di nuovo un po' di terminologia.

Definizione 1.3.5. Sia $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}(\mathbb{R}, n)$. Si dice **matrice aggiunta** di A la matrice

$$A^a = (\bar{a}_{ij})$$

ovvero la matrice i cui elementi sono i complementi algebrici dei corrispondenti (per posizione) elementi di A .

Teorema 1.3.5. Se $\det A \neq 0$ allora A è invertibile, e si ha

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} (A^a)^t.$$

Esercizio 1.3.3. Verificare il Teorema per il caso 2×2 , ovvero che l'inversa fornita dal Teorema coincide con quella trovata in precedenza.

Esempio 1.3.11. Data

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & -2 \\ -9 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

abbiamo già calcolato il suo determinante e i complementi algebrici dei suoi elementi; abbiamo

$$A^a = \begin{pmatrix} -8 & -12 & -24 \\ -5 & 15 & 3 \\ -2 & 6 & -6 \end{pmatrix}$$

quindi

$$(A^a)^t = \begin{pmatrix} -8 & -5 & -2 \\ -12 & 15 & 6 \\ -24 & 3 & -6 \end{pmatrix}$$

e infine

$$A^{-1} = -\frac{1}{36} \begin{pmatrix} -8 & -5 & -2 \\ -12 & 15 & 6 \\ -24 & 3 & -6 \end{pmatrix}.$$

Verificare che effettivamente $AA^{-1} = A^{-1}A = I_3$.

Capitolo 2

Algebra lineare

2.1 Definizione di spazio vettoriale

Definizione 2.1.1. Uno **spazio vettoriale** (reale) V è un insieme in cui esistono un'operazione detta addizione tra suoi elementi indicata con '+', e una moltiplicazione per elementi di $\mathbb{R}$, indicata con '·' o solitamente sottintesa, verificanti le seguenti proprietà

1. $\forall u, v, w \in V (u + v) + w = u + (v + w)$
2. $\forall u, v \in V u + v = v + u$
3. $\exists \mathbf{0} \in V : \forall v \in V \mathbf{0} + v = v$
4. $\forall v \in V \exists -v \in V : v + (-v) = \mathbf{0}$
5. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \forall v \in V \alpha(\beta v) = (\alpha\beta)v$
6. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \forall v \in V (\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v$
7. $\forall \alpha \in \mathbb{R} \forall v, u \in V \alpha(v + u) = \alpha v + \alpha u$
8. $\forall v \in V 1v = v$

L'elemento $\mathbf{0}$ si chiama **vettore nullo**, l'elemento $-v$ si chiama **opposto di v** .

Esempio 2.1.1. Ogni insieme di matrici $\mathcal{M}(\mathbb{R}, n, m)$, con le definite operazioni addizione e moltiplicazione per un numero reale, è uno spazio vettoriale.

Esempio 2.1.2. L'insieme $\mathbb{R}[x]$ dei polinomi a coefficienti reali nell'indeterminata x , con le consuete operazioni addizione e moltiplicazione per un numero reale, è uno spazio vettoriale.

Esempio 2.1.3. L'insieme $\mathbb{R}^n$ delle n -uple ordinate di numeri reali, che scriveremo solitamente in forma di colonna, in cui si definisce

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix} \quad \alpha \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a_1 \\ \alpha a_2 \\ \vdots \\ \alpha a_n \end{pmatrix}$$

è uno spazio vettoriale. In effetti $\mathbb{R}^n$ coincide con $\mathcal{M}(\mathbb{R}, n, 1)$

Esempio 2.1.4. Sia $A \subseteq \mathbb{R}$. Indichiamo con $F(A)$ l'insieme delle funzioni da A in $\mathbb{R}$. Per $f, g \in F(A)$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ definiamo $f + g$ e αf nel seguente modo: per ogni $x \in A$ sia

- $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$
- $(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$

Con le due operazioni così definite $F(A)$ è uno spazio vettoriale.

Adotteremo d'ora in poi alcune semplificazioni nella scrittura delle operazioni in uno spazio vettoriale, quando non queste non diano luogo ad ambiguità. Per esempio, invece di

$$v + (-w)$$

scriveremo semplicemente

$$v - w.$$

Inoltre, data la proprietà 5), se α e β sono numeri reali è evidente cosa vuole dire $\alpha\beta v$.

Alcuni risultati elementari, che diamo per scontati nei casi concreti con cui abbiamo familiarità, vanno dimostrati in generale.

Proposizione 2.1.1. *Sia V uno spazio vettoriale. Se $v \in V$ allora $0v = \mathbf{0}$.*

Dimostrazione. Si ha

$$0v = (0 + 0)v$$

quindi

$$0v = 0v + 0v$$

da cui

$$0v + (-0v) = 0v + 0v + (-0v)$$

e infine

$$\mathbf{0} = 0v.$$

□

Proposizione 2.1.2. *Sia V uno spazio vettoriale. Se $\alpha \in \mathbb{R}$ allora $\alpha\mathbf{0} = \mathbf{0}$.*

Dimostrazione. Si ha

$$\alpha \mathbf{0} = \alpha(\mathbf{0} + \mathbf{0})$$

quindi

$$\alpha \mathbf{0} = \alpha \mathbf{0} + \alpha \mathbf{0}$$

da cui

$$\alpha \mathbf{0} + (-\alpha \mathbf{0}) = \alpha \mathbf{0} + \alpha \mathbf{0} + (-\alpha \mathbf{0})$$

e infine

$$\mathbf{0} = \alpha \mathbf{0}.$$

□

Proposizione 2.1.3. *Sia V uno spazio vettoriale. Se $v, u, w \in V$ e*

$$v + u = v + w$$

allora

$$u = w.$$

Dimostrazione. Da

$$v + u = v + w$$

segue

$$v + u - v = v + w - v$$

da cui

$$u + \mathbf{0} = w + \mathbf{0}$$

e infine

$$u = w.$$

□

Quest'ultima Proposizione può essere anch'essa espressa dicendo che in uno spazio vettoriale vale la **legge di semplificazione**.

Proposizione 2.1.4. *Sia V uno spazio vettoriale. Se $v \in V$ allora $(-1)v = -v$.*

Dimostrazione. Si ha

$$(1 - 1)v = 0v = \mathbf{0}$$

d'altra parte

$$(1 - 1)v = 1v + (-1)v = v + (-1)v$$

quindi

$$v + (-1)v = \mathbf{0}$$

da cui

$$v + (-1)v - v = -v$$

e infine $(-1)v = -v$.

□

2.2 Dipendenza e indipendenza lineare

Definizione 2.2.1. Sia V uno spazio vettoriale, e siano $v_i \in V$, $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \dots, n$. Si dice **combinazione lineare dei vettori v_i con coefficienti α_i** l'espressione

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n.$$

Osservazione 2.2.1. Useremo più frequentemente la forma concisa

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i.$$

Definizione 2.2.2. Sia V uno spazio vettoriale, e siano $v_i \in V$, $i = 1, 2, \dots, n$. Si dice che i vettori v_i sono **linearmente indipendenti** se

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n = \mathbf{0}$$

implica

$$\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0, \dots, \alpha_n = 0.$$

Ovvero, se l'unica combinazione lineare dei vettori v_i che sia uguale al vettore nullo è quella i cui coefficienti sono tutti nulli.

Definizione 2.2.3. Sia V uno spazio vettoriale, e siano $v_i \in V$, $i = 1, 2, \dots, n$. Si dice che i vettori v_i sono **linearmente dipendenti** se non sono linearmente indipendenti. Cioè se esistono $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ **non tutti nulli**, tali che

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n = \mathbf{0}.$$

Esempio 2.2.1. Consideriamo in $\mathbb{R}^2$ i vettori

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

e cerchiamo α, β tali che $\alpha v_1 + \beta v_2 = \mathbf{0}$. Deve quindi essere

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ovvero

$$\begin{pmatrix} \alpha - \beta \\ 2\alpha + 3\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

da cui

$$\begin{cases} \alpha - \beta = 0 \\ 2\alpha + 3\beta = 0 \end{cases}.$$

Evidentemente deve essere $\alpha = 0$ e $\beta = 0$, quindi i due vettori sono linearmente indipendenti.

Esempio 2.2.2. Consideriamo in $\mathbb{R}^4$ i vettori

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

e cerchiamo α, β, γ tali che $\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 = \mathbf{0}$. Deve quindi essere

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ovvero

$$\begin{pmatrix} \alpha - \beta \\ 2\alpha + 3\beta + 2\gamma \\ -\alpha + \gamma \\ 3\alpha + \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

da cui

$$\begin{cases} \alpha - \beta = 0 \\ 2\alpha + 3\beta + 2\gamma = 0 \\ -\alpha + \gamma = 0 \\ 3\alpha + \beta = 0 \end{cases} .$$

Dalla prima segue $\alpha = \beta$, dalla terza $\alpha = \gamma$, quindi dalla quarta $4\alpha = 0$ cioè $\alpha = 0$. Pertanto anche $\beta = 0$ e $\gamma = 0$. I vettori sono indipendenti.

Esempio 2.2.3. Consideriamo in $\mathbb{R}^3$ i vettori

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

e cerchiamo $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ tali che $\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 + \delta v_4 = \mathbf{0}$. Deve quindi essere

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ovvero

$$\begin{pmatrix} \alpha - \beta + 2\gamma \\ \beta + \gamma + \delta \\ -\alpha - \gamma + 2\delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

da cui

$$\begin{cases} \alpha - \beta + 2\gamma = 0 \\ \beta + \gamma + \delta = 0 \\ -\alpha - \gamma + 2\delta = 0 \end{cases} .$$

Si vede che $\alpha = 7, \beta = 1, \gamma = -3, \delta = 2$ è una soluzione del sistema, quindi i vettori sono dipendenti.

Esempio 2.2.4. Consideriamo in $\mathbb{R}^n$ gli n vettori

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \mathbf{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Se cerchiamo $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ tali che

$$\alpha_1 \mathbf{e}_1 + \alpha_2 \mathbf{e}_2 + \dots + \alpha_n \mathbf{e}_n = \mathbf{0}$$

otteniamo

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

ovvero $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$. Quindi i vettori $\mathbf{e}_i$ sono indipendenti in $\mathbb{R}^n$ per ogni n .

Esempio 2.2.5. In $\mathbb{R}[x]$ consideriamo i polinomi $1, x, x^2, \dots, x^n$. Perché sia

$$a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n = \mathbf{0}$$

dove $\mathbf{0}$ è il polinomio nullo, sappiamo che deve essere $a_0 = a_1 = \dots = a_n = 0$, quindi i vettori $1, x, x^2, \dots, x^n$ sono indipendenti in $\mathbb{R}[x]$. Dato che n è un numero naturale qualsiasi, ne segue che in $\mathbb{R}[x]$ esistono n vettori linearmente indipendenti per ogni n .

2.3 Sottospazi vettoriali

Definizione 2.3.1. Dato uno spazio vettoriale V , se $W \subseteq V$ si dice che W è un **sottospazio vettoriale** di V se:

1. $\forall v, w \in W \quad v + w \in W$
2. $\forall v \in W \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \alpha v \in W$

Esempio 2.3.1. Sia

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x - 2y = 0 \right\}$$

Se

$$v_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \in W, v_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \in W$$

allora

$$\begin{aligned} x_1 - 2y_1 &= 0 \\ x_2 - 2y_2 &= 0 \end{aligned} \quad .$$

Si ha

$$v_1 + v_2 = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix}, \quad \alpha v_1 = \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha y_1 \end{pmatrix}$$

e

$$(x_1 + x_2) - 2(y_1 + y_2) = x_1 - 2y_1 + x_2 - 2y_2 = 0 \Rightarrow v_1 + v_2 \in W$$

$$\alpha x_1 - 2\alpha y_1 = \alpha(x_1 - 2y_1) = 0 \Rightarrow \alpha v_1 \in W$$

quindi W è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^2$

Esempio 2.3.2. Consideriamo l'insieme dei polinomi a coefficienti reali di grado non superiore a n :

$$W_n = \{p(x) \in \mathbb{R}[x] \mid \deg p(x) \leq n\}.$$

Dato che

$$\deg(p+q)(x) = \max\{\deg p(x) + \deg q(x)\}$$

e se $\alpha \neq 0$

$$\deg(\alpha p)(x) = \deg p(x)$$

W è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}[x]$.

Esercizio 2.3.1. Quali tra i seguenti sono sottospazi dei relativi spazi vettoriali?

1. $W = \{A \in \mathcal{M}(\mathbb{R}, n) \mid \det A = 0\}$
2. $W = \{A \in \mathcal{M}(\mathbb{R}, n) \mid \text{Tr } A = 0\}$ dove, se $A = (a_{ij})$, $\text{Tr } A = \sum_{i=1}^n a_{ii}$
3. $W = \{X \in \mathbb{R}^n \mid |X| = 1\}$ dove, se $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^t$, $|X| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$
4. $W = \{f \in F(A) \mid f(a) = 0\}$ dove $A \subseteq \mathbb{R}$ e $a \in A$

Proposizione 2.3.1. Sia V uno spazio vettoriale, $v_1, v_2, \dots, v_n$ vettori di V . L'insieme delle combinazioni lineari dei vettori $v_1, v_2, \dots, v_n$:

$$\begin{aligned} L(v_1, v_2, \dots, v_n) &= \\ &= \{v \in V \mid \exists \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in R : v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n\} \end{aligned}$$

è un sottospazio vettoriale di V .

Dimostrazione. È evidente che la somma di due combinazioni lineari dei vettori $v_1, v_2, \dots, v_n$ è ancora una combinazione lineare dei vettori $v_1, v_2, \dots, v_n$; e che il prodotto di una combinazione lineare dei vettori $v_1, v_2, \dots, v_n$ per un numero reale è ancora una combinazione lineare dei vettori $v_1, v_2, \dots, v_n$. $\square$

Definizione 2.3.2. Se $W = L(v_1, v_2, \dots, v_n)$, si dice che W è lo spazio generato dai vettori $v_1, v_2, \dots, v_n$, o che W è la **chiusura lineare** dei vettori $v_1, v_2, \dots, v_n$; i vettori $v_1, v_2, \dots, v_n$ si dicono **generatori** di W .

2.4 Spazi vettoriali di dimensione finita e basi

Definizione 2.4.1. Se $V = L(v_1, v_2, \dots, v_n)$ e i vettori $v_1, v_2, \dots, v_n$ sono linearmente indipendenti, si dice che sono una **base** di V .

Proposizione 2.4.1. I vettori $v_1, v_2, \dots, v_n$ sono una base di V , se e solo se ogni elemento di V si scrive in modo unico come combinazione lineare dei vettori $v_1, v_2, \dots, v_n$.

Dimostrazione. Supponiamo che $v_1, v_2, \dots, v_n$ sia una base di V . Che ogni vettore di V si scriva come combinazione lineare dei vettori $v_1, v_2, \dots, v_n$ è ovvio essendo V generato da tali vettori. Supponiamo che un vettore $v \in V$ si scriva in due modi come combinazione lineare dei vettori $v_1, v_2, \dots, v_n$:

$$\begin{aligned} v &= \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n \\ v &= \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \dots + \beta_n v_n \end{aligned}$$

allora

$$(\alpha_1 - \beta_1)v_1 + \dots + (\alpha_n - \beta_n)v_n = 0$$

e siccome i vettori $v_1, v_2, \dots, v_n$ sono linearmente indipendenti

$$\alpha_i - \beta_i = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n$$

quindi i coefficienti della combinazione lineare sono univocamente determinati.

Supponiamo che ogni vettore di W si scriva in modo unico come combinazione lineare dei vettori $v_1, v_2, \dots, v_n$. Allora per definizione

$$V = L(v_1, v_2, \dots, v_n).$$

Inoltre l'unico modo di scrivere il vettore nullo $\mathbf{0}$ come combinazione lineare dei vettori $v_1, v_2, \dots, v_n$ è

$$\mathbf{0} = 0v_1 + \dots + 0v_n$$

quindi i vettori $v_1, v_2, \dots, v_n$ sono linearmente indipendenti. □

Definizione 2.4.2. Se $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ è una base di V , $v \in V$ e $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n$, i numeri reali α_i si dicono **coordinate di v nella base $\mathcal{B}$** .

Definizione 2.4.3. Si dice che V è uno spazio vettoriale **di dimensione finita** se esistono in V elementi $v_1, v_2, \dots, v_n$ tali che $V = L(v_1, v_2, \dots, v_n)$. Ovvero, se esiste un insieme finito di elementi di V tali che ogni elemento di V può essere scritto come loro combinazione lineare.

Esempio 2.4.1. In $\mathbb{R}^n$ consideriamo gli n vettori già introdotti nell'Esempio 2.2.4.

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad \mathbf{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

Se v è un qualunque vettore di $\mathbb{R}^n$

$$v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

è immediato verificare che

$$v = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + \cdots + x_n \mathbf{e}_n$$

quindi $\mathbb{R}^n$ è uno spazio vettoriale di dimensione finita.

Esempio 2.4.2. In $\mathbb{R}[x]$, comunque si scelga un insieme finito di elementi, risulta determinato il massimo dei loro gradi, chiamiamolo n . Evidentemente un polinomio di $\mathbb{R}[x]$ di grado maggiore di n non potrà essere uguale ad una combinazione lineare dei polinomi scelti. Quindi $\mathbb{R}[x]$ non è uno spazio vettoriale di dimensione finita.

Proposizione 2.4.2. *Se $V = L(v_1, v_2, \dots, v_n)$, esiste un sottoinsieme $\mathcal{B}$ di $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ che è una base di V . In particolare, ogni spazio vettoriale di dimensione finita possiede una base.*

Dimostrazione. Indichiamo con m il numero massimo di vettori linearmente indipendenti dell'insieme $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$. Per semplicità di notazione, supponiamo che siano indipendenti $\{v_1, v_2, \dots, v_m\}$, senza con ciò perdere in generalità. Se $m + 1 \leq \xi \leq n$, i vettori $\{v_1, v_2, \dots, v_m, v_\xi\}$ sono linearmente dipendenti; quindi esistono $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, \gamma$ non tutti nulli, tali che

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_m v_m + \gamma v_\xi = \mathbf{0};$$

inoltre deve essere $\gamma \neq 0$, altrimenti la precedente sarebbe una combinazione lineare dei vettori $v_1, v_2, \dots, v_m$ uguale al vettore nullo con coefficienti non tutti nulli, e questa non può esistere perché tali vettori sono per ipotesi linearmente indipendenti. Allora, essendo $\gamma \neq 0$ dalla precedente si può esprimere ogni v_ξ , con $m + 1 \leq \xi \leq n$, come combinazione lineare dei $v_1, v_2, \dots, v_m$. Sia ora $v \in V$. Essendo $V = L(v_1, v_2, \dots, v_n)$ si può scrivere v come combinazione lineare dei vettori $v_1, v_2, \dots, v_n$; ma abbiamo visto che gli ultimi $n - m$ vettori di questo insieme possono essere scritti come combinazione lineare dei primi m indipendenti, quindi v può essere scritto come combinazione lineare dei soli $\{v_1, v_2, \dots, v_m\}$. $\square$

Per poter definire il concetto di dimensione, come numero associato ad uno spazio vettoriale di dimensione finita, ci occorre ancora un risultato, che non dimosteremo.

Proposizione 2.4.3. *Se V è uno spazio vettoriale di dimensione finita, tutte le basi di V sono costituite dallo stesso numero di elementi.*

Adesso possiamo definire la dimensione.

Definizione 2.4.4. Se V è uno spazio vettoriale di dimensione finita, la sua **dimensione**, indicata con $\dim V$, è il numero di elementi di una sua base.

Proposizione 2.4.4. Se V è uno spazio vettoriale di dimensione n , non ci possono essere in V più di n vettori linearmente indipendenti.

Dimostrazione. Siano $v_1, v_2, \dots, v_{n+1}$ elementi di V . Dato che per ipotesi V ha dimensione finita n , deve essere $V = L(w_1, w_2, \dots, w_n)$ per certi vettori $w_i \in V$. Ma anche $\{v_1, v_2, \dots, v_{n+1}, w_1, w_2, \dots, w_n\}$ è un insieme di generatori di V , dei quali non possono essercene più di n indipendenti, altrimenti V avrebbe una base costituita da più di n elementi, la qual cosa non è possibile. In particolare, i vettori $\{v_1, v_2, \dots, v_{n+1}\}$ sono dipendenti. $\square$

Proposizione 2.4.5. Se V è uno spazio vettoriale di dimensione n , ogni insieme di n vettori di V linearmente indipendenti è una base di V .

Dimostrazione. Siano $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ vettori linearmente indipendenti di V , e sia v un qualsiasi elemento di V . I vettori $\{v_1, v_2, \dots, v_n, v\}$ sono linearmente dipendenti, quindi esistono $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \gamma$ non tutti nulli tali che

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n + \gamma v = \mathbf{0}.$$

Inoltre deve essere $\gamma \neq 0$, altrimenti la precedente espressione affermerebbe che i vettori $v_1, v_2, \dots, v_n$ sono linearmente dipendenti; si può quindi esprimere v come combinazione lineare dei $v_1, v_2, \dots, v_n$, e questo prova che $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ è una base di V . $\square$

Proposizione 2.4.6. $\dim \mathbb{R}^n = n$.

Dimostrazione. Abbiamo già visto che i vettori

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad \mathbf{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

sono linearmente indipendenti e che generano $\mathbb{R}^n$, quindi sono una base di $\mathbb{R}^n$. Tale base si chiama **base standard** o anche **base canonica** di $\mathbb{R}^n$. $\square$

Esempio 2.4.3. I vettori di $\mathbb{R}^3$:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

sono indipendenti: infatti se cerchiamo $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ tali che $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = \mathbf{0}$ otteniamo

$$\begin{cases} \alpha_1 - \alpha_2 + 2\alpha_3 = 0 \\ \alpha_2 - \alpha_3 = 0 \\ 2\alpha_1 - 3\alpha_3 = 0 \end{cases}$$

ed è facile vedere che questo sistema ha come unica soluzione

$$\begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = 0 \\ \alpha_3 = 0 \end{cases}.$$

Pertanto $\{v_1, v_2, v_3\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$. Se ora v è un generico elemento di $\mathbb{R}^3$

$$v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

vogliamo trovare le sue coordinate nella base $\{v_1, v_2, v_3\}$.

Chiamando $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ tali coordinate, si deve avere $v = \gamma_1 v_1 + \gamma_2 v_2 + \gamma_3 v_3$, cioè

$$\begin{cases} \gamma_1 - \gamma_2 + 2\gamma_3 = x_1 \\ \gamma_2 - \gamma_3 = x_2 \\ 2\gamma_1 - 3\gamma_3 = x_3 \end{cases}$$

da cui è facile ricavare

$$\begin{cases} \gamma_1 = \frac{1}{5}(3x_1 + 3x_2 + x_3) \\ \gamma_2 = \frac{1}{5}(2x_1 + 7x_2 - x_3) \\ \gamma_3 = \frac{1}{5}(2x_1 + 2x_2 - x_3) \end{cases}.$$

Per esempio

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix} = -7v_2 - 2v_3.$$

Osservazione 2.4.1. In $\mathbb{R}^n$ l'elemento

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

ha come coordinate **nella base standard** le sue componenti $x_1, x_2, \dots, x_n$. Questo avviene **solamente nella base standard**, le coordinate di un elemento di $\mathbb{R}^n$ in una base diversa da quella standard, quando occorrono, vanno sempre determinate, come visto nell'esempio precedente.

2.5 Varietà affini

Definizione 2.5.1. Sia V uno spazio vettoriale, W un suo sottospazio, v un suo elemento. Si dice **varietà affine di V definita da W e v** l'insieme

$$W + v = \{u \in V \mid u = w + v, w \in W\}.$$

Una varietà affine di uno spazio vettoriale è quindi un insieme che contiene tutte e sole le possibili somme di un vettore fissato e di un vettore che varia in un sottospazio di V .

Per le varietà affini valgono alcune semplici proprietà.

Proposizione 2.5.1. *Sia V uno spazio vettoriale W un suo sottospazio. Si ha*

1. W è una varietà affine di V
2. $v \in W + v$
3. $u \in W + v$ se e solo se $u - v \in W$
4. $W + v = W + u$ se e solo se $v - u \in W$

Dimostrazione.

1. Basta osservare che $W = W + \mathbf{0}$
2. Ovviamente $v = \mathbf{0} + v$, e $\mathbf{0} \in W$
3. Se $u \in W + v$, allora per definizione $u = w + v$ per un certo vettore $w \in W$, quindi $u - v = w \in W$. Se $u - v \in W$, sia $w = u - v$, quindi $w \in W$ e $u = w + v \in W + v$.
4. Se $W + v = W + u$, allora, in particolare, $v \in W + u$, quindi $v - u \in W$. Se $v - u \in W$, sia $z \in W + v$, quindi $z = w + v$ per un certo $w \in W$; allora $z = w + v - u + u$, dove $w + v - u \in W$, e quindi $z \in W + u$ e $W + v \subseteq W + u$. Analogamente si dimostra che $W + u \subseteq W + v$.

□

Definizione 2.5.2. Sia V uno spazio vettoriale W un suo sottospazio, v un elemento di V . Se W ha dimensione finita n , si dice che $W + v$ è una varietà affine di dimensione n .

Esempio 2.5.1. In $\mathbb{R}^2$ le varietà affini non banali hanno evidentemente dimensione 1. Sono gli insiemi definiti da equazioni del tipo $ax + by + c = 0$, ovvero le rette di $\mathbb{R}^2$.

Esempio 2.5.2. In $\mathbb{R}^3$ si hanno varietà affini non banali di dimensione 1 e 2, rispettivamente rette e piani.

2.6 Applicazioni lineari

Abbiamo visto che in uno spazio vettoriale V di dimensione finita, **scelta una base** $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, ad ogni elemento v di V si può associare una n -upla di numeri reali $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, le sue coordinate **in quella base**. Gli elementi di questa n -upla dipendono in generale dalla base scelta, ma se questa è fissata, dipendono solo dall'elemento v . Si ha così un'applicazione $V \rightarrow \mathbb{R}^n$ dallo spazio vettoriale V in uno spazio vettoriale particolare come $\mathbb{R}^n$. Questa applicazione è modello di una categoria di applicazioni che studieremo approfonditamente.

Definizione 2.6.1. Un'applicazione $L : V \rightarrow W$ si dice **lineare** se

- $\forall v, w \in V \quad L(v + w) = L(v) + L(w)$
- $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall v \in V \quad L(\alpha v) = \alpha L(v)$

Esempio 2.6.1. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita n , $\mathcal{B}$ una sua base, $L_{\mathcal{B}} : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ l'applicazione che ad ogni vettore associa la n -upla delle sue coordinate nella base $\mathcal{B}$. $L_{\mathcal{B}}$ è un'applicazione lineare.

Esempio 2.6.2. L'applicazione $L : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $L(x) = 2x$ è lineare.

Esempio 2.6.3. L'applicazione $D : \mathbb{R}[x] \rightarrow \mathbb{R}[x]$ che ad ogni polinomio associa la sua derivata è lineare.

Quello che segue può essere utile per stabilire che un'applicazione non è lineare.

Proposizione 2.6.1. Se $L : V \rightarrow W$ è lineare allora $L(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$.

Dimostrazione. Si ha

$$L(\mathbf{0}) = L(\mathbf{0} + \mathbf{0}) = L(\mathbf{0}) + L(\mathbf{0})$$

da cui $L(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$. □

Esempio 2.6.4. L'applicazione $L : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $L(x) = 2x + 1$ non è lineare.

Indichiamo d'ora in poi con $L(V, W)$ l'insieme delle applicazioi lineari da V in W .

Definizione 2.6.2. Sia $L : V \rightarrow W$ un'applicazione lineare. Si dice **nucleo** di L , indicato con $\ker L$, l'insieme

$$\ker L = \{v \in V \mid L(v) = \mathbf{0}\}.$$

Ricordiamo anche che l'immagine di un'applicazione, in generale, è l'insieme dei valori che assume:

$$\text{Im}L = \{w \in W \mid \exists v \in V : L(v) = w\}$$

Il nucleo di un'applicazione lineare non è altro che il luogo dei suoi zeri, ma per un'applicazione lineare questo insieme è particolarmente importante.

Proposizione 2.6.2. Sia $L : V \rightarrow W$ un'applicazione lineare. Allora $\ker L$ è un sottospazio vettoriale di V e $\text{Im}L$ è un sottospazio vettoriale di W .

Dimostrazione. Siano $v_1, v_2 \in \ker L$. Allora

$$L(v_1 + v_2) = L(v_1) + L(v_2) = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}$$

quindi $v_1 + v_2 \in \ker L$.

Sia $v \in \ker L$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Allora

$$L(\alpha v) = \alpha L(v) = \alpha \mathbf{0} = \mathbf{0}$$

quindi $\alpha v \in \ker L$.

Siano $w_1, w_2 \in \text{Im}L$. Allora $w_1 = L(v_1)$ e $w_2 = L(v_2)$ per certi v_1, v_2 in V , e

$$w_1 + w_2 = L(v_1) + L(v_2) = L(v_1 + v_2)$$

quindi $w_1 + w_2 \in \text{Im}L$.

Sia $w \in \text{Im}L$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Allora $w = L(v)$ per un certo v in V , e

$$\alpha w = \alpha L(v) = L(\alpha v)$$

quindi $\alpha w \in \text{Im}L$. □

Esempio 2.6.5. Sia $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definita da

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ 2x_1 + x_2 \\ -2x_2 \end{pmatrix}.$$

Dopo aver verificato che è un'applicazione lineare, troviamone il nucleo. Sarà costituito dagli elementi di $\mathbb{R}^2$ per i quali si verifica che

$$\begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ 2x_1 + x_2 \\ -2x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

da cui segue subito che $x_1 = 0$, $x_2 = 0$. In questo caso quindi il nucleo di L è il più piccolo possibile, e contiene solo il vettore nullo.

Esempio 2.6.6. Sia $L : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definita da

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 - x_2 + 2x_3 \\ 2x_1 + x_2 - 4x_3 \end{pmatrix}.$$

Dopo aver verificato che è un'applicazione lineare, troviamone il nucleo:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 4x_3 = 0 \end{cases}$$

Questa volta si trova che tutti, e soli, gli elementi di $\mathbb{R}^3$ della forma

$$\begin{pmatrix} 2t \\ 8t \\ 3t \end{pmatrix}$$

dove t è un qualunque numero reale, soddisfano le condizioni poste, quindi $\ker L$ è costituito da tali elementi, e questa volta non contiene solamente il vettore nullo.

Il nucleo di un'applicazione lineare $L : V \rightarrow W$ dà informazioni su quanto fedelmente L "riproduce" V all'interno di W : quanto più piccolo è $\ker L$, tanto più fedele è la riproduzione.

Proposizione 2.6.3. *Un'applicazione lineare $L : V \rightarrow W$ è iniettiva se e solo se $\ker L = \{\mathbf{0}\}$.*

Dimostrazione.

Supponiamo L iniettiva. Siccome $L(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, si ha che $L(v) = \mathbf{0}$ implica $v = \mathbf{0}$, quindi l'unico elemento in $\ker L$ è $\mathbf{0}$, e $\ker L = \{\mathbf{0}\}$.

Supponiamo $\ker L = \{\mathbf{0}\}$. Se per $v_1, v_2 \in V$ si ha $L(v_1) = L(v_2)$ allora $L(v_1 - v_2) = \mathbf{0}$ quindi $v_1 - v_2 \in \ker L$ e per l'ipotesi $v_1 - v_2 = \mathbf{0}$, cioè $v_1 = v_2$ e L è iniettiva. $\square$

Quest'ultima Proposizione ci dice che se $\ker L$ contiene solo il vettore nullo allora $\text{Im}L$ è in corrispondenza biunivoca con V , essendo L iniettiva. La Proposizione seguente, che non dimostriamo, ci dice anche, nel caso in cui V ha dimensione finita, quanto viene "perso" in $\text{Im}L$ rispetto a V .

Proposizione 2.6.4. *Sia $L : V \rightarrow W$ un'applicazione lineare, e sia V di dimensione finita. Allora*

$$\dim V = \dim \ker L + \dim \text{Im}L.$$

In base a questa Proposizione, se V e W hanno entrambi dimensione finita e $\dim W > \dim V$, un'applicazione lineare da V in W non può essere suriettiva; inoltre, dato che comunque $\dim \text{Im}L \leq \dim W$, se $\dim W < \dim V$ un'applicazione lineare da V in W non può essere iniettiva.

Vediamo come si comportano le applicazioni lineari nei confronti dell'indipendenza e della dipendenza lineare.

Proposizione 2.6.5. *Sia $L : V \rightarrow W$ un'applicazione lineare. Se $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$ sono linearmente dipendenti, allora $L(v_1), \dots, L(v_n)$ sono linearmente dipendenti.*

Dimostrazione. Per ipotesi esistono $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ non tutti nulli tali che

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n = \mathbf{0}$$

quindi

$$L(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n) = L(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$$

da cui

$$\alpha_1 L(v_1) + \alpha_2 L(v_2) + \dots + \alpha_n L(v_n) = \mathbf{0}$$

dove i coefficienti α_i non sono tutti nulli. $\square$

Osservazione 2.6.1. Ovviamente, la Proposizione precedente afferma anche che se $L : V \rightarrow W$ è lineare e i vettori $L(v_1), \dots, L(v_n)$ sono linearmente indipendenti, allora lo sono anche i vettori $v_1, v_2, \dots, v_n$.

Proposizione 2.6.6. *Sia $L : V \rightarrow W$ un'applicazione lineare iniettiva. Se $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$ sono linearmente indipendenti, allora $L(v_1), \dots, L(v_n)$ sono linearmente indipendenti.*

Dimostrazione. Siano $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ tali che

$$\alpha_1 L(v_1) + \dots + \alpha_n L(v_n) = \mathbf{0}.$$

Allora

$$L(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n) = \mathbf{0};$$

essendo L iniettiva deve essere

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n = \mathbf{0}$$

e siccome i vettori $v_1, v_2, \dots, v_n$ sono linearmente indipendenti, segue che $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = \mathbf{0}$. $\square$

2.7 Rappresentazione matriciale delle applicazioni lineari

Siano V e W spazi vettoriali di dimensione finita, con $\dim V = n$ e $\dim W = m$, e sia $L : V \rightarrow W$ un'applicazione lineare. Siano inoltre $\mathcal{B}_V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ una base di V e $\mathcal{B}_W = \{w_1, w_2, \dots, w_m\}$ una base di W . Per ogni elemento v_j della base $\mathcal{B}_V$ si può esprimere $L(v_j)$, la sua immagine tramite L , come combinazione lineare degli elementi della base $\mathcal{B}_W$:

$$L(v_j) = \sum_{i=1}^m a_{ij} w_i \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Risulta in questo modo determinata una matrice i cui elementi sono a_{ij} , che si chiama **matrice associata all'applicazione lineare L nelle basi $\mathcal{B}_V$ e $\mathcal{B}_W$** , e che indicheremo con $M_{\mathcal{B}_V}^{\mathcal{B}_W}(L)$.

Osservazione 2.7.1. L'espressione 'matrice associata ad un'applicazione lineare' non ha senso: l'atto di associare ad un'applicazione lineare (tra spazi vettoriali di dimensione finita) una matrice è condizionato alla scelta di una base del dominio e di una base del codominio. La matrice che ne risulta associata dipende in modo essenziale da tale scelta: se si scelgono altre basi, la matrice associata risulterà diversa. L'unica espressione dotata di senso è 'matrice associata ad una data applicazione lineare in certe basi'.

Vediamo più da vicino come è fatta la matrice $M_{\mathcal{B}_V}^{\mathcal{B}_W}(L)$. Per come è stata definita, l'indice di colonna dei suoi elementi corrisponde all'elemento della base $\mathcal{B}_V$ che si sceglie, mentre l'indice di riga corrisponde alla coordinata dell'immagine tramite L di questo elemento nella base $\mathcal{B}_W$. In altri termini, le colonne della matrice $M_{\mathcal{B}_V}^{\mathcal{B}_W}(L)$ contengono le coordinate, nella base $\mathcal{B}_W$, delle immagini tramite L degli elementi della base $\mathcal{B}_V$.

Esempio 2.7.1. Sia $L : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ definita da

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_2 + x_3 \\ x_3 - x_1 \\ x_1 + 2x_2 - 4x_3 \\ 2x_2 + 3x_3 \end{pmatrix}.$$

Dette $\mathcal{B}_3$ e $\mathcal{B}_4$ le basi standard rispettivamente di $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^4$, vogliamo calcolare la matrice $M_{\mathcal{B}_3}^{\mathcal{B}_4}(L)$.

Per prima cosa bisogna calcolare le immagini tramite L degli elementi della base standard di $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} L \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ L \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \\ L \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}; \end{aligned}$$

poi bisogna calcolare le coordinate di ciascuno di questi elementi di $\mathbb{R}^4$ nella base $\mathcal{B}_4$; ma *essendo questa la base standard di* $\mathbb{R}^4$, tali coordinate sono proprio le componenti di ciascuno di questi elementi, per cui si può già scrivere la matrice:

$$M_{\mathcal{B}_3}^{\mathcal{B}_4}(L) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -4 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Esempio 2.7.2. Data L definita nell'Esempio 2.7.1, vogliamo calcolare $M_{\mathcal{B}_3}^{\mathcal{B}'_4}(L)$ dove

$$\mathcal{B}'_4 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Dato che la base scelta nel codominio è la stessa dell'Esempio 2.7.1, i valori che assume L sugli elementi di questa base sono già noti da tale Esempio; dato che però la base scelta nel codominio è diversa, e non è la base standard di $\mathbb{R}^4$, questa volta dobbiamo calcolare le coordinate degli elementi trovati.

Per il primo elemento:

$$L \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = a_{11} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + a_{21} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + a_{31} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + a_{41} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

da cui

$$\begin{cases} a_{11} + a_{21} + a_{31} + a_{41} = 0 \\ a_{21} + a_{31} + a_{41} = -1 \\ a_{31} + a_{41} = 1 \\ a_{41} = 0 \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} a_{11} = 1 \\ a_{21} = -2 \\ a_{31} = 1 \\ a_{41} = 0 \end{cases}.$$

Per il secondo elemento:

$$L \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = a_{12} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + a_{22} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + a_{32} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + a_{42} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

da cui

$$\begin{cases} a_{12} + a_{22} + a_{32} + a_{42} = 1 \\ a_{22} + a_{32} + a_{42} = 0 \\ a_{32} + a_{42} = 2 \\ a_{42} = 2 \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} a_{12} = 1 \\ a_{22} = -2 \\ a_{32} = 0 \\ a_{42} = 2 \end{cases}.$$

Per il terzo elemento:

$$L \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} = a_{13} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + a_{23} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + a_{33} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + a_{43} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

da cui

$$\begin{cases} a_{13} + a_{23} + a_{33} + a_{43} = 1 \\ a_{23} + a_{33} + a_{43} = 1 \\ a_{33} + a_{43} = -4 \\ a_{43} = 3 \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} a_{12} = 0 \\ a_{22} = 5 \\ a_{33} = -7 \\ a_{43} = 3 \end{cases}.$$

Adesso si può finalmente scrivere la matrice:

$$M_{\mathcal{B}_3}^{\mathcal{B}'_4}(L) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 5 \\ 1 & 0 & -7 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Vediamo come si può utilizzare la matrice associata ad un'applicazione lineare in certe basi per rappresentare l'applicazione stessa.

Sia $L : V \rightarrow W$ un'applicazione lineare, $\mathcal{B}_V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ una base di V , $\mathcal{B}_W = \{w_1, w_2, \dots, w_m\}$ una base di W , e $(a_{ij}) = M_{\mathcal{B}_V}^{\mathcal{B}_W}(L)$. Sia poi $v \in V$; per poter calcolare $L(v)$ dobbiamo conoscere le coordinate di v nella base $\mathcal{B}_V$, cioè nella stessa base usata per rappresentare L , quindi supponiamo

$$v = \sum_{j=1}^n \alpha_j v_j;$$

allora

$$L(v) = L\left(\sum_{j=1}^n \alpha_j v_j\right) = \sum_{j=1}^n \alpha_j L(v_j)$$

e usando la matrice (a_{ij})

$$L(v) = \sum_{j=1}^n \alpha_j \sum_{i=1}^m a_{ij} w_i = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m \alpha_j a_{ij} w_i = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} \alpha_j\right) w_i;$$

in quest'ultima espressione si è messa tra parentesi la quantità

$$\beta_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} \alpha_j$$

per evidenziare che essa è la coordinata i -esima di $L(v)$ nella base $\mathcal{B}_W$.

Ora, poniamo

$$X = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

e

$$Y = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix}$$

ovvero: X è la matrice $n \times 1$ che contiene le coordinate di v nella base $\mathcal{B}_V$, Y è la matrice $m \times 1$ che contiene le coordinate di $L(v)$ nella base $\mathcal{B}_W$.

Si ha

$$Y = M_{\mathcal{B}_V}^{\mathcal{B}_W}(L) \cdot X.$$

Esempio 2.7.3. Siano L e come nell'Esempio 2.7.1, abbiamo visto che

$$M_{\mathcal{B}_3}^{\mathcal{B}_4}(L) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -4 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

dove $\mathcal{B}_3$ e $\mathcal{B}_4$ sono le basi standard rispettivamente di $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^4$. Sia

$$v = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

vogliamo calcolare $L(v)$ usando la matrice $M_{\mathcal{B}_3}^{\mathcal{B}_4}(L)$. **Dato che $\mathcal{B}_3$ è la base standard di $\mathbb{R}^3$** , la matrice colonna X contenente le coordinate di v in questa base coincide con v stesso:

$$X = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix};$$

la matrice colonna Y contenente le coordinate di $L(v)$ nella base $\mathcal{B}_4$ si ottiene moltiplicando X a sinistra per la matrice $M_{\mathcal{B}_3}^{\mathcal{B}_4}(L)$:

$$Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -4 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -24 \\ 9 \end{pmatrix}$$

e **dato che $\mathcal{B}_4$ è la base standard di $\mathbb{R}^4$** queste coordinate coincidono con le componenti di $L(v)$:

$$L(v) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -24 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

In generale, se v è un generico elemento di $\mathbb{R}^3$

$$v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

la colonna delle coordinate di v nella base $\mathcal{B}_3$ coincide con v stesso:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

e la colonna Y delle componenti di $L(v)$ nella base $\mathcal{B}_4$ si trova moltiplicando X a sinistra per la matrice $M_{\mathcal{B}_3}^{\mathcal{B}_4}(L)$:

$$Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -4 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 + x_3 \\ -x_1 + x_3 \\ x_1 + 2x_2 - 4x_3 \\ 2x_2 + 3x_3 \end{pmatrix}$$

e questa coincide con $L(v)$ stesso

$$L \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 + x_3 \\ -x_1 + x_3 \\ x_1 + 2x_2 - 4x_3 \\ 2x_2 + 3x_3 \end{pmatrix}$$

come appunto deve essere.

Esempio 2.7.4. Siano L , $\mathcal{B}_3$ e $\mathcal{B}'_4$ come nell'Esempio 2.7.2. Abbiamo trovato che

$$M_{\mathcal{B}_3}^{\mathcal{B}'_4}(L) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 5 \\ 1 & 0 & -7 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Se v è un generico elemento di $\mathbb{R}^3$, siccome $\mathcal{B}_3$ è ancora la base standard di $\mathbb{R}^3$, la matrice colonna delle coordinate di v in questa base coincide con v :

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

e la colonna Y delle componenti di $L(v)$ nella base $\mathcal{B}'_4$ si trova moltiplicando X a sinistra per la matrice $M_{\mathcal{B}_3}^{\mathcal{B}'_4}(L)$:

$$Y = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 5 \\ 1 & 0 & -7 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ -2x_1 - 2x_2 + 5x_3 \\ x_1 - 7x_3 \\ 2x_2 + 3x_3 \end{pmatrix};$$

questa volta Y **non coincide con** $L(v)$, perché $\mathcal{B}'_4$ non è la base standard di $\mathbb{R}^4$; per trovare $L(v)$ bisogna moltiplicare le coordinate di $L(v)$, cioè le componenti di Y , per gli elementi della base $\mathcal{B}'_4$:

$$\begin{aligned} L \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} &= (x_1 + x_2) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (-2x_1 - 2x_2 + 5x_3) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \\ &+ (x_1 - 7x_3) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (2x_2 + 3x_3) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 + x_3 \\ x_3 - x_1 \\ x_1 + 2x_2 - 4x_3 \\ 2x_2 + 3x_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

come deve essere.

Esempio 2.7.5. Siano L e $\mathcal{B}'_4$ come nell'Esempio 2.7.2, e sia $\mathcal{B}'_3$ la base di $\mathbb{R}^3$:

$$\mathcal{B}'_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Determiniamo $M_{\mathcal{B}'_3}^{\mathcal{B}'_4}(L)$. Per prima cosa calcoliamo L sugli elementi di $\mathcal{B}'_3$:

$$\begin{aligned} L \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} \\ L \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix} \\ L \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}; \end{aligned}$$

di ciascuno di questi elementi bisogna determinare le coordinate nella base $\mathcal{B}'_4$.

Per il primo elemento:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} = a_{11} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + a_{21} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + a_{31} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + a_{41} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

da cui

$$\begin{cases} a_{11} + a_{21} + a_{31} + a_{41} = 1 \\ a_{21} + a_{31} + a_{41} = 0 \\ a_{31} + a_{41} = -3 \\ a_{41} = 3 \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} a_{11} = 1 \\ a_{21} = 3 \\ a_{31} = -6 \\ a_{41} = 3 \end{cases}.$$

Per il secondo elemento:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix} = a_{12} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + a_{22} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + a_{32} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + a_{42} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

da cui

$$\begin{cases} a_{12} + a_{22} + a_{32} + a_{42} = 0 \\ a_{22} + a_{32} + a_{42} = -2 \\ a_{32} + a_{42} = 7 \\ a_{42} = -1 \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} a_{12} = 2 \\ a_{22} = -9 \\ a_{32} = 8 \\ a_{42} = -1 \end{cases}.$$

Per il terzo elemento:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} = a_{13} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + a_{23} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + a_{33} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + a_{43} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

da cui

$$\begin{cases} a_{13} + a_{23} + a_{33} + a_{43} = 3 \\ a_{23} + a_{33} + a_{43} = 1 \\ a_{33} + a_{43} = 0 \\ a_{43} = 7 \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} a_{13} = 2 \\ a_{23} = 1 \\ a_{33} = -7 \\ a_{43} = 7 \end{cases}.$$

Infine

$$M_{\mathcal{B}'_3}^{\mathcal{B}'_4}(L) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & -9 & 1 \\ -6 & 8 & -7 \\ 3 & -1 & 7 \end{pmatrix}$$

Ora, sia v un generico elemento di $\mathbb{R}^3$; la colonna X delle sue coordinate nella base $\mathcal{B}'_3$ questa volta **non coincide con** v , in quanto $\mathcal{B}'_3$ non è la base standard di $\mathbb{R}^3$, quindi tali coordinate vanno determinate:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix};$$

si ricava

$$\begin{cases} \alpha = \frac{3x_1 - x_2 + 2x_3}{5} \\ \beta = \frac{2x_1 + x_2 - 2x_3}{5} \\ \gamma = \frac{-x_1 + 2x_2 + x_3}{5} \end{cases}$$

quindi la colonna delle coordinate di v nella base $\mathcal{B}'_3$ è

$$X = \begin{pmatrix} \frac{3x_1 - x_2 + 2x_3}{5} \\ \frac{2x_1 + x_2 - 2x_3}{5} \\ \frac{-x_1 + 2x_2 + x_3}{5} \end{pmatrix}.$$

La colonna Y delle componenti di $L(v)$ nella base $\mathcal{B}'_4$ è

$$Y = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & -9 & 1 \\ -6 & 8 & -7 \\ 3 & -1 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3x_1 - x_2 + 2x_3}{5} \\ \frac{2x_1 + x_2 - 2x_3}{5} \\ \frac{-x_1 + 2x_2 + x_3}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ -2x_1 - 2x_2 + 5x_3 \\ x_1 - 7x_3 \\ 2x_2 + 3x_3 \end{pmatrix}$$

e infine

$$\begin{aligned} L(v) &= (x_1 + x_2) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (-2x_1 - 2x_2 + 5x_3) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \\ &\quad + (x_1 - 7x_3) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (2x_2 + 3x_3) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} x_2 + x_3 \\ -x_1 + x_3 \\ x_1 + 2x_2 - 4x_3 \\ 2x_2 + 3x_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

come deve essere.

Capitolo 3

Sistemi lineari

3.1 Rango e caratteristica di una matrice

Torniamo brevemente a parlare di matrici, per definire alcuni concetti che occorrono per lo studio dei sistemi lineari.

Definizione 3.1.1. Sia $A \in \mathcal{M}(\mathbb{R}, n, m)$. Si dice **rango per colonne** di A il numero delle sue colonne linearmente indipendenti, come elementi di $\mathbb{R}^n$. Si dice **rango per righe** di A il numero delle sue righe linearmente indipendenti, come elementi di $\mathbb{R}^m$.

In effetti esiste un solo rango.

Proposizione 3.1.1. *Il rango per righe e il rango per colonne di una matrice sono uguali.*

Si può quindi parlare semplicemente di rango di una matrice.

Definizione 3.1.2. Si dice **rango** di una matrice A , indicato con $\text{rk}(A)$, il valore comune del rango per righe e del rango per colonne di A .

Osservazione 3.1.1. Se $A \in \mathcal{M}(\mathbb{R}, n, m)$, è ovvio che $\text{rk}(A) \leq \min\{n, m\}$.

Esempio 3.1.1. Data

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 5 \\ 3 & 4 & 0 & -2 \\ 5 & 4 & -4 & 8 \end{pmatrix}$$

è facile vedere che le righe non sono indipendenti, quindi $\text{rk}(A) \leq 2$. D'altra parte, per esempio le prime due righe sono indipendenti, quindi $\text{rk}(A) = 2$.

Definizione 3.1.3. Si dice **caratteristica** di una matrice A , indicata con $\text{car}(A)$, l'ordine del più grande minore con determinante non nullo.

Esempio 3.1.2. Data

$$A = \begin{pmatrix} -6 & -8 & 0 & 4 \\ 5 & 4 & -4 & 8 \\ 1 & 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

si può verificare che i quattro minori di ordine 3 hanno tutti determinante nullo, quindi $\text{car}(A) \leq 2$. D'altra parte, se si prende per esempio il minore

$$\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

si vede che questo ha determinante non nullo, quindi $\text{car}(A) = 2$.

Proposizione 3.1.2. *Il rango e la caratteristica di una matrice sono uguali.*

In base a quest'ultima Proposizione il rango di una matrice può essere calcolato a seconda dei casi o considerando le righe (o le colonne) indipendenti, oppure considerando i minori con determinante non nullo.

Osservazione 3.1.2. Se A è una matrice quadrata, dire che A non ha rango massimo è equivalente a dire che $\det(A) = 0$, per cui $\det(A) = 0$ se e solo se le righe (e le colonne) di A non sono indipendenti.

3.2 Calcolo del rango

Vediamo come si può determinare il rango di una matrice trasformandola in un'altra matrice, di cui sia immediato valutare il rango, per mezzo di alcune semplici operazioni.

Definizione 3.2.1. Sia $A \in \mathcal{M}(\mathbb{R}, n, m)$, e siano $A_1, A_2, \dots, A_n$ le righe di A . Chiamiamo le seguenti **operazioni ammissibili sulle righe di A** .

Scambiare tra loro due righe:

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_i \\ \vdots \\ A_j \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_j \\ \vdots \\ A_i \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix}.$$

Sostituire una riga con una combinazione lineare della riga stessa e di un'altra riga:

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_i \\ \vdots \\ A_j \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ \alpha A_i + \beta A_j \\ \vdots \\ A_j \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix}.$$

Naturalmente moltiplicare una riga per un numero è un caso particolare di questa seconda operazione ammissibile.

L'importanza di queste operazioni che manipolano le righe di una matrice è data dalla seguente Proposizione.

Proposizione 3.2.1. *Se la matrice B è ottenuta dalla matrice A per mezzo di operazioni elementari, allora $\text{rk}(A) = \text{rk}(B)$.*

Evidentemente, se vogliamo calcolare il rango di una matrice, possiamo cercare di attuare una sequenza di operazioni ammissibili, in modo che la matrice che alla fine ne risulta sia di forma particolarmente semplice, a il suo rango sia evidente.

Esempio 3.2.1. Vogliamo calcolare il rango di

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 & 0 \\ -2 & 4 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & -2 & 3 & -1 \\ 3 & 0 & -2 & -4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Cerchiamo di far comparire degli zeri, applicando le operazioni ammissibili. Cominciamo con l'elemento $(2, 1)$: possiamo sommare alla seconda riga la prima riga moltiplicata per 2, in simboli $A_2 \rightarrow A_2 + 2A_1$:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 6 & -3 \\ 0 & 2 & -2 & 3 & -1 \\ 3 & 0 & -2 & -4 & 2 \end{pmatrix};$$

l'elemento $(3, 1)$ è già uguale a zero, per far comparire zero nella posizione $(4, 1)$ possiamo effettuare l'operazione $A_4 \rightarrow A_4 - 3A_1$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 6 & -3 \\ 0 & 2 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & -8 & -13 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ora tutti gli elementi della prima colonna tranne il primo sono nulli; se effettuiamo operazioni ammissibili usando solo le ultime tre righe, questi zeri non potranno più scomparire, quindi possiamo farne comparire altri senza preoccuparci di perdere il risultato già ottenuto. Procediamo quindi a far comparire zeri nella seconda colonna, a partire dal terzo elemento: $A_3 \rightarrow A_3 - A_2$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & -7 & -3 & 2 \\ 0 & 3 & -8 & -13 & 2 \end{pmatrix},$$

e poi $A_4 \rightarrow 2A_4 - 3A_2$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & -7 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & -31 & -44 & 13 \end{pmatrix}.$$

Adesso usando solo le ultime due righe, i cui primi due elementi sono nulli, si può far comparire uno zero nell'ultimo elemento della terza colonna: $A_4 \rightarrow 7A_4 - 31A_3$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & -7 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -215 & 29 \end{pmatrix}.$$

Di questa matrice è evidente che le righe sono indipendenti, quindi il suo rango, e quello di A , è 4.

Definizione 3.2.2. Una matrice $A = (a_{ij})$ si dice **ridotta a scala** se $a_{ij} = 0$ quando $i > j$.

Quello che abbiamo fatto nell'Esempio precedente è stato in effetti trasformare la matrice A in una matrice ridotta a scala, per mezzo di operazioni ammissibili. In effetti questo è sempre possibile: la dimostrazione della seguente Proposizione non è altro che una generalizzazione formalizzata del procedimento che abbiamo applicato ad un caso particolare.

Proposizione 3.2.2. Una matrice può sempre essere trasformata in una matrice ridotta a scala per mezzo di una sequenza di operazioni ammissibili.

Infine, come riconoscere, in una matrice ridotta a scala, il rango? Evidentemente, per come è fatta una matrice ridotta a scala, le righe che non sono interamente nulle sono necessariamente indipendenti.

Proposizione 3.2.3. Il rango di una matrice ridotta a scala è dato dal numero di righe non interamente nulle.

Osservazione 3.2.1. Dato che per ridurre una matrice a scala occorre eseguire delle operazioni che non sono determinate a priori dalla matrice stessa, in quanto comportano una scelta di coefficienti per cui moltiplicare le righe, il risultato non è univocamente determinato: se si scelgono coefficienti diversi si ottiene in generale una matrice ridotta a scala diversa. Quello che conta, però, è che il numero delle righe non nulle è sempre lo stesso, indipendentemente dalla scelta dei coefficienti per cui si sono moltiplicate le righe della matrice.

Osservazione 3.2.2. La riduzione a scala di una matrice risolve anche il problema di determinare un insieme di vettori indipendenti a partire da un insieme di vettori qualsiasi, che generino lo stesso sottospazio di un dato spazio vettoriale, generato dai vettori di partenza. In questo caso bisogna scrivere le coordinate dei vettori da cui si parte come righe della matrice che si riduce poi a scala; le righe non nulle che restano dopo la riduzione a scala forniscono un insieme di vettori linearmente indipendenti, che generano lo stesso sottospazio generato dalle righe della matrice iniziale.

Esempio 3.2.2. Dato il sottospazio di $\mathbb{R}^4$

$$W = L \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 11 \\ -1 \\ 17 \end{pmatrix} \right)$$

vogliamo trovarne la dimensione e, nel caso la dimensione non sia 4, una base. Scriviamo la matrice in cui le righe contengono le componenti dei vettori che generano W , che in questo caso coincidono anche con le loro coordinate nella base standard di $\mathbb{R}^4$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & -3 & 5 \\ 0 & 2 & 3 & -1 \\ -4 & 11 & -1 & 17 \end{pmatrix}$$

e riduciamo a scala questa matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 17 & -23 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

la matrice ha rango 3, quindi $\dim W = 3$, e le prime tre righe della matrice ridotta a scala forniscono una base di W :

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 17 \\ -23 \end{pmatrix} \right\}.$$

3.3 Sistemi lineari

Data una matrice $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}(\mathbb{R}, n, m)$ e $B = (b_1, b_2, \dots, b_n)^t \in \mathbb{R}^n$, ci chiediamo se esistono m numeri reali $x_1, x_2, \dots, x_m$, ovvero un elemento $X = (x_1, x_2, \dots, x_m)^t \in \mathbb{R}^m$, tali che

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1m}x_m = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2m}x_m = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nm}x_m = b_n \end{cases} \quad (3.1)$$

Ci chiediamo cioè se il **sistema lineare** 3.1 ha soluzioni, quante, e come trovarle. La matrice A si dice **matrice dei coefficienti** del sistema lineare, la colonna B si dice **colonna dei termini noti**. Inoltre si dice **matrice completa** del sistema lineare la matrice

$$A|B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} & b_n \end{pmatrix}$$

Se $B = 0$ il sistema si dice **omogeneo**.

Notiamo che il sistema lineare 3.1 può essere scritto nella forma concisa

$$AX = B. \quad (3.2)$$

e quindi un sistema omogeneo nella forma

$$AX = \mathbf{0}. \quad (3.3)$$

dove naturalmente $\mathbf{0}$ rappresenta l'elemento nullo di $\mathbb{R}^n$, cioè la matrice colonna contenente n zeri.

Esempio 3.3.1. Il sistema

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases}$$

ha evidentemente come unica soluzione

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 1 \end{cases}$$

in quanto non ci sono altri due numeri uguali tra loro (seconda equazione) la cui somma faccia 2 (prima equazione).

Esempio 3.3.2. Il sistema

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$$

non ha evidentemente soluzioni, dato che, qualunque siano x_1 e x_2 la loro somma non può essere contemporaneamente uguale a 1 e a 0.

Esempio 3.3.3. Nel sistema

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 = 2 \end{cases}$$

una delle due equazioni è superflua, vale a dire che ogni coppia di numeri x_1 e x_2 che soddisfi la prima, soddisfa anche la seconda. Pertanto questo sistema non ha una sola soluzione, bensì sono soluzioni tutte le infinite coppie di numeri x_1 e x_2 tali che $x_1 + x_2 = 1$. In questo caso la soluzione può essere presentata, per esempio, esprimendo le due incognite in funzione di un parametro t , e dicendo che sono soluzioni tutti gli elementi di $\mathbb{R}^2$ della forma

$$\begin{pmatrix} 1 - t \\ t \end{pmatrix}$$

con $t \in \mathbb{R}$. Si può arrivarci per esempio ricavando x_1 dall'unica equazione che rimane: $x_1 = 1 - x_2$ e ponendo l'altra incognita x_2 uguale al parametro t : $x_2 = t$. Naturalmente si può esporre la soluzione anche nella forma perfettamente equivalente

$$\begin{cases} x_1 = 1 - t \\ x_2 = t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Si noti che il modo di esprimere le incognite in funzione del parametro, o dei parametri, non è unico: si può altrettanto legittimamente scrivere la soluzione del sistema dato nella forma

$$\begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = 1 - t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

a cui si arriva seguendo un procedimento diverso ma ugualmente valido: questa volta si è scelto di porre $x_1 = t$ e si è poi ricavata x_2 .

Come si vede, si possono verificare varie situazioni: che il sistema abbia una sola soluzione, che non abbia soluzioni, che abbia infinite soluzioni. Quello che non può succedere è che abbia un numero finito di soluzioni maggiore di uno: se ne ha più di una, allora ne ha infinite.

Gli esempi visti riassumono nella forma più semplice e banale i casi che si possono presentare, ma in generale la situazione non è così evidente.

Esempio 3.3.4. Nel sistema

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 4x_3 = 1 \\ -2x_1 + x_2 - 5x_3 = 6 \\ -4x_1 + 3x_2 - 13x_3 = 4 \end{cases}$$

una delle tre equazioni è superflua, cioè è conseguenza delle altre due, e quindi ogni terna di numeri x_1, x_2, x_3 che soddisfa due equazioni, soddisfa anche la terza: per vederlo, si può per esempio ricavare x_1 dalla prima equazione

$$x_1 = 1 + x_2 - 4x_3$$

e sostituirla nella seconda

$$-x_2 + 3x_3 = 8$$

da questa ricavare x_2

$$x_2 = -8 + 3x_3$$

e sostituire ancora x_1 e x_2 nella terza equazione

$$-4(1 + (-8 + 3x_3) - 4x_3) + 3(-8 + 3x_3) - 13x_3 = 4$$

cioè $0 = 0$. Alternativamente, si può constatare che la terza equazione è uguale alla somma della seconda e della prima moltiplicata per -2 .

Occorre quindi una teoria, che permetta di stabilire se un sistema lineare ha soluzioni, se ne ha 'quante' sono, e un metodo per trovarle, quando ci sono.

Definizione 3.3.1. Sia $A \in \mathcal{M}(\mathbb{R}, n, m)$. L'applicazione lineare $\mathcal{L}_A : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ definita da $\mathcal{L}_A(X) = AX$ si dice **applicazione lineare associata alla matrice** A .

Teorema 3.3.1 (Teorema di Rouchè - Capelli). *Data $A \in \mathcal{M}(\mathbb{R}, n, m)$ e $B \in \mathbb{R}^n$, il sistema lineare $AX = B$ ha soluzioni se e solo se*

$$\text{rk}(A) = \text{rk}(A|B)$$

ovvero se e solo se il rango della matrice dei coefficienti è uguale al rango della matrice completa.

Se il sistema ha soluzioni, l'insieme di queste è una varietà affine di $\mathbb{R}^m$ di dimensione $m - \text{rk}(A)$.

Se il sistema è omogeneo, l'insieme delle soluzioni non è mai vuoto, ed è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^m$.

In generale, se il sistema ha soluzioni, detto V_0 il sottospazio vettoriale delle soluzioni del sistema omogeneo $AX = \mathbf{0}$, e $\bar{X}$ una soluzione del sistema $AX = B$, l'insieme delle soluzioni di $AX = B$ è la varietà affine $V_0 + \bar{X}$.

Dimostrazione. Il sistema $AX = B$ ha soluzioni se e solo se l'elemento B di $\mathbb{R}^n$ si trova nell'immagine dell'applicazione lineare $\mathcal{L}_A$: infatti, se $B \in \text{Im}(\mathcal{L}_A)$, allora per definizione di immagine deve esistere $\bar{X} \in \mathbb{R}^m$ tale che $\mathcal{L}_A(\bar{X}) = B$, ovvero $A\bar{X} = B$, e quindi $\bar{X}$ è una soluzione del sistema lineare $AX = B$. D'altra parte $\text{Im}(\mathcal{L}_A)$ è generata dalle colonne della matrice A . Infatti, se A_i è la i -esima colonna di A , e e_i è l' i -esimo vettore della base standard di $\mathbb{R}^m$, si ha $\mathcal{L}_A(e_i) = A_i$. Pertanto il sistema $AX = B$ ha soluzioni se e solo se $B \in L(A_1, A_2, \dots, A_m)$, ovvero se e solo se $L(A_1, A_2, \dots, A_m) = L(A_1, A_2, \dots, A_m, B)$. Ma $L(A_1, A_2, \dots, A_m) \subseteq L(A_1, A_2, \dots, A_m, B)$, quindi i due sottospazi coincidono se e solo se hanno la stessa dimensione; siccome per la definizione stessa di rango di una matrice si ha

$$\begin{aligned} \dim(L(A_1, A_2, \dots, A_m)) &= \text{rk}(A) \\ \dim(L(A_1, A_2, \dots, A_m, B)) &= \text{rk}(A|B) \end{aligned}$$

i due sottospazi coincidono, e il sistema $AX = B$ ha soluzioni, se e solo se $\text{rk}(A) = \text{rk}(A|B)$.

Se il sistema è omogeneo, cioè della forma $AX = \mathbf{0}$, osserviamo intanto che ha sempre almeno la soluzione $\mathbf{0}$. D'altra parte è evidente che se $B = \mathbf{0}$, allora è sempre $\text{rk}(A) = \text{rk}(A|B)$, qualunque sia la matrice A . Inoltre, se scriviamo il sistema nella forma $\mathcal{L}_A(X) = \mathbf{0}$, è evidente che l'insieme delle soluzioni è il nucleo dell'applicazione lineare $\mathcal{L}_A$, che sappiamo essere un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^m$. Dato che $\dim(\text{Im}(\mathcal{L}_A)) = \text{rk}(A)$, si ha $\dim(\ker(\mathcal{L}_A)) = m - \text{rk}(A)$.

In generale, se V_0 è il sottospazio vettoriale delle soluzioni di $AX = \mathbf{0}$ e $\bar{X}$ è una soluzione di $AX = B$, sia $Y \in V_0 + \bar{X}$. Questo vuole dire che $Y = X_0 + \bar{X}$ per un certo $X_0 \in V_0$. Si ha allora $AY = A(X_0 + \bar{X}) = AX_0 + A\bar{X} = \mathbf{0} + B = B$, cioè Y è soluzione di $AX = B$. Viceversa, sia Y soluzione di $AX = B$. Allora $A(Y - \bar{X}) = AY - A\bar{X} = B - B = \mathbf{0}$, cioè $Y - \bar{X} \in V_0$, e quindi $Y \in V_0 + \bar{X}$. La varietà affine $V_0 + \bar{X}$, di dimensione $m - \text{rk}(A)$, contiene quindi tutte e sole le soluzioni di $AX = B$ $\square$

Osservazione 3.3.1. Se la matrice A è quadrata (il che vuol dire che il sistema ha tante equazioni quante incognite) e invertibile, il sistema $AX = B$, qualunque sia B , ha sempre un'unica soluzione. Questo può essere visto anche senza il Teorema di Rouchè - Capelli, infatti è evidente che $A\bar{X} = B$, cioè $\bar{X}$ è soluzione del sistema, se e solo se $\bar{X} = A^{-1}B$. Si noti che questo non implica che se $\det A = 0$ il sistema non ha soluzioni!

Osservazione 3.3.2. Se la matrice A è quadrata e invertibile, il sistema omogeneo $AX = \mathbf{0}$ ha soltanto la soluzione nulla. Pertanto, un sistema omogeneo con tante equazioni quante incognite ha soluzioni non nulle se e solo se la matrice dei coefficienti non è invertibile.

Osservazione 3.3.3. Sia $A \in \mathcal{M}(\mathbb{R}, n, m)$, $B \in \mathbb{R}^n$ e supponiamo che il sistema $AX = B$ abbia soluzioni. Avrà più di una soluzione se e solo se la dimensione della varietà affine delle soluzioni è maggiore di zero, e questa dimensione a sua volta è uguale a $m - \text{rk}(A)$. Se supponiamo $n < m$, sicuramente $\text{rk}(A) < m$ e quindi $m - \text{rk}(A) > 0$. Pertanto un sistema lineare con più equazioni che incognite non può avere un'unica soluzione.

Osservazione 3.3.4. In generale, trovare le soluzioni di un sistema lineare consiste nell'esprimere le incognite in funzione di un certo numero di 'parametri': la dimensione $m - \text{rk}(A)$ della varietà delle soluzioni è esattamente il numero di questi parametri. Se tale dimensione è zero, questo vuole dire che il sistema ha una sola soluzione. Se è uno, vuol dire che si possono esprimere le incognite in funzione di un parametro o, equivalentemente, che se ne possono esprimere $m - 1$ di esse in funzione della restante. In generale, si possono esprimere le m incognite in funzione di $m - \text{rk}(A)$ parametri o, equivalentemente, $\text{rk}(A)$ incognite in funzione delle rimanenti $m - \text{rk}(A)$.

Per applicare il Teorema di Rouchè - Capelli bisogna ridurre a scala la matrice completa, infatti è ovvio che in questo modo si riduce a scala anche quella dei coefficienti, in essa contenuta, e quindi si possono confrontare i loro ranghi. La cosa interessante è che in questo modo si determinano anche le soluzioni del sistema, se ci sono, in virtù della seguente Proposizione.

Proposizione 3.3.1. *Dato il sistema lineare $AX = B$, se $A'|B'$ è una matrice ridotta a scala ottenuta dalla matrice completa $A|B$, i sistemi $AX = B$ e $A'X = B'$ o non hanno entrambi soluzioni, o hanno le stesse soluzioni.*

Pertanto, riducendo a scala la matrice completa del sistema $AX = B$ si ottiene un altro sistema $A'X = B'$ che ha le stesse soluzioni del primo, se questo ne ha, oppure non ha soluzioni, se il primo non ne aveva, ma che è scritto in una forma che ne rende elementare la determinazione. Infatti, riducendo a scala la matrice completa, si fa in modo che il numero di incognite presenti nelle varie equazioni diminuisca dall'alto verso il basso. Nell'ultima equazione rimarrà un certo numero, diciamo k , di incognite; si esplicita una di queste in funzione delle altre, e si scelgono queste ultime come parametri; poi si sostituisce l'incognita ricavata nella penultima equazione, in cui ci saranno in generale $k+1$ incognite, e se ne esplicita un'altra in funzione di quelle scelte come parametri. Procedendo in questo modo a ritroso si ricavano tutte le restanti incognite in funzione dei parametri, oppure si determinano i loro valori numerici se la varietà delle soluzioni ha dimensione zero.

I successivi esempi chiariranno questo procedimento.

Esempio 3.3.5.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_3 = 1 \\ -x_2 + 3x_3 = -1 \end{cases}$$

La matrice completa è

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

che ridotta a scala diventa

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

I ranghi della matrice completa e di quella dei coefficienti sono entrambi uguali a 3, quindi il sistema ha soluzioni, che formano una varietà di dimensione $3-3=0$: ovvero il sistema ha un'unica soluzione. Per trovarla, scriviamo il nuovo sistema, equivalente a quello di partenza, usando la forma ridotta a scala della matrice completa:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \\ -2x_2 + 3x_3 = 0 \\ -3x_3 = 2 \end{cases}.$$

Dalla terza equazione si ricava

$$x_3 = -\frac{2}{3};$$

sostituendo nella seconda equazione

$$-2x_2 - 2 = 0$$

da cui

$$x_2 = -1;$$

infine sostituendo nella prima e nella terza equazione

$$x_1 - 2 + \frac{2}{3} = 1$$

da cui

$$x_1 = \frac{7}{3}.$$

La soluzione è pertanto il solo punto di $\mathbb{R}^2$

$$\begin{pmatrix} \frac{7}{3} \\ -1 \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

che si può esprimere, se si preferisce, nella forma

$$\begin{cases} x_1 = \frac{7}{3} \\ x_2 = -1 \\ x_3 = -\frac{2}{3} \end{cases} .$$

Esempio 3.3.6.

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 1 \\ 2x_2 - 3x_3 = 1 \\ x_1 - 2x_2 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 1 \end{cases}$$

La matrice completa è

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

e ridotta a scala

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -12 \end{pmatrix};$$

questa volta il rango della matrice completa è 4 e il rango della matrice dei coefficienti è 3, quindi il sistema non ha soluzioni.

Esempio 3.3.7.

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 = -4 \\ -x_2 - 2x_3 = 1 \\ x_1 - 3x_3 = 2 \\ x_1 - x_2 - 13x_3 = 4 \end{cases}$$

La matrice completa è

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & -13 & 4 \end{pmatrix}$$

e ridotta a scala

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -8 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

quindi le due matrici hanno entrambe rango 3 e il sistema ha soluzioni, costituenti una varietà di dimensione $3 - 3 = 0$, cioè ha una sola soluzione. Procedendo come già visto in precedenza, si trova che essa è il punto

$$\begin{pmatrix} \frac{13}{8} \\ \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{8} \end{pmatrix}.$$

Esempio 3.3.8.

$$\begin{cases} -x_2 + 3x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_1 - x_3 + 2x_4 = -1 \\ -2x_1 + x_2 + x_4 = 0 \\ -x_1 - 2x_3 - 4x_4 = 1 \\ -2x_1 - x_2 + 6x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$$

Matrice completa

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & -4 & 1 \\ -2 & -1 & 6 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

ridotta a scala

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 10 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

quindi ci sono soluzioni, e costituiscono una varietà di dimensione $4 - 3 = 1$. Il sistema si riduce a tre sole equazioni significative. Dalla terza equazione

$$7x_3 + 10x_4 = -2$$

si può esplicitare, per esempio, x_3 :

$$x_3 = -\frac{2 + 10x_4}{7}$$

quindi si sceglie come parametro $x_4 = t$, da cui

$$x_3 = -\frac{2 + 10t}{7};$$

sostituendo x_3 nella seconda equazione

$$-x_2 + 3x_3 + x_4 = 0$$

si ha

$$-x_2 - 3\frac{2 + 10t}{7} + t = 0$$

da cui si ricava x_2 :

$$x_2 = -\frac{6 + 23t}{7};$$

sostituendo x_2 e x_3 nella prima equazione

$$3x_1 - x_3 + 2x_4 = -1$$

si ottiene

$$3x_1 - \frac{-2 - 10t}{7} + 2t = -1$$

da cui si ricava x_1 :

$$x_1 = -\frac{3 + 8t}{7}.$$

La soluzione è quindi costituita da tutti gli elementi di $\mathbb{R}^4$ della forma

$$\begin{pmatrix} -\frac{3+8t}{7} \\ -\frac{6+23t}{7} \\ -\frac{2+10t}{7} \\ t \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

o, se si preferisce

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{3 + 8t}{7} \\ x_2 = -\frac{6 + 23t}{7} \\ x_3 = -\frac{2 + 10t}{7} \\ x_4 = t \end{cases}.$$

Esempio 3.3.9.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = -1 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 - 2x_4 = -2 \\ 6x_1 + 6x_2 - 2x_3 - 2x_4 = -2 \end{cases}$$

Matrice completa

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & -2 & -2 & -2 \\ 6 & 6 & -2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

ridotta a scala

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

quindi ci sono soluzioni, e costituiscono una varietà di dimensione $4 - 2 = 1$. Il sistema si riduce a due sole equazioni significative. Dalla seconda

$$3x_2 - 2x_3 - 2x_4 = -2$$

da cui si può ricavare x_2 scegliendo come parametri $x_3 = t_1$ e $x_4 = t_2$:

$$x_2 = \frac{-2 + 2t_1 + 2t_2}{3}$$

e sostituendo nella prima

$$x_1 = \frac{1 - t_1 - t_2}{3}.$$

La soluzione è quindi

$$\begin{pmatrix} \frac{1-t_1-t_2}{3} \\ \frac{-2+2t_1+2t_2}{3} \\ t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} \quad t_1, t_2 \in \mathbb{R}$$

o

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1 - t_1 - t_2}{3} \\ x_2 = \frac{-2 + 2t_1 + 2t_2}{3} \\ x_3 = t_1 \\ x_4 = t_2 \end{cases}.$$

3.4 Ricerca di nucleo e immagine di un'applicazione lineare

Determinare il nucleo di un'applicazione lineare $L : V \rightarrow W$ tra spazi vettoriali di dimensione finita, quando si conosca la matrice M che la rappresenta in certe basi $\mathcal{B}_v$ di V e $\mathcal{B}_w$ di W , vuol dire semplicemente risolvere un sistema lineare omogeneo. Infatti, se chiamiamo X la colonna delle coordinate di un generico vettore v di V nella base $\mathcal{B}_v$, si avrà che v appartiene a $\ker(L)$ se e solo se $MX = 0$. Quindi le soluzioni del sistema omogeneo $AX = 0$ forniscono le coordinate nella base $\mathcal{B}_v$ di tutti e soli i vettori che stanno in $\ker(L)$. Naturalmente se l'applicazione lineare è tra spazi $\mathbb{R}^n$ e ne viene data esplicitamente l'espressione in termini di componenti, non è necessario passare attraverso una matrice che la rappresenti (in effetti, quella che viene fornita è la matrice che la rappresenta nelle basi standard). In questo modo si determina la forma generale dei vettori di $\ker(L)$, dipendente da un certo numero di parametri. Se si vuole una base, si dovrà determinare un insieme di vettori di tale forma che siano linearmente indipendenti, e questo può essere fatto assegnando a turno ad uno dei parametri valore 1 e a tutti gli altri valore 0.

Esempio 3.4.1. Sia $L: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definita da

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 + x_2 - x_3 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4 \\ x_1 + x_2 - 2x_4 \end{pmatrix}.$$

In questo caso l'applicazione è definita esplicitamente, quindi basta scrivere e risolvere il sistema

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_4 = 0 \end{cases}$$

Essendo il sistema omogeneo, basta considerare la matrice dei coefficienti

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

che ridotta a scala diventa

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

pertanto $\dim(\ker L) = 4 - 2 = 2$ e la soluzione del sistema è

$$\begin{pmatrix} 2t_2 - t_1 \\ t_1 \\ 2t_2 \\ t_2 \end{pmatrix} \quad t_1, t_2 \in \mathbb{R}.$$

Per ottenere due vettori indipendenti di questa forma, si può porre $t_1 = 1$ e $t_2 = 0$, ottenendo

$$v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

e poi $t_1 = 0$ e $t_2 = 1$, ottenendo

$$v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

L'immagine di un'applicazione lineare è semplicemente generata dai valori che assume sugli elementi di una qualsiasi base del dominio. Se si vuole determinarne una base, si può usare il metodo di riduzione a scala per trovarla a partire dai generatori.

Esempio 3.4.2. Riprendendo l'esempio precedente, per determinare l'immagine di L , potendosi usare una qualsiasi base del dominio, indubbiamente conviene usare la base standard. Si ha

$$L \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad L \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$L \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad L \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

quindi

$$\text{Im}(L) = L \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} \right).$$

Se vogliamo trovare una base di $\text{Im}(L)$ usiamo la matrice che contiene nelle righe i generatori di $\text{Im}(L)$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

e la riduciamo a scala

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ottenendo la base

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$